

ELEMENTOS
DE
MATEMATICA

POR

PEDRO ABELLANAS

CATEDRATICO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

DECIMOTERCERA EDICIÓN

MADRID

COPYRIGHT BY THE AUTHOR

1973

Depósito Legal: VI. 1 - 1975
I.S.B.N. 84 - 400 - 8186 - 3
Heraclio Fournier, S.A. - H. Fournier, 19 - Vitoria

A la memoria de mis padres

PROLOGO A LA CUARTA EDICION

Esta edición es una reelaboración total de la anterior. Hemos sentido la necesidad de redactar casi completamente de nuevo este libro por dos razones fundamentales. En primer lugar, estimamos que las metas que nos habíamos propuesto al redactar la segunda edición han sido ya superadas y que era preciso señalar nuevos objetivos en este curso de carácter propedéutico. Por otro lado, queríamos ofrecer un libro en el que el lector participase de un modo más activo. Por ello, presentamos en esta edición un desarrollo más completo y orgánico del álgebra lineal elemental y de la teoría de la integración de funciones de una variable real y hemos ampliado notablemente el número de ejercicios, presentando, en el segundo volumen de esta obra, las soluciones detalladas de los mismos. La experiencia nos ha enseñado que la única forma de llegar a asimilar las ideas es el manejarlas en casos sencillos; por ello, hemos procurado proponer algunos ejercicios inmediatamente después de cada definición de un nuevo concepto, con objeto de que el lector llegue a darse cuenta del significado de la definición antes de proceder a obtener propiedades o consecuencias de ella. Las soluciones a los ejercicios tienen como finalidad orientar al lector sobre el modo de manipular con los conceptos introducidos en el texto; por ello, recomendamos encarecidamente que la consulta a las soluciones se haga después de que el lector haya resuelto el ejercicio o, por lo menos, haya intentado seriamente resolverlo. Es preciso tener presente que la labor de asimilación de ideas debe hacerla cada lector de un modo estrictamente personal y que el esfuerzo que realice por contestar a las cuestiones propuestas en los ejercicios es el fruto que realmente conseguirá con su estudio. Es un error pensar que se avanza en el estudio de una disciplina cuando se consigue retener en la memoria una gran cantidad de conocimientos de ella. Si no se ha aprendido a manejarlos, dichos conocimientos quedan reducidos en la mente del lector a palabras sin sentido. Es evidente que el estudio bien hecho es más lento que el proceso de retener palabras en la memoria, pero debe convencerse el lector de que esto último no sirve para nada.

Entre las ampliaciones introducidas en esta nueva edición figura el producto tensorial de vectores, el concepto de tensor y el producto exterior de vectores. Creemos que estos conceptos, en su aspecto utilitario, deben pasar

a un curso de nivel propedéutico de la enseñanza superior. Sin embargo, el desarrollo que se ha hecho en el texto es completo, en su parte elemental. No obstante, el lector que no aspire a ser matemático puede prescindir de todas las demostraciones y limitarse a aplicar los conceptos a los ejercicios propuestos. La redacción del texto se ha efectuado de modo que pueda desarrollarse un curso prescindiendo totalmente del estudio de los mencionados temas, por lo que figuran en él dos versiones de la teoría de determinantes. Algo análogo sucede con el estudio de las formas cuadráticas, de que también puede prescindirse, salvo de las primeras definiciones, para continuar con la teoría de cónicas y cuádricas. Tampoco es necesario en un curso normal seguir todo el detalle de la topología de la recta real o del espacio euclídeo, así como del desarrollo del concepto de integral.

Podría pensarse que, no siendo necesarias en una primera lectura, o en un curso normal las demostraciones de la mayor parte de los teoremas que figuran en esta obra, deberían haberse suprimido de ella. Esto, aparte de romper la unidad científica que creemos debe tener todo libro de matemática, sería poco formativo para el lector al privarle de poder conocer la interdependencia de los diversos conceptos que se introducen, y esta curiosidad debe producirse en todo lector que realmente haya llegado a asimilar las ideas.

El problema de la enseñanza, en cualquiera de sus niveles, es esencialmente un problema de selección. La ciencia y la técnica actuales han alcanzado un grado de desarrollo extraordinario y el preparar al futuro científico o técnico exige una preocupación por la sistematización y reducción de conceptos, pues de otro modo no se llegaría a situar a las nuevas generaciones en condiciones de utilizar los conocimientos adquiridos por el pensamiento humano hasta nuestros días. Como consecuencia, es preciso una renovación constante de los cursos y un descenso a niveles inferiores de conceptos o teorías que figuraban en estadios más avanzados de los estudios. Como es natural, esto exige prescindir de cuestiones que no tengan una gran vitalidad, aun cuando hayan figurado durante muchas generaciones en los plumes de estudio. Conseguir actualizar un curso básico de matemática ha sido nuestro principal objetivo al redactar esta nueva edición. Si con este trabajo consiguiéramos colaborar a mejorar la formación de nuestros futuros científicos y técnicos nos sentiríamos altamente recompensados de nuestro esfuerzo.

Madrid, 15 de octubre de 1965.

INDICE POR MATERIAS

PRIMERA PARTE

ALGEBRA LINEAL

CAPITULO PRIMERO

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS BASICAS

	Páginas
§ 1. Teoría de conjuntos:	
1. Conjuntos	1
2. Algebra de las partes de un conjunto	6
§ 2. Producto de conjuntos. Aplicación. Función. Relación:	
1. Producto de conjuntos	16
2. Relaciones. Correspondencias. Transformaciones. Funciones	18
3. Relación de igualdad. Clasificación. Conjunto cociente	24
4. Aplicaciones o funciones uniformes... ..	28
5. Relaciones de orden. Orden total. Buena ordenación. Lema de Zorn ...	33
6. Terminología y notaciones de la lógica matemática	42
§ 3. Grupos:	
1. Grupoides y semigrupos	48
2. Grupos. Subgrupos	53
3. Homomorfismos. Isomorfismos	60
4. Grupos finitos	66
5. Grupos abelianos	68
§ 4. Anillos:	
1. Anillos. Subanillos	73
2. Homomorfismos entre anillos. Isomorfismos	75
3. Anillos enteros. Ideales primos. Anillos euclídeos	80
§ 5. Cuerpos:	
1. Cuerpo de fracciones de un anillo entero... ..	86
2. El cuerpo de los números racionales	88
3. El cuerpo de fracciones de un anillo de polinomios	91

CAPITULO SEGUNDO

EL ESPACIO VECTORIAL

§ 1. El espacio vectorial:

1. Definiciones	99
2. Concepto de vector libre	101
3. El cuerpo de las razones de segmentos	105
4. El espacio vectorial de los vectores libres	119
5. Espacio vectorial. Dependencia lineal	124
6. Homomorfismos entre espacios vectoriales	140
7. Homomorfismo natural. Primer teorema de isomorfia	142
8. Operaciones con homomorfismos	149
9. Espacio dual de un espacio vectorial	155
10. Producto tensorial de vectores. Tensores	158
11. Producto exterior de vectores. Multivectores. Determinantes	168
12. Ecuaciones de los homomorfismos entre espacios vectoriales. Operaciones con homomorfismos... ..	185

§ 2. Matrices. Cálculo con matrices:

1. Operaciones lineales con matrices	194
2. Multiplicación de matrices. Transposición	197
3. Determinante de una matriz cuadrada	204
4. Matriz inversa de una matriz cuadrada	209

§ 3. Sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación lineal:

1. Definiciones. Regla de Cramer	212
2. Rango de una matriz. Dependencia lineal de vectores	214
3. Teorema de Rouché-Fröbenius	220
4. Sistemas lineales homogéneos	223
5. Variedades lineales en el espacio vectorial. Eliminación en sistemas homogéneos	227
6. Variedades lineales en el espacio afín. Eliminación en sistemas no homogéneos	232

CAPITULO TERCERO

EL ESPACIO EUCLIDEO

§ 1. El plano afín:

1. La recta afín	240
2. El plano afín	243
3. Ecuación de la recta en el plano. Incidencia en el plano	248
4. Ecuación implícita de una recta. Incidencia en el plano	251
5. Intersección en el plano	257

	Páginas
6. Semiplanos. Figuras convexas	261
7. Orientación del plano afín	268
§ 2. El espacio afín:	
1. El espacio afín ordinario	271
2. Coordenadas cartesianas en el espacio afín	273
3. Ecuación cartesiana del plano	275
4. Ecuaciones cartesianas de la recta	278
5. Incidencia en el espacio	280
6. Intersección en el espacio... ..	282
7. Coordenadas afines en el espacio	291
8. Semiespacios, Figuras convexas	293
9. Orientación en el espacio afín	295
§ 3. El espacio vectorial euclídeo ordinario:	
1. Multiplicación escalar de dos vectores libres	297
2. Multiplicación vectorial de dos vectores libres	300
3. Producto mixto de tres vectores	303
§ 4. El espacio euclídeo:	
1. El plano euclídeo	305
2. El espacio euclídeo	316
3. Programación lineal	329
CAPITULO CUARTO	
FORMAS CUADRATICAS. CONICAS. CUADRICAS	
§ 1. Formas bilineales. Formas cuadráticas:	
1. Formas bilineales	339
2. Formas cuadráticas	345
3. Descomposición de Witt de un espacio vectorial cuadrático. Signatura ...	352
4. Cálculo del rango y de la signatura de una forma cuadrática real	359
§ 2. Cónicas:	
1. Cónicas. Reducción de la ecuación de una cónica	361
2. Invariantes métricos de una cónica	365
3. Estudio particular de las cónicas	367
4. Clasificación afín y métrica de las cónicas	371
§ 3. Cuádricas:	
1. Cuádricas. Ecuaciones reducidas	373
2. Invariantes métricos de las cuádricas	382
3. Reducción de la ecuación de una cuádrica	384
4. Clasificación afín de las cuádricas	385

SEGUNDA PARTE

ANÁLISIS INFINITESIMAL

CAPÍTULO QUINTO

TOPOLOGÍA DEL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES. FUNCIONES CONTINUAS

§ 1. El número real:

1. Topología en el cuerpo de los números racionales	393
2. El cuerpo de los números reales	403
3. Topología del cuerpo de los números reales	407
4. La función exponencial real	424

§ 2. Sucesiones y series de números reales:

1. Sucesiones de números reales	436
2. Series de números reales. Definiciones	444
3. Series de términos positivos	450
4. Criterios de convergencia para las series de términos positivos	452
5. Series de términos reales cualesquiera	458
6. Sumación de series	464

§ 3. El número complejo:

1. El cuerpo de los números complejos	467
2. Potenciación de los números complejos	477
3. Topología en el cuerpo de los números complejos	481

§ 4. Topología del espacio euclídeo:

1. El espacio euclídeo	484
2. Funciones entre espacios euclídeos. Límites	487
3. Funciones continuas de variables reales	498

CAPÍTULO SEXTO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIABLES REALES

§ 1. Diferenciales y derivadas:

1. El problema del cálculo diferencial	506
2. Diferencial de una función de una variable real	508
3. Diferencial de una aplicación $A \rightarrow E_m$	511
4. Diferenciales de las funciones elementales	520

§ 2. Estudio local de las funciones de variables reales:

1. Diferenciales sucesivas de una aplicación	524
2. Teorema del valor medio	529
3. El teorema de Taylor	536
4. Sucesiones funcionales	543
5. Series funcionales	546

§ 3. Funciones implícitas e inversas:

1. Diferencial parcial de una aplicación	558
2. Teorema de existencia de funciones implícitas	561
3. Máximos y mínimos condicionados	569
4. Cambio de variables	572

CAPITULO SEPTIMO

CALCULO NUMERICO

§ 1. Resolución de ecuaciones:

1. Ecuaciones algebraicas. Relaciones entre las raíces y los coeficientes de un polinomio	576
2. Resultantes	578
3. Eliminación	580
4. Raíces racionales de una ecuación	581
5. Separación de las raíces irracionales	581
6. Cálculo de las raíces reales de una ecuación	584

§ 2. Cálculo numérico:

1. Interpolación	586
2. Funciones implícitas	596
3. Ajuste de funciones	599
4. Nomografía	609

CAPITULO OCTAVO

CURVAS Y SUPERFICIES

§ 1. Curvas:

1. Concepto de curva. Tangente	616
2. Puntos singulares de las curvas definidas en forma explícita	619

	Páginas
3. Fórmulas de Frénet	621
4. Curvas planas	627
5. Curvas planas definidas implícitamente	633
 § 2. Superficies:	
1. Superficies. Definición. Plano tangente	641
2. Superficies en forma implícita. Curvas en forma implícita	645
3. Superficies regladas	649
4. Superficies de rotación y de traslación	653
 CAPITULO NOVENO	
 I N T E G R A C I O N	
 § 1. Integrales indefinidas:	
1. Extensión del concepto de diferencial. Integral indefinida	656
2. Integrales inmediatas	658
3. Integración por descomposición y cambio de variable	659
4. Integración por partes	661
5. Integración de funciones racionales	663
6. Racionalización de funciones	665
 § 2. Integral de Riemann:	
1. Integrales de Darboux	668
2. Límites filtrantes	671
3. Integral de Riemann	672
4. Propiedades de la integral de Riemann	675
5. Integral de Riemann-Stieltjes	682
6. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes	688
 § 3. Convergencia de integrales. Integración de series funcionales:	
1. Convergencia de integrales con un límite de integración infinito	692
2. Convergencia de integrales con integrando no acotado	698
3. Integrales dependientes de un parámetro	702
4. Integración de series funcionales	711
 § 4. Aplicaciones geométricas de la integral definida:	
1. Cálculo de áreas de figuras planas	715
2. Longitud de un arco de curva	720
3. Área de una superficie de rotación	723
4. Volumen de un cuerpo de rotación	724
5. Cálculo numérico de integrales	725
ÍNDICE ALFABÉTICO... ..	729

PRIMERA PARTE

ALGEBRA LINEAL

CAPITULO PRIMERO

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS BASICAS

§ 1. TEORIA DE CONJUNTOS

1. Conjuntos.—El concepto de conjunto es un concepto primitivo, esto significa que no se define. Ahora bien, admitiremos que todos los conjuntos que en lo sucesivo empleemos son tales que se pueda averiguar si un objeto dado pertenece o no pertenece al conjunto. Ejemplos de conjuntos: a) El conjunto de las hojas de este libro. b) El conjunto de los alumnos de la Universidad de Madrid. c) El conjunto de los números naturales. d) El conjunto de los puntos de una recta. e) El conjunto de las funciones continuas en un intervalo. f) El conjunto de las velocidades de todos los puntos de un sólido rígido en movimiento en un instante dado. g) El conjunto de los días: lunes, miércoles, viernes. Obsérvese que en todos los ejemplos anteriores se puede, por lo menos teóricamente, averiguar si un objeto pertenece o no al conjunto. Cada una de las hojas de este libro es un *elemento* del conjunto definido en a). El miércoles es un elemento del conjunto definido en g). Nombre el lector un elemento de cada uno de los restantes conjuntos. Sin embargo, las siguientes proposiciones no definen conjuntos: a') Los días que va a vivir el lector de estas líneas. b') Los números naturales que se pueden definir empleando menos de cien palabras del diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. c') Las longitudes de los diámetros de las gotas de agua de las lluvias que se producirán mañana en toda la tierra.

NOTACIONES.—1. A los conjuntos los representaremos por letras mayúsculas, o bien encerrando a todos sus elementos entre llaves. Así, por ejemplo, diremos: conjunto A, C, M, X o bien conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, conjunto {lunes, miércoles, viernes}. Cuando no se pueden escribir todos los elementos se emplea la siguiente notación: $\{x \mid x = 3\}$, que se lee: conjunto de todos

los números x tales que x es múltiplo de tres. A veces conviene emplear una notación más breve para un conjunto y se escribe:

$$A = \{x \mid x = 3\},$$

en donde el signo $=$ debe interpretarse en el sentido de que A y $\{x \mid x = 3\}$ son dos notaciones del mismo conjunto.

EJERCICIOS:

1. Representar mediante dos notaciones distintas los siguientes conjuntos:
 - a) Conjunto de las vocales.
 - b) Conjuntos de las raíces del polinomio $x^2 + 2x - 3$.
 - c) Conjunto de los segmentos iguales al segmento $\overline{AB}$.
 - d) Conjunto de los números enteros comprendidos entre $-3, 5$ y $+3, 5$.
2. Nombrar un elemento de cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior.

Los elementos de un conjunto se dice que *pertenecen* al conjunto, lo que se expresa mediante el signo $\in$, que se lee: *pertenece a*. Así, por ejemplo:

$$a \in A$$

se lee: *el elemento a pertenece al conjunto A*. Si el elemento b no pertenece al conjunto A , se escribe:

$$b \notin A.$$

DEFINICIÓN 1.—Se dice que el conjunto A es un *subconjunto*, o una *parte*, del conjunto B , y se escribe:

$$A \subset B,$$

cuando todo elemento que pertenece al conjunto A pertenece también al conjunto B . La relación representada por el símbolo $\subset$ se llama *relación de inclusión*. Si A no es parte de B se escribe:

$$A \not\subset B.$$

EJERCICIO:

3. Escribir, si existen, las relaciones de inclusión entre los siguientes conjuntos:
 - a) $A = \{\text{conjunto de todos los perros}\}$, $B = \{\text{conjunto de todos los perros blancos}\}$.
 - b) $A = \{\text{conjunto de todos los triángulos isósceles}\}$, $B = \{\text{conjunto de todos los triángulos equiláteros}\}$.

c) $A = \{\text{conjunto de todos los rectángulos}\}$, $B = \{\text{conjunto de todos los rombos}\}$, $C = \{\text{conjunto de todos los cuadrados}\}$.

d) $N = \{\text{conjunto de todos los números naturales}\}$, $Z = \{\text{conjunto de los números enteros}\}$, $Q = \{\text{conjunto de los números racionales}\}$.

e) $A = \{x \mid x = 4\}$, $B = \{x \mid x = 6\}$.

f) $A = \{\text{conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de P y Q}\}$, $B = \{\text{conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a la perpendicular al segmento } \overline{PQ} \text{ en su punto medio}\}$.

DEFINICIÓN 2.—Dos conjuntos se llaman *idénticos* cuando todo elemento que pertenece a uno pertenece al otro. Si dos conjuntos A y B son idénticos se escribe:

$$A \equiv B \quad \text{o} \quad A = B.$$

En general se usará la segunda notación, salvo en los casos en que pueda haber posibilidad de confusión, en que se usará la primera.

De la definición anterior se deduce inmediatamente el siguiente:

CRITERIO DE IDENTIDAD DE CONJUNTOS.—La condición necesaria y suficiente para que

$$A \equiv B$$

es que

$$A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A.$$

La relación de inclusión de conjuntos posee las siguientes propiedades fundamentales cuya demostración realizará el lector como ejercicio:

PROPIEDADES DE LA RELACIÓN DE INCLUSIÓN.—I. Si A es un conjunto arbitrario se verifica:

$$A \subset A.$$

Esta propiedad se llama *reflexiva*.

II. Si $A \subset B$ y $B \subset A$ se verifica $A \equiv B$. Esta propiedad se conoce con el nombre de *antisimétrica*.

III. $A \subset B$ y $B \subset C$ implican $A \subset C$. Conocida con el nombre de propiedad *transitiva*.

Hemos visto que, en general, los conjuntos se definen mediante una propiedad característica de sus elementos. Esta definición de los conjuntos puede conducir a las siguientes situaciones: a) Sea A el conjunto de todos los números naturales tales que dividen a cualquier otro número natural. El conjunto A está formado por un único elemento: el uno. b) Sea B el conjunto de todas las rectas del plano euclídeo ordinario que son perpendiculares a sí mismas. El conjunto B no posee ningún elemento. Estos conjuntos no corresponden a la idea ordinaria de conjunto, pero resulta cómodo considerarlos como tales. A los conjuntos con un único elemento se les llama *conjuntos unitarios* y al conjunto que no posee ningún elemento se le llama *conjunto vacío*, y se representa por el siguiente símbolo:

$$\emptyset = \text{conjunto vacío.}$$

Si A es un conjunto definido por la propiedad p , los subconjuntos de A vienen definidos por propiedades q que se obtienen añadiendo a la propiedad p alguna otra condición. Así, por ejemplo, si A es el conjunto de los perros y B el conjunto de los perros blancos. Como siempre se puede añadir a la propiedad p que define al conjunto A una condición que no la verifique ninguno de los elementos de A , resulta que conviene considerar al conjunto vacío como parte de cualquier conjunto. Esto es, admitiremos que

$$(1) \quad \emptyset \subset A,$$

cualquiera que sea el conjunto A .

Conviene asimismo distinguir entre un elemento x del conjunto A y la parte del conjunto A formada únicamente por el elemento x ; a esta última la representaremos por $\{x\}$. Por consiguiente, las dos relaciones siguientes son equivalentes, pero distintas:

$$x \in A, \quad \{x\} \subset A.$$

EJERCICIOS:

4. Sea A el conjunto de todos los puntos x de un plano tales que el ángulo $M X N$ sea un ángulo recto, siendo M y N dos puntos distintos del mismo. Sea B el conjunto de los puntos de la circunferencia de diámetro $M N$. ¿Son idénticos A y B ?

5. $A = \{x \mid x = 2m + 3n; m, n \in \mathbb{N}\}$, pudiendo ser cero uno de ellos. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 1\}$. (El conjunto A se lee del siguiente modo: A es el conjunto de todos los números naturales x tales que x es de la forma $2m + 3n$, siendo m y n números naturales, pudiendo ser cero uno de ellos.) ¿Qué relación existe entre A y B ?

DIAGRAMAS DE CONJUNTOS.—Para representar los conjuntos pueden emplearse varios tipos de diagramas. Los más usuales son los siguientes:

1. *Diagramas de Venn.*—Cada conjunto se representa mediante una región del plano tal como las de la figura 1, colocando en su interior el nombre del conjunto. Cuando es necesario distinguir varias regiones se pueden rayar algunas de ellas.

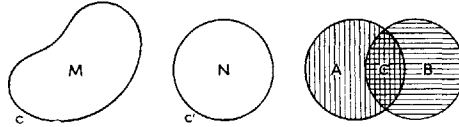


Fig. 1.

Así, por ejemplo, los conjuntos M y N de la figura 1 vienen representados por las regiones del plano limitadas por la línea cerrada c y por la circunferencia c' . El conjunto A de la misma figura viene representado por el círculo rayado verticalmente, el conjunto B por el círculo rayado horizontalmente y el conjunto C por la región cuadrículada.

La relación de inclusión $B \subset A$ viene representada en el diagrama de Venn mediante un esquema tal como el de la figura 2.

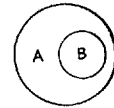


Fig. 2.

II. *Representación lineal.*—En otras ocasiones conviene representar los conjuntos por subconjuntos de puntos de una recta, como en la figura 3. El conjunto A viene representado por los puntos de un segmento de la recta x y el conjunto B por los puntos N, P, Q, R de la recta y .

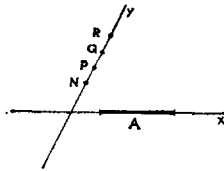


Fig. 3.

III. *Diagrama mediante grafos.*—Cuando interesa hacer resaltar la relación de inclusión entre varios conjuntos se representa cada conjunto por un punto del plano con el siguiente convenio: si $A \subset B$ el punto representante de A se coloca por debajo del representante de B y se unen ambos puntos mediante un trazo continuo. Dos conjuntos cuyos puntos correspondientes no se unen con trazo no están relacionados mediante la relación de inclusión. Así, por ejemplo, la relación entre los conjuntos A, B y C del diagrama de Venn de la figura 1 viene representado por el siguiente grafo (figura 4):



Fig. 4.

EJERCICIOS:

6. Representar mediante diagramas de Venn y grafos las siguientes relaciones de inclusión: $G \subset D$, $G \subset E$, $G \subset F$, $D \subset A$, $D \subset B$, $E \subset A$, $E \subset C$, $F \subset B$, $F \subset C$.

7. Sea (2) el conjunto de todos los múltiplos de dos; análogo significado tienen (3), (4), (8), (16), (6), (12), (24), (48), (9), (18), (36), (72), (144), (27), (54), (108), (216), (432). Construir el grafo correspondiente.

8. Dado un tetraedro de vértices A, B, C, D , se consideran los siguientes conjuntos de puntos: $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$, $E = \text{segmento } AB$, $F = \text{segmento } AC$, $G = \text{segmento } AD$, $H = \text{segmento } BC$, $I = \text{segmento } CD$, $J = \text{segmento } BD$, $K = \text{triángulo } BCD$, $L = \text{triángulo } ACD$, $M = \text{triángulo } ABD$, $N = \text{triángulo } ABC$. Construir el grafo correspondiente.

2. Algebra de las partes de un conjunto.—Sea U un conjunto dado, que supondremos fijo en todo este número. Representaremos por $R(U)$ al conjunto formado por todas las partes de U .

EJERCICIOS:

9. Escribir los elementos del conjunto $R(U)$:

a) Siendo $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Siendo $U = \{a, b, c\}$.

10. ¿Cuántos elementos posee $R(U)$ cuando U posee n elementos?

11. Si $A \subset U$, $B \subset U$. ¿Qué relación existe entre A, B y $R(U)$?

DEFINICIÓN 3.—Si $A, B \in R(U)$, se llama *unión* de A y B , y se representa por

$$A \cup B$$

al conjunto formado por todos los elementos de U que pertenecen a A o a B o a ambos.

EJERCICIO:

12. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, escribir los elementos de $A \cup B$.

De la definición resulta:

Si $A, B \in R(U)$ se verifica que $A \cup B \in R(U)$.

Empleando los diagramas de Venn, la unión del conjunto A (rayado verticalmente en la figura 5) y del conjunto B (rayado horizontalmente) es el

conjunto rayado o cuadrículado de dicha figura. El grafo correspondiente a la unión es el indicado en dicha figura. De la definición y de los diagramas de la figura 5 se deduce inmediatamente que:

$$(2) \quad A \subset A \cup B.$$

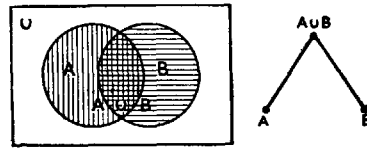


Fig. 5.

PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS.— Hemos visto ya que: La unión de dos conjuntos es otro conjunto, y si los conjuntos dados son partes de otro conjunto U , el conjunto unión es también parte de U . Todo conjunto (2) está contenido en la unión de él con cualquier otro conjunto. Pero, además, se verifican las siguientes propiedades básicas de la operación unión:

I. *Propiedad asociativa.*—Si A , B y C son tres conjuntos arbitrarios, se verifica que:

$$(3) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Los diagramas correspondientes a la igualdad (3) son los siguientes:

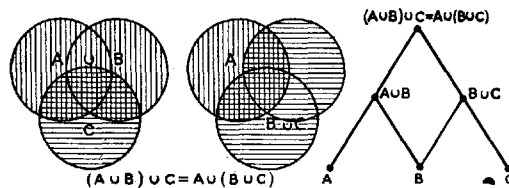


Fig. 6.

II. *Propiedad conmutativa.*

$$(4) \quad A \cup B = B \cup A.$$

III. *Propiedad idempotente.*

$$(5) \quad A \cup A = A.$$

EJERCICIO:

13. Demostrar las propiedades anteriores.

IV. *Elemento ínfimo y elemento universal.*—Para cualquier conjunto A se verifica que

$$(6) \quad A \cup \emptyset = A.$$

Si todos los conjuntos considerados son partes del conjunto U , se verifica que:

$$(7) \quad A \cup U = U.$$

Por estas razones, al elemento $\emptyset$ se le llama *elemento ínfimo* de $\mathbf{R}(U)$, y al elemento U se le llama *elemento universal* de $\mathbf{R}(U)$.

DEFINICIÓN 4.—Si $A, B \in \mathbf{R}(U)$ se llama *unión* de A y B , y se representa por $A \cup B$, a todo elemento de $\mathbf{R}(U)$, tal que $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $X \in \mathbf{R}(U)$, $A \subset X$ y $B \subset X$ implique $A \cup B \subset X$. Esto se puede expresar mediante la siguiente notación:

$$(8) \quad A \cup B = \min. (X \mid A \subset X, B \subset X).$$

Se verifica el siguiente teorema:

1. Las definiciones 3 y 4 son equivalentes.

EJERCICIOS:

14. Probar el teorema 1.

15. Probar que la Def. 4 define un único elemento de $\mathbf{R}(U)$.

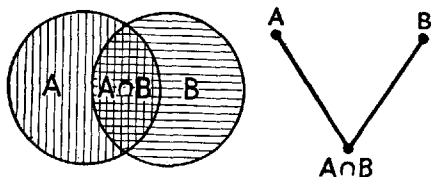


Fig. 7.

DEFINICIÓN 5.—Si A y B son dos conjuntos, se llama *intersección* de A y B , y se representa por $A \cap B$ al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y B .

Los diagramas correspondientes a la intersección son los de la figura 7.

Consecuencias inmediatas de la definición:

a) La intersección de dos conjuntos es otro conjunto.

b) El conjunto intersección de dos conjuntos está contenido en cualquiera de ellos:

$$(9) \quad A \cap B \subset A.$$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS.—I. *Propiedad asociativa*. Si A, B y C son tres conjuntos arbitrarios, se verifica que:

$$(10) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Los diagramas correspondientes a la igualdad (10) son los de la figura 8.

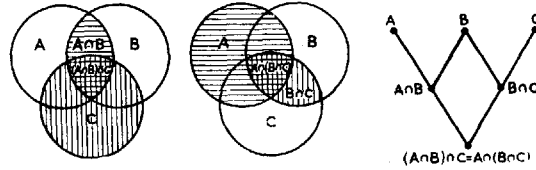


Fig. 8.

II. *Propiedad conmutativa*.

$$(11) \quad A \cap B = B \cap A.$$

III. *Propiedad idempotente*.

$$(12) \quad A \cap A = A.$$

IV. *Elemento ínfimo y elemento universal*.—Para cualquier conjunto se verifica:

$$(13) \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Si todos los conjuntos considerados son partes de un conjunto U, se verifica:

$$(14) \quad A \cap U = A.$$

Las propiedades (13) y (14) caracterizan a los elementos ínfimo ($\emptyset$) y universal (U) desde el punto de vista de la intersección.

DEFINICIÓN 6.—Se llama *intersección* de dos conjuntos A y B, y se representa por $A \cap B$, a todo conjunto tal que $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ y de $X \subset A$, $X \subset B$ se deduce que $X \subset A \cap B$.

2. Las definiciones 5 y 6 son equivalentes.

Existe una primera propiedad común a la unión e intersección de conjuntos:

V. *Ley de simplificación.*—Si A y B son conjuntos cualesquiera se verifica:

$$(15) \quad (A \cup B) \cap A = A, \quad (A \cap B) \cup A = A.$$

Los diagramas de Venn correspondientes a (15) son los siguientes:

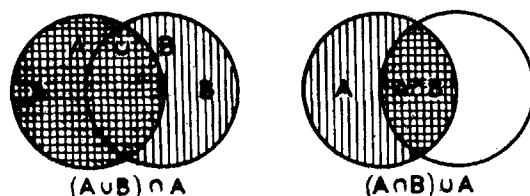


Fig. 9.

Conviene recordar que en los diagramas de Venn la intersección de conjuntos corresponde a la parte cuadriculada del diagrama y que la unión corresponde a toda la parte rayada (una o varias veces).

Las cinco propiedades anteriores son fundamentales, especialmente las I, II, III y V.

De las propiedades anteriores se deducen las siguientes:

- 1) $A \cup B = B$ es equivalente a $A \cap B = A$.
- 2) $A \subset B$ implica que $A \cup C \subset B \cup C$ y que $A \cap C \subset B \cap C$, para todo conjunto C .
- 3) $A \cup B = B$ es equivalente a $A \subset B$.
- 4) Si U es un conjunto no vacío e I es una parte de U tal que para toda parte X de U sea $X \cup I = X$, se verifica que I es el elemento ínfimo. En virtud de 1) la condición anterior es equivalente a $X \cap I = I$, para cualquier X .
- 5) Si V es un elemento de $\mathbf{R}(U)$ tal que para todo $X \in \mathbf{R}(U)$ sea $X \cap V = X$, o su equivalente, $X \cup V = V$, se verifica que V es el elemento universal.

EJERCICIOS:

16. Demostrar el teorema 2.
17. Demostrar la propiedad 1).
18. Demostrar la propiedad 2).

19. Demostrar la propiedad 3).
 20. Demostrar la propiedad 4).
 21. Demostrar la propiedad 5).

VI. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.—Si A , B y C son tres conjuntos arbitrarios, se verifica que:

$$(16) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$(17) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Los diagramas correspondientes a las igualdades (16) y (17) son los de las figuras 10 y 11, respectivamente:

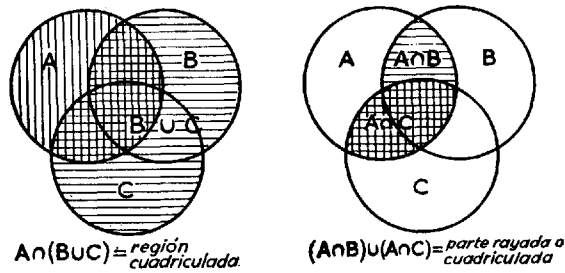


Fig. 10.

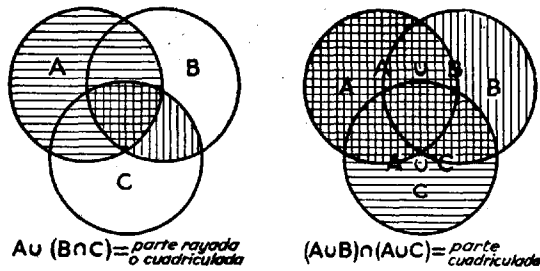


Fig. 11.

DEFINICIÓN 7.—Si $X \in \mathbf{R}(U)$, se llama *complementario* de X al conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a X . Al complementario de X se le representa por

$$c(X).$$

El complementario posee las siguientes propiedades:

- 1) $c(\emptyset) = U$, $c(U) = \emptyset$.
- 2) $c(c(X)) = X$.
- 3) $c(A \cup B) = c(A) \cap c(B)$.
- 4) $c(A \cap B) = c(A) \cup c(B)$.
- 5) $A \subset B$ implica que $c(B) \subset c(A)$.
- 6) $A \cup c(A) = U$, $A \cap c(A) = \emptyset$.

EJERCICIOS:

22. Demostrar las propiedades distributivas.
23. Construir los diagramas de Venn correspondientes a la definición de complementario y a las propiedades 2), 3), 4) y 5).
24. Demostrar las propiedades 1), 2), 3), 4), 5) y 6).
25. Si A y B pertenecen a $\mathbf{R}(U)$ y se verifica que $A \cup B = U$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $B = cA$.

DEFINICIÓN 8.—Un elemento A de $\mathbf{R}(U)$ se llama *átomo* cuando $A \neq \emptyset$ y de $\emptyset \neq X \subset A$, siendo X un elemento de $\mathbf{R}(U)$, se deduce $X = A$.

EJERCICIO:

26. Demostrar que los subconjuntos unitarios de U son átomos y que son los únicos átomos de $\mathbf{R}(U)$.

DEFINICIÓN 9. Se llama *retículo* a un conjunto R , entre cuyos elementos se han definido dos operaciones, llamadas *unión* e *intersección*, respectivamente, y representadas por los símbolos $\cup$ y $\cap$, tales que si A y B son dos elementos arbitrarios de R , $A \cup B$ y $A \cap B$ existen, son únicos y pertenecen a R y estas operaciones verifican las siguientes relaciones:

- I. *Asociatividad*.—Para tres elementos cualesquiera, A, B, C , de R , es:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

- II. *Conmutatividad*.—Si $A, B \in R$, se verifica:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- III. *Idempotencia*.—Para todo elemento A de R se verifica:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

IV. *Ley de simplificación.*—Si A y B son elementos arbitrarios de R se verifica que

$$(A \cup B) \cap A = A, \quad (A \cap B) \cup A = A.$$

De esta definición y de todo lo visto anteriormente, resulta el siguiente teorema:

3. *El conjunto $R(U)$ de las partes de un conjunto es un retículo.*—La misma demostración del ejercicio 17 prueba que:

4. *Si A y B son elementos de un retículo R , las dos igualdades siguientes son equivalentes:*

$$A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

La proposición 4 permite establecer la siguiente:

DEFINICIÓN 10.—Entre los elementos de un retículo R se puede definir una relación, llamada de *ordenación*, y representada por el signo $\subset$, del siguiente modo:

$$(18) \quad A \subset B \text{ es equivalente a } A \cup B = B \text{ y a } A \cap B = A.$$

5. *La relación de ordenación de un retículo posee las tres propiedades siguientes:*

- I. *Propiedad reflexiva:* $A \subset A$, para todo A de R .
- II. *Propiedad antisimétrica:* $A \subset B$ y $B \subset A$, implican $A = B$.
- III. *Propiedad transitiva:* $A \subset B$ y $B \subset C$, implican $A \subset C$.

EJERCICIOS:

27. Se llama H_i al suceso que consiste en que al arrojar dos dados, en uno de ellos, por lo menos, salga el número i . Se llama $H_i \cup H_j$ al suceso que consiste en que al arrojar dos dados salga en uno de ellos, por lo menos, el número i , o el número j . Se llama $H_i \cap H_j$ al suceso que consiste en que al arrojar dos dados salgan los números i y j . Análogamente se definen $(H_i \cup H_j) \cup H_k$, $(H_i \cup H_j) \cap H_k$, etc. Demostrar que el conjunto H de todos estos sucesos, juntamente con el suceso imposible, H_0 , que es el suceso que consiste en que salgan números que no pueden salir, forman un retículo.

28. Sea P el conjunto de todas las proposiciones. Por ejemplo: {Hoy es sábado, está lloviendo, brilla el sol, etc.}. En P se pueden definir dos operaciones, $\cup$, $\cap$, del siguiente modo: si $p, q \in P$, $p \cup q$ se lee, p o q (la conjunción o actúa como copulativa y como disyuntiva); $p \cap q$ se lee p y q . Demostrar que P es un retículo.

29. Demostrar la proposición 5.

30. Sea $\mathbf{C}$ el conjunto de los conmutadores de un circuito eléctrico. Representaremos por $A \cup B$ a dos conmutadores montados en paralelo y por $A \cap B$ a dos conmutadores montados en serie, como indica el diagrama de la figura 12. Demostrar que $\mathbf{C}$ es un retículo.

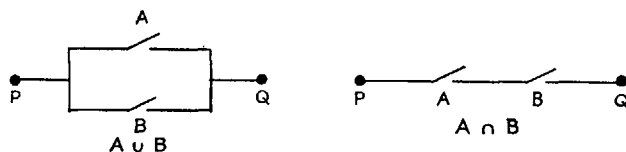


Fig. 12.

DEFINICIÓN 11.—Se llama elemento *ínfimo* de un retículo R , al elemento I definido por las propiedades equivalentes:

$$(19) \quad X \cup I = X, \quad X \cap I = I, \quad \text{para todo } X \in R.$$

Se llama elemento *universal* de un retículo R , al elemento U definido por las propiedades equivalentes:

$$(20) \quad X \cup U = U, \quad X \cap U = X, \quad \text{para todo } X \in R.$$

Un retículo se dice que posee elemento ínfimo (elemento universal) cuando existe en él un elemento (que es único) que cumple las condiciones (19) (resp. las condiciones (20)).

DEFINICIÓN 12.—Se llama *retículo distributivo* a todo retículo que verifica las siguientes propiedades distributivas:

$$(21) \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$

$$(22) \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$

para toda terna, X, Y, Z de elementos del retículo.

DEFINICIÓN 13.—Se llama *retículo complementario* a todo retículo tal que para todo $X \in R$ existe el elemento complementario, cX , caracterizado por las dos propiedades:

$$(23) \quad X \cup cX = U, \quad X \cap cX = I,$$

siendo U el elemento universal e I el elemento ínfimo.

DEFINICIÓN 14.—Los retículos distributivos y complementarios se llaman *álgebras de Boole*.

De todo lo que precede se deduce que *el conjunto $R(U)$ de las partes de un conjunto es un álgebra de Boole*.

EJERCICIO:

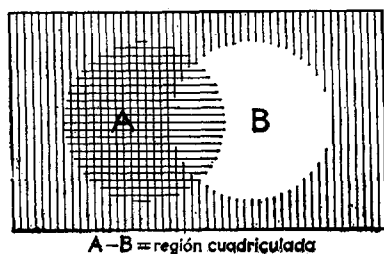
31. Comprobar que el retículo del ejercicio 28 es un álgebra de Boole.

SUSTRACCIÓN.—En un álgebra de Boole R se puede definir otra operación, llamada *sustracción*, del siguiente modo:

DEFINICIÓN 15.—Si A y B pertenecen a R se llama *diferencia* entre A y B , y se representa por $A - B$ al siguiente elemento de R :

$$(24) \quad A - B = A \cap \bar{B}.$$

El diagrama de Venn correspondiente a la diferencia $A - B$ es el conjunto cuadriculado de la figura 13.



$A - B = \text{región cuadriculada}$

Fig. 13.

Se llama *suma* del elemento A con el elemento B al elemento $A \cup B$, cuando $A \cap B = \emptyset$. La suma de A y B se representa por $A + B$. Se verifica, por tanto, que escribir $A + B$ equivale a escribir $A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

EJERCICIOS:

32. Demostrar que

$$(25) \quad (A - B) + B = A \cup B.$$

33. Demostrar que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

DEFINICIÓN 16. Si A y B pertenecen a R se llama *diferencia simétrica* entre A y B , y se representa por $A \Delta B$ al siguiente elemento:

$$(26) \quad A \Delta B = (A - B) + (B - A).$$

EJERCICIOS:

34. ¿Por qué se puede poner el signo $+$ en la definición (26)?

35. Demostrar que si R es un álgebra de Boole, respecto de la operación Δ es un grupo abeliano. (El lector que no conozca la definición de grupo abeliano puede verla más adelante: § 2, 5, def. 17.)

§ 2. PRODUCTO DE CONJUNTOS. APLICACION. FUNCION. RELACION

1. Producto de conjuntos.—Como podrá comprobar el lector, la operación de multiplicación de conjuntos es una operación básica de toda la matemática y constantemente nos vamos a referir a ella.

DEFINICIÓN 1.—Dados dos conjuntos A y B , se llama *producto de A por B* , y se representa por $A \times B$, al conjunto formado por todos los pares ordenados $\{(x, y)\}$, en donde el primer elemento de cada par pertenece a A y el segundo a B .

EJERCICIOS;

36. Escribir todos los elementos de $A \times B$, siendo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Idem de $B \times A$.

37. ¿Es $A \times B = B \times A$?

Diagrama del producto de dos conjuntos.—Empleando para los conjuntos la representación lineal se obtiene para el producto la representación cartesiana indicada en la figura 14.

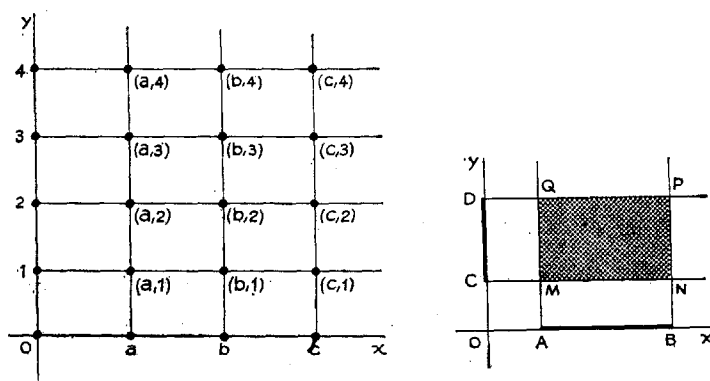


Fig. 14.

Ejemplos: 1. Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Representando A en el eje x y B en el eje y (fig. 14), los elementos del conjunto $A \times B$ vienen representados por los nudos de la red obtenida al trazar por los puntos que

representan elementos de A paralelas al eje y y por los puntos que representan elementos de B paralelas al eje x .

2. Si el conjunto A viene representado por todos los puntos del segmento AB y el conjunto B por todos los puntos del segmento CD (fig. 14), el conjunto $A \times B$ viene representado por todos los puntos del rectángulo $MNPQ$.

EJERCICIOS:

38. Sea $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, $B = \{1, 2, \dots, 5\}$, representan gráficamente A , B y $A \times B$. ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?

39. Si A tiene n elementos y B tiene m elementos, demostrar que $A \times B$ tiene mn elementos.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE CONJUNTOS.—I. $A' \subset A$, $B' \subset B$ implican que $A' \times B' \subset A \times B$.

II. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

III. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

IV. Si $M \subset A \times B$ y $(x, y) \in M$, se llama proyección de (x, y) sobre A al elemento x y proyección de (x, y) sobre B al elemento y , y se escribe:

$$\text{proy } (x, y) = x, \quad \text{proy}_B (x, y) = y.$$

Al conjunto de todas las proyecciones sobre A de los elementos de M se le llaman proyección de M sobre A . Análogamente se define la proyección de M sobre B , y se escribe:

$$\text{proy } M, \quad \text{proy}_B M.$$

Se verifica que:

$$(27) \quad \text{proy } M \subset A, \quad \text{proy}_B M \subset B.$$

Dados varios conjuntos: $A_1, \dots, A_n$, se llama producto $A_1 \times \dots \times A_n$ al conjunto de todos los conjuntos ordenados $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, en donde $x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n$. Convendremos en poner $(A \times B) \times C = A \times B \times C$, lo que equivale a admitir la ley asociativa en el producto de conjuntos.

EJERCICIOS:

40. Demostrar las propiedades I-IV.

41. Sea A el conjunto de diez alumnos de la clase, representados por los números $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ y sea B el conjunto de los números $\{0, 1, \dots, 10\}$. Representar gráficamente $A \times B$. Considerar el subconjunto, M , de $A \times B$ formado por los pares en que a cada alumno le corresponde su última puntuación en Matemáticas. ¿Qué significa $\text{proy}_B (3, 7)$?

2. Relaciones. Correspondencias. Transformaciones. Funciones.—

Sea G un subconjunto de $A \times B$:

$$(28) \quad G \subset A \times B.$$

DEFINICIÓN 16.—El subconjunto G define una *relación*, que designaremos por R , entre los conjuntos A y B del siguiente modo:

$$(29) \quad x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G,$$

en donde $x \in A$, $y \in B$, que se lee: x está relacionado con y en la relación R (*). El subconjunto G se llama *grafo* de la relación R .

El subconjunto G de $A \times B$ define también una *correspondencia*, *transformación* o *función* de A en B , que designaremos por f . Un elemento x de A y otro y de B se llaman *homólogos* en la *correspondencia* o *función* f cuando el par (x, y) pertenece a G . Si $x \in A$, al conjunto de todos los elementos homólogos de x en la correspondencia o función f se le llama *imagen* de x en f y se representa por $f(x)$. Al conjunto de todos los elementos homólogos del elemento y de B , se le llama *original* de y en la correspondencia o función f , y se representa por $o_r(y)$. Al conjunto A se le llama *conjunto inicial* de la correspondencia o función, al conjunto B *conjunto final* de la correspondencia o función, y se escribe:

$$\text{in}(f) = A, \quad \text{fin}(f) = B.$$

La correspondencia, transformación o función f *hace corresponder*, o *transforma*, cada elemento x del conjunto inicial A en una parte (que puede ser el conjunto vacío) de B , lo que se expresa del siguiente modo:

$$x \xrightarrow{f} f(x), \quad x \in A, \quad f(x) \in R(B),$$

siendo $R(B)$ el retículo de las partes de B . Se llama *grafo* de la correspondencia f , al subconjunto de $A \times R(B)$: $\{(x, f(x))\}_{x \in A}$. El mismo subconjunto G de $A \times B$ define otra correspondencia o transformación, g , que designaremos con el nombre de *recíproca* de la anterior, que *transforma*, o *hace corresponder* a cada elemento $y \in B$, la parte $g(y)$ de A formada por todos los homólogos de y en la correspondencia f . A la correspondencia recíproca, g , de f la representaremos también por f^{-1} . El *grafo* de la correspondencia recíproca, g , de la correspondencia f es el subconjunto $\{g(y), y\}_{y \in B}$ del producto $R(A) \times B$.

(*) Obsérvese que no es lo mismo decir que x e y están relacionados en la relación R

Se llama *conjunto original* de la correspondencia, función, o transformación f , y se representa por $\text{or } (f)$, al conjunto:

$$(30) \quad \text{or } (f) = \bigcup_{y \in B} \text{or } (y),$$

y *conjunto imagen* de f , y se representa por $\text{im. } (f)$ al conjunto:

$$(31) \quad \text{im } (f) = \bigcup_{x \in A} f(x).$$

Si g es la correspondencia recíproca de la correspondencia f , se verifica:

$$(32) \quad \text{im } (f) = \text{or } (g), \quad \text{or } (f) = \text{im } (g), \quad \text{in } (f) = \text{fin } (g), \quad \text{fin } (f) = \text{in } (g).$$

EXERCICIOS:

42. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, sea $f \subset A \times B$, definido por $f = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, c)\}$. Decir qué es: a) $\text{in } (f)$, b) $\text{fin } (f)$, c) $f(1)$, d) $f(2)$, e) $\text{im } (f)$, f) $\text{or } (f)$, g) $f^{-1}(a)$ siendo f^{-1} la correspondencia recíproca de f , h) $f^{-1}(c)$, i) $f^{-1}(d)$. ¿Se verifica que $1fc$?, ¿y que $2fc$?

43. Tómese una moneda, tírese nueve veces y fórmense los pares $g = \{(x, y)\}$, en donde x es el número ordinal de la tirada e y es un 1 cuando en la tirada ha salido cara y un cero cuando ha salido cruz. Sea $A = \{1, 2, \dots, 9\}$, $B = \{0, 1\}$. g define una función de A en B :

$$g: A \rightarrow B.$$

¿Cuántos elementos tiene $g(x)$, cualquiera que sea x ? ¿Qué conjunto es $g^{-1}(0) \cap g^{-1}(1)$? ¿Y $g^{-1}(0) \cup g^{-1}(1)$?

44. Sea A el conjunto formado por todos los alumnos de la clase. Se forma el subconjunto h de $A \times A$ del siguiente modo: Cada alumno escribe su propio nombre y, a continuación, el nombre de uno de sus amigos de la clase, pudiendo repetir esto como máximo tres veces. h es el conjunto de todos los pares de nombres así obtenido. La relación h así definida se llama relación de amistad. Obsérvese si se cumplen o no estas propiedades: a) xhx . b) Si se verifica xhy (que se leería x es amigo de y) ¿se verifica también yhx (e. e. y es amigo de x)? c) Si se verifica xhy e yhz ¿se verifica xhz ? ¿Cómo se lee esta última propiedad?

45. Se toma un vidrio homogéneo de dos o tres centímetros de grueso, se hace incidir sobre una de sus caras pulimentadas un haz luminoso monocromático y se miden el seno x del ángulo de incidencia y el seno y del ángulo de refracción. Se hace el experimento para varios ángulos de incidencia $x_1, \dots, x_n$, y se obtienen así los pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, que definen una función, r , entre $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $B = \{y_1, \dots, y_n\}$. ¿Cuántos elementos tiene $r(\tilde{x})$ para cualquier x ? ¿Cuántos tiene $r^{-1}(y)$ para cualquier y ?

46. Sea A el conjunto de todos los puntos de la recta x (fig. 15) y B el conjunto de todos los puntos de la recta y . Se puede tomar como imagen gráfica de $A \times B$ el cor

junto de todos los puntos del plano. Sea f el subconjunto de $A \times B$ representado por la mancha de la figura 15 A). ¿Qué conjuntos son: a) $f(p)$, b) $f(m)$, c) $f^{-1}(g')$, d) $f(0)$?

47. A , B y $A \times B$ tienen el mismo significado que en el ejercicio anterior, g es el subconjunto de $A \times B$ representado por la línea curva de la figura 15 B). Escribir $g(p)$, $g(a)$, $g^{-1}(n)$, $\text{in}(g)$, or (g) .

48. Sean A y B el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$. Sea f el subconjunto de $A \times B$ formado por todos los pares de números racionales (x, y) tales que $6 - 2x + 3y = 0$. Dibujar la gráfica de f . Calcular $f(0)$ y $f^{-1}(0)$. ¿Cuáles son $\text{im}(f)$ y $\text{or}(f)$? ¿Cuántos números hay en $f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{Q}$? ¿Cuántos hay en $f^{-1}(y)$?

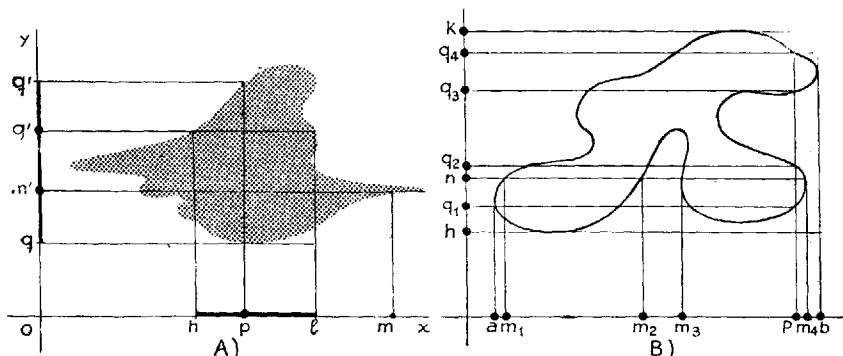


Fig. 15.

49. Sean A y B el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$. Sea f el subconjunto de $A \times B$ formado por todos los pares (x, y) tales que $y = |-6 + 2x|$. Gráfica de f . Hallar $f(5)$, $f(0)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(-1)$. Definir $\text{im}(f)$ y $\text{or}(f)$. ¿Cuántos elementos tienen $f(x)$ y $f^{-1}(y)$?

50. A y B tienen el mismo significado que en el ejercicio anterior, g es el subconjunto de $A \times B$ formado por todos los pares (x, y) tales que $y \geq |-6 + 2x|$. Representar g . Definir $g(2)$, $g(3)$, $g(10)$, $g^{-1}(0)$, $g^{-1}(1)$, $g^{-1}(6)$, $g^{-1}(10)$, $\text{in}(g)$, or (g) .

51. Si x es un número racional, se representa por $[x]$ al mayor número entero que es menor o igual a x . (Por ejemplo: $\left[\frac{4}{3}\right] = 1$, $\left[-\frac{4}{3}\right] = -2$, $[5] = 5$, $[-3] = -3$.)

Sean A y B iguales al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Sea F el subconjunto de $A \times B$ formado por todos los pares (x, y) tales que $y = [x]$. Representar gráficamente F . Escribir los elementos de los siguientes conjuntos: $F(1,7)$, $F\left(\frac{7}{5}\right)$, $F\left(-\frac{1}{3}\right)$, $F\left(\frac{1}{5}\right)$, $F^{-1}(4)$, $F^{-1}(-3)$, $F^{-1}(0)$, $F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Definir $\text{im}(F)$ y $\text{or}(F)$.

52. Tómense dos dados y anótese la suma de los números que se obtienen al arrojarlos. Repítase la operación 360 veces y anótese los números de veces que se ha obtenido la suma 2, la suma 3, ..., la suma 12. Sea $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}$, siendo $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sea Φ el subconjunto de $A \times B$ formado por todos los pares (x, y) , siendo y el número de veces que se ha obtenido como suma de los números de los dados x o un número inferior a x . Representar gráficamente Φ . Expresar $\Phi(3)$, $\Phi(3,7)$, $\Phi(12)$, $\Phi(1)$, $\Phi(13)$, $\Phi^{-1}(32)$, $\Phi^{-1}(25)$, or (Φ) , $\text{im}(\Phi)$.

53. Sea $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$ y sea L el subconjunto de $A \times B$ formado por todos los pares (x, Lx) , siendo Lx el logaritmo decimal de x que figura en una determinada tabla y x uno de los siguientes números $\{1, 2, 5, 10, 20, 30, \dots, 190, 200\}$. Representar gráficamente L . ¿Qué son $\text{or}(L)$ e $\text{im}(L)$?

54. Divídase una cuartilla en 16 trozos y numérense los trozos, a los cinco primeros se les colorea de rojo, a los cuatro siguientes de azul, a los tres siguientes de verde, a los dos siguientes de negro y a los dos últimos se les deja blancos. Sean A y B iguales ambos al conjunto de los 16 primeros números naturales: $A = B = \{1, \dots, 16\}$. Entre A y B se define una relación R del siguiente modo: $x R y$ equivale a decir que los papeles numerados con los números x e y tienen el mismo color. Representar gráficamente la relación R . Comprobar que R posee las tres propiedades siguientes: I. $x R x$, $\forall x \in A$. II. $x R y$ implica $y R x$. III. $x R y$ e $y R z$ implican $x R z$. ¿Cómo afectan las propiedades I y II a la gráfica de R ?

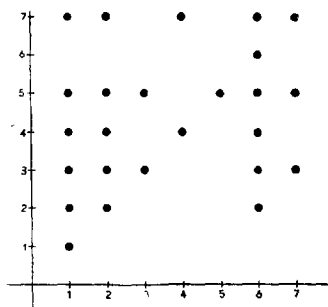


Fig. 16

55. Sea R la relación representada por la gráfica 16. Comprobar que se verifican las siguientes propiedades: I. $x R x$. II. $x R y$ e $y R x$ implican $x = y$. III. $x R y$ e $y R z$ implican $x R z$.

DEFINICIÓN 17.—A una correspondencia f de A en B , tal que $f(x)$ conste de un único elemento, o sea el conjunto vacío, para todo $x \in A$, se le llama una *correspondencia unívoca de A en B* . En tal caso, en lugar de poner $f(x) = \{y\}$ se escribe $f(x) = y$. A la función correspondiente a una correspondencia unívoca se le llama *función uniforme*. Si $\text{or}(f) = \text{in}(f)$, la función uniforme se llama *aplicación*. Si además $\text{im}(f) = B$, la correspondencia se llama *suprayectiva*, y la función se llama *aplicación de A sobre B o suprayección*. Una correspondencia unívoca de A en B tal que todo elemento de B sea imagen de un elemento de A como máximo, esto es, tal que, para todo elemento y de B , se verifique que $\text{or}(y)$ es un único elemento o el conjunto vacío, se dice que es una *correspondencia biunívoca de A en B* ; a la aplicación correspondiente se le llama *aplicación inyectiva o inyección*. Si f es una correspondencia biunívoca de A en B y además es una correspondencia suprayectiva, se dice que f es una *correspondencia biunívoca de A sobre B* ; a la función correspondiente a este caso se le llama *aplicación biyectiva o biyección*. Por consiguiente, una aplicación biyectiva o biyección es una inyección que al propio tiempo es suprayección. Si f es una biyección, la correspondencia recíproca es una aplicación suprayectiva que representaremos por f^{-1} , y llamaremos *aplicación inversa de f* . Se pondrá $f^{-1}(y) = x$, en lugar de $f^{-1}(y) = \{x\}$. Se verifica que $f^{-1}f$ es la aplicación idéntica de A sobre A y ff^{-1} es la aplicación idéntica de B sobre B .

Emplearemos constantemente los siguientes criterios:

I. La condición necesaria y suficiente para que $A \xrightarrow{f} B$ sea una aplicación o función uniforme, es que: 1) Para todo $x \in A$, $f(x) \neq \emptyset$. 2) De $y \in f(x)$, $z \in f(x)$ se deduce que $y = z$.

II. La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $A \xrightarrow{f} B$ sea suprayectiva es que para todo y perteneciente a B , exista un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

III. La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $A \xrightarrow{f} B$ sea inyectiva es que de $f(x) = f(y)$ se deduzca que $x = y$.

IV. La condición necesaria y suficiente para que $A \xrightarrow{f} B$ sea una biyección es que f sea una aplicación inyectiva y suprayectiva.

EJERCICIOS:

56. Decir si las siguientes correspondencias son univocas, suprayectivas, biunivocas en, o biunivocas sobre: a) La correspondencia del ej. 42. b) La correspondencia del ej. 43. c) La correspondencia del ej. 44. d) La correspondencia del ej. 45. e) La correspondencia del ej. 46. f) La correspondencia del ej. 47. g) La correspondencia del ej. 48. h) La correspondencia del ej. 49. i) La correspondencia del ej. 50. j) La correspondencia del ej. 51. k) La correspondencia del ej. 52. l) La correspondencia del ej. 53. m) La correspondencia del ej. 54. n) La correspondencia del ej. 55.

57. Decir si son aplicaciones, inyecciones o biyecciones las siguientes funciones: a) $A = B = \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$, como siempre, es el conjunto de los números racionales), $f = \{(x, x^2 - 5x + 6)\}$, b) $A = B = \mathbb{N}$, $g = \{(x, 2^x)\}$, c) $A = B = \mathbb{Q}$, $h = \left\{ \left(x, \frac{2x+1}{x-3} \right) \right\}$.

NOTACIÓN.—Si $A \xrightarrow{f} B$ es una aplicación de A en B , a un elemento arbitrario de $A = \text{or}(f)$ se le representa por una letra, por ejemplo x , que se llama *variable independiente*. Al elemento correspondiente a x se le representa por otra letra, por ejemplo y , que se llama *variable dependiente* o *función*, y se escribe

$$y = f(x).$$

Por consiguiente, x representa un elemento de A y $f(x)$ un elemento de $\text{im}(f) \subset B$. Al conjunto $A = \text{or}(f)$ se le llama también *campo de variabilidad de la variable independiente*. Al conjunto $\text{im}(f)$ se le llama *campo de variabilidad de la función*.

Para definir una aplicación f no basta con dar la operación que es preciso realizar para pasar de un elemento de $\text{or}(f)$ al elemento de $\text{im}(f)$, sino que es preciso definir $\text{or}(f)$ y $\text{im}(f)$.

EJERCICIOS:

58. ¿Está definida la función $y = 2x + 1$? Completar de varios modos la definición de esta función.

59. ¿Existe la función $f(x)$ tal que $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) \in \mathbb{Q}$ y $x^2 + [f(x)]^2 + 1 = 0$?

60. ¿Existe la función $f(x)$ tal que $\text{or}(f) = \mathbb{N}$, siendo $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $28x + 45f(x) = 11$, siendo $\text{fin}(f) = \mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros?

61. ¿Existe la función $g(x)$ tal que $\text{or}(g) = \mathbb{Z}$, $\text{fin}(g) = \mathbb{N}$, estando ligados x y $g(x)$ por la ecuación del ejercicio anterior?

DEFINICIÓN 18.—El paso de la variable independiente a la variable dependiente puede realizarse de varias formas, con lo que resultan distintos tipos de funciones. Una función se llama *experimental* cuando para pasar de la variable independiente a la variable dependiente es preciso realizar un experimento. Una función se llama *matemática* cuando para pasar de la variable independiente a la dependiente basta realizar procesos matemáticos. Una función se llama *tabulada* cuando para pasar de la variable independiente a la dependiente basta con mirar unas tablas.

Las ciencias experimentales persiguen pasar de las funciones experimentales a las funciones matemáticas; cuando consiguen esto dicen que han descubierto una ley natural. Obsérvese que cuando se es capaz de encontrar una función matemática igual a una función experimental, se pueden hacer predicciones respecto del fenómeno a que se refiere la función experimental. Aparece aquí el concepto de igualdad de dos funciones, que, juntamente con la igualdad de conjuntos, son los dos conceptos básicos de toda la matemática.

DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE FUNCIONES.—Diremos que las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son iguales sobre el conjunto C cuando: 1.º El conjunto C está contenido en los conjuntos originales de las dos funciones. 2.º Para todo elemento x que pertenezca al conjunto C se verifica que $f(x) = g(x)$. Si los conjuntos originales de las dos funciones son iguales diremos que las funciones son *estrictamente iguales*.

EJERCICIOS:

62. Aplicar la definición 18 a las funciones de los ejercicios 53, 52, 51, 50, 60.

63. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Cada número racional se puede considerar como una aplicación de un subconjunto de $\mathbb{Z}$ en otro subconjunto de $\mathbb{Z}$ del siguiente modo: sea $\frac{a}{b}$ una fracción, sean (a) y (b) los conjuntos formados por todos los múltiplos de a y de b , respectivamente. $\frac{a}{b}$ define una aplicación

de (b) en (a) del siguiente modo: $\frac{a}{b}(mb) = ma$, siendo m un número entero. Demostrar que si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales (e. e. corresponden al mismo número racional) se verifica que las funciones correspondientes son iguales en un cierto conjunto. Determinar este conjunto.

DEFINICIÓN 19.—Atendiendo a los conjuntos $\text{in}(f)$ y $\text{fin}(f)$ las funciones se clasifican en diversas clases, entre las que las más importantes son las siguientes: *Funciones de variable natural* son las que tienen $\text{in}(f) = \mathbb{N}$, siendo $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales. *Funciones de variable entera* son aquéllas para las que $\text{in}(f) = \mathbb{Z}$, siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. *Funciones de variable real* son aquéllas para las que $\text{in}(f) = \mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. *Funciones de variable compleja* son aquéllas para las que $\text{in}(f) = \mathbb{C}$, siendo $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. *Funciones enteras* son aquéllas para las que $\text{fin}(f) = \mathbb{Z}$. *Funciones reales* son aquéllas para los $\text{fin}(f) = \mathbb{R}$. *Funciones complejas* son aquéllas para las que $\text{fin}(f) = \mathbb{C}$.

3. Relación de igualdad. Clasificación. Conjunto cociente.—Según la definición 16, definir una relación entre dos conjuntos es definir un subconjunto del producto de aquéllos. Vamos a estudiar un tipo muy particular de relaciones entre un conjunto y él mismo.

DEFINICIÓN 20.—Sea R un subconjunto en $A \times A$, representaremos por la misma letra la relación definida por él. La relación R se llama *relación de igualdad* cuando verifican los siguientes postulados:

- I. Para todo elemento x de A se verifica $x R x$.
- II. $x R y$ implica $y R x$.
- III. $x R y$ y $y R z$ implican $x R z$.

Dos elementos x, y relacionados mediante una relación de igualdad R se llaman *iguales respecto de R* . Generalmente se dice simplemente que son *iguales*, dejando sobreentendida la relación respecto de la que son iguales. Sobre un mismo conjunto se pueden definir, en general, varias relaciones de igualdad. Para representar las relaciones de igualdad se emplea el signo $=$, pero pueden emplearse otros signos: a veces se emplea el $\equiv$ o el $\approx$.

EJERCICIOS:

64. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Sea R el subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formado por aquellos pares de números naturales que, escritos en el sistema decimal, tienen iguales las últimas cifras. Sea R la relación definida por R . Probar que R es una relación de igualdad.

65. Sea $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En A se define la relación R del siguiente modo: $(x, y) R (x', y')$ equivale a $x + y' = y + x'$. Demostrar que R es una relación de igualdad.

66. A es el conjunto de todos los segmentos del espacio euclídeo ordinario. El segmento a está relacionado en R con el segmento b cuando existe un movimiento en el espacio que transforma a en b . Demostrar que R es una relación de igualdad.

67. Sea A el conjunto de todos los triángulos del plano. Si T y T' son dos triángulos, se escribe $T R T'$ cuando T es semejante a T' . Demostrar que R es una relación de igualdad.

68. Se escribe $a R b$, siendo a y b dos números, cuando existe otro número m , distinto de cero, tal que $a = m b$. Decir si R es relación de igualdad: a) Cuando todos los números, a, b, m , son enteros. b) Cuando todos los números son racionales.

Sea R una relación de igualdad definida en el conjunto A . Consideraremos el subconjunto de $\mathbf{R}(A)$ formado por todas las partes $C(x)$ de A , en donde $C(x)$ es la parte formada por todos los elementos y de A tales que $x R y$. A este conjunto de partes de A lo representaremos por $\{C(x)\}_{x \in A}$.

El conjunto $\{C(x)\}_{x \in A}$ de partes de A posee las dos propiedades fundamentales siguientes:

$$\text{I. } \bigcup_{x \in A} C(x) = A.$$

$$\text{II. } C(x) \cap C(y) = \emptyset, \text{ o bien } C(x) = C(y).$$

DEMOSTRACIÓN.—I. Como todos los conjuntos $C(x)$ son partes de A su unión es también parte de A , esto es $\bigcup_{x \in A} C(x) \subset A$. Recíprocamente, si

$$z \in A, \text{ se verifica que } z \in C(z) \subset \bigcup_{x \in A} C(x), \text{ luego } A \subset \bigcup_{x \in A} C(x).$$

II. Si $z \in C(x) \cap C(y)$, será $x R z$, $y R z$, de donde $x R z$, $z R y$ y $x R y$, luego $x \in C(y)$ e $y \in C(x)$. Si $t \in C(x)$, será $x R t$ y como $x R y$, será $y R t$, luego $t \in C(y)$. Por consiguiente, $C(x) \subset C(y)$. Recíprocamente, si $u \in C(y)$, será $y R u$, y como $y R x$, será $x R u$, luego $u \in C(x)$ y, por tanto, $C(y) \subset C(x)$, luego $C(x) = C(y)$.

DEFINICIÓN 21.—Un conjunto $\{C_i\}_{i=1}$ de partes de un conjunto A se llama una *clasificación* o una *partición* del conjunto A cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

$$\text{I. } \bigcup_{i \in I} C_i = A.$$

$$\text{II. } C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Los subconjuntos C_i se llaman entonces *clases* de A .

En virtud de esta definición se puede enunciar el resultado anterior del siguiente modo:

Toda relación de igualdad R en un conjunto A produce en A una clasificación, cada clase está formada por todos los elementos de A que son iguales entre sí en la relación R .

Esta proposición posee una recíproca:

Toda clasificación $\{C_i\}_{i \in I}$ de un conjunto A define una relación de igualdad, R , en A cuya clasificación correspondiente es $\{C_i\}_{i \in I}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea R la relación definida en A del siguiente modo: $x R y$ es equivalente a decir que existe una clase C_i que contiene a los dos elementos x e y , esto es:

$$x R y \quad \text{es equivalente a:} \quad x \in C_j, y \in C_j, C_j \in \{C_i\}_{i \in I}.$$

a) *La relación R es una relación de igualdad.*—En efecto: I) Todo elemento pertenece a la misma clase que él mismo y existe tal clase en virtud de la condición I de la def. 21. II) La definición de R es simétrica. III) Si $x R y$ y $y R z$, se verifica que $x \in C_j, y \in C_j, y \in C_k, z \in C_k$. Ahora bien, por la condición II de la def. 21, de $y \in C_j, y \in C_k$ se deduce $j = k$, luego $x \in C_j, z \in C_j$, y $x R z$.

b) *La clasificación definida por R es la clasificación dada.*—Sea $C(x)$ la clase formada por todos los elementos y tales que $x R y$, y sea C_j la clase de $\{C_i\}_{i \in I}$, que contiene a x . Si $z \in C(x)$ será $x R z$, de donde $x \in C_k, z \in C_k$, y como $x \in C_j$, por la condición II de la def. 21, será $j = k$, luego $z \in C_j$. Por consiguiente, $C(x) \subset C_j$. Recíprocamente, si $z \in C_j$, como $x \in C_j$, será $x R z$, luego $z \in C(x)$, lo que implica, por ser z arbitrario, que $C_j \subset C(x)$. Por consiguiente, $C(x) = C_j$, luego las clases $C(x)$ coinciden con las clases C_i .

EJERCICIOS:

69. A es un conjunto de bolas de colores: rojo, azul, blanco, verde, naranja. a) En A se define la relación R del siguiente modo: si x e y son dos bolas se escribe $x R y$ cuando x e y tienen el mismo color. Comprobar que R es una relación de igualdad. ¿Qué clasificación produce R en A ? ¿Cuántas clases tiene la clasificación? b) Se consideran las partes R, A, B, V, N , de A formadas por las bolas de colores rojo, azul, blanco, verde y naranja, respectivamente. ¿Es $\{R, A, B, V, N\}$ una clasificación de A ? ¿Qué relación de igualdad define esta clasificación? c) Se numeran correlativamente, a partir del uno, las bolas de cada una de las clases A, R, B, V, N y se consideran los subconjuntos C_i formados por todas las bolas que tienen el mismo número i . ¿Es $\{C_i\}_{i \in I}$ una clasificación? ¿Cuál es la relación de igualdad correspondiente?

70. ¿Cuántas clases existen en la relación de igualdad del ejercicio 68 b)?

71. ¿Es una clasificación del conjunto de los números naturales la formada por los subconjuntos P e I de los números pares e impares? ¿Qué relación de igualdad corresponde a esta clasificación?

72. Sea Q el conjunto de los números racionales. Sea C_n , $n \in \mathbb{Z}$, siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, el conjunto de todos los números racionales x tales que: a) $n \leq x < n+1$. b) $n < x \leq n+1$. c) $n \leq x \leq n+1$. ¿Es el conjunto $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de partes de Q una clasificación de Q ? Cuando así sea, ¿cuál es la relación de igualdad correspondiente?

73. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los polígonos. Sea C_i la parte de $\mathcal{P}$ formada por todos los polígonos cuya área es igual a i . ¿Es el conjunto $\{C_i\}_{i \in \mathbb{R}^+}$, siendo $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos una clasificación de $\mathcal{P}$? ¿Cuál es la relación de igualdad correspondiente?

De la definición 21 se deduce inmediatamente que:

En una clasificación $\{C_i\}_{i \in I}$ de un conjunto A cada clase C_i está unívocamente determinada por cualquiera de sus elementos. En virtud de esta propiedad, a cada elemento de una clase se le llama un representante de la misma.

Emplearemos muchas veces el siguiente:

CRITERIO DE IGUALDAD DE CLASES.—La condición necesaria y suficiente para que dos clases de una clasificación sean iguales es que posean un elemento común. Cuando la clasificación viene definida por una relación de igualdad R , se puede enunciar este criterio del siguiente modo: Si x e y son representantes de las clases $C(x)$ y $C(y)$, respectivamente, definidas por la relación de igualdad R , se verifica que:

$$(1) \quad C(x) = C(y) \quad \text{es equivalente a} \quad x R y.$$

EJERCICIO:

74. Si R es la relación del ejercicio 69 a) y si x e y son dos bolas de A , comprobar la proposición (1).

DEFINICIÓN 22.—De todo lo anterior resulta que toda relación de igualdad, R , definida en un conjunto A , define un subconjunto en el álgebra $\mathbf{R}(A)$ de las partes de A , formado por todas las clases correspondientes a la clasificación, a este subconjunto de $\mathbf{R}(A)$ formado por todas las clases de clasificación se le llama conjunto cociente de A respecto de la relación de igualdad R , y se representa por A/R .

EJERCICIOS:

75. ¿Qué diferencia existe entre clasificación y conjunto cociente?

76. A es un conjunto de bolas. Se meten todas las bolas de A en bolsas. Las siguientes expresiones ¿qué indican?: a) El conjunto de las bolsas de bolas. b) El conjunto de bolsas.

NOTACIÓN.—Como una clase de una clasificación queda definida por uno cualquiera de sus elementos, para representar a la clase que contiene al elemento x , en la clasificación producida por la relación de igualdad R , emplearemos las siguientes notaciones: xR , $x + R$, $\bar{x}$. Para representar a los elementos del conjunto cociente se emplea la misma notación; por consiguiente, xR lo interpretamos tanto como conjunto de elementos de A como elemento de $R(A)$.

EJERCICIOS:

77. En algunos casos sería fácil emplear nombres distintos para las clases y para los elementos del conjunto cociente. Pónganse nombres distintos en el siguiente: A es un conjunto de cajas de colores. Se atan, formando un paquete, las cajas del mismo color. Nombrar las clases y los elementos del conjunto cociente con nombres distintos.

78. Sea A el conjunto de todos los polinomios en una única indeterminada x . Si p y q son dos polinomios, se escribe pRq cuando p y q tienen el mismo grado. Probar que R es una relación de igualdad y ver que cada elemento de A/R se puede representar por un número natural de modo único y que a cada número natural le corresponda un elemento de A/R .

4. Aplicaciones o funciones uniformes.—Recuérdese (def. 17) que se ha llamado aplicación a una función (in $f =$ or f) tal que $y \in f(x)$, $z \in f(x)$ implican $y = z$. Definida una relación de igualdad R en un conjunto A se puede definir de un modo natural una aplicación n de A sobre A/R llamado *epimorfismo natural* del siguiente modo: a cada elemento de A se le hace corresponder la clase que lo contiene:

$$n: x \rightarrow xR, \quad \text{para todo } x \in A.$$

Evidentemente, se verifica que $or(n) = A$ y que de $y \in n(x)$, $z \in n(x)$, resulta que $y = xR$, $z = xR$, y como x pertenece a una clase única, será $y = z$, luego es una aplicación. Si z es un elemento de A/R y x es un elemento de A perteneciente a z , será $z = xR$, luego $z = n(x)$.

EJERCICIOS:

79. A es un conjunto de bolas, R es la clasificación que resulta de meter las bolas en bolsas. ¿Cuál es el epimorfismo natural?

80. Sea A el conjunto de habitantes de una localidad. Se define xRy , siendo x e y dos vecinos de A , cuando x e y habitan en la misma casa. A/R y el conjunto B de las casas de la localidad (suponiendo que todos los habitantes tengan casa) son dos conjuntos biyectivos.

Sea

$$(1) \quad f: A \rightarrow B$$

una aplicación de A en B .

La aplicación f produce una clasificación en A mediante la siguiente definición: x e y pertenecen a la misma clase es equivalente a $f(x) = f(y)$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $C(x)$ el subconjunto de A que contiene a x . Esto significa que $y \in C(x)$ es equivalente a $f(y) = f(x)$. Evidentemente es $\bigcup_{x \in A} C(x) = A$.

Si $C(x)$ y $C(y)$ tienen un elemento común, z , será $f(x) = f(z)$ y $f(y) = f(z)$, luego $f(x) = f(y)$. Si $t \in C(x)$, de $f(t) = f(x)$, resulta $f(t) = f(y)$, luego $t \in C(y)$ y $C(x) \subset C(y)$. Análogamente se ve que $C(y) \subset C(x)$, luego si $C(x)$ y $C(y)$ tienen un elemento común coinciden.

NOTACIÓN.—Al conjunto cociente de A respecto de la clasificación producida por f lo representaremos por A/f .

DEFINICIÓN 23.—Dadas las aplicaciones:

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{y} \quad B \xrightarrow{g} C.$$

tales que $\text{fin}(f) = \text{or}(g) = B$, se llama *producto de f por g* , y se representa por gf , a la correspondencia entre A y C definida del siguiente modo:

$$(2) \quad gf(x) = g(f(x)).$$

EJERCICIOS:

81. Comprobar que las funciones $f: y = 4x + 5$ y $g: y = x^2$ son aplicaciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, siendo $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Hallar las ecuaciones de los productos gf y fg .

82. Dadas las aplicaciones f y g , de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, definidas por las siguientes ecuaciones: $y = \frac{3x+5}{2x-1}$, $y = 4x^3 - 7x + 1$, escribir las ecuaciones de gf y de fg .

83. Dadas las gráficas de las aplicaciones f y g , dibujar la gráfica de gf .

84. Sean $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, las siguientes aplicaciones:

$$f(x, y) = (x - y)^2 + 2x, \quad g(x) = \left(x^3 - 1, \frac{x+2}{x-1} \right). \quad \text{Calcular } gf \text{ y } fg.$$

85. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo real y sea $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definidas por $f(x, y) = x^2 - 4y$, $g(x) = \text{sen } x$. Calcular gf .

86. Sea $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, siendo $f(x) = (x^3, -3x, 2)$, $g(y, z, t) = y + z + t$, $h(u) = \cos(u)$, calcular: $h(gf)$, $f(hg)$, $g(fh)$.

87. Descomponer en producto de dos factores las siguientes aplicaciones: a) $y = (2x + 1)^3$. b) $y = x^2 + x^3$. c) $y = \sin 3x$. d) $y = \log \sin x$. e) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. f) $y = \log (x + 3)$. g) $y = 2^{2x+1}$. h) $y = \cos x + \sin x$.

88. Descomponer en producto de tres factores las siguientes funciones: a) $y = (2x + 1)^3$. b) $y = (\sin x + \cos x) x^3$. c) $y = \frac{x^3}{\sin x + 2x}$. d) $y = \sin (x^2 + 3x + 1)$. e) $y = 2^{\sin (x^2 + 2x)}$. f) $y = x^2 \cos x + 2^x \log x + x \sin x$. g) $y = \sin (x^3 + 1) \cos (2x + 1) \sqrt{x}$. h) $y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{3x + 2}}$.

89. Descomponer en producto de cuatro factores las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{3x + 2}} \quad \text{b) } y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad \text{c) } y = 2^{\sin \sqrt{\cos x}}$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{x + \frac{1}{\log x + \sqrt{x}}} \quad \text{e) } y = \sqrt[3]{x^3 + \sin x \cdot \cos \sqrt{x}}$$

$$\text{f) } y = \sin (x + \log \cos x) \quad \text{g) } y = \operatorname{tg} (\sin (x^2 + 1) \cos (x^3 + 2x)).$$

$$\text{h) } y = \log (\sin x \cdot \cos x + 3^x \log x).$$

90. Llamaremos *descomposición canónica* de una función a una descomposición en producto tal que en cada factor no se realice más de una operación con una misma variable. Hallar las descomposiciones canónicas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{3x + 2}} \quad \text{b) } y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$\text{c) } y = \sqrt[3]{x^3 + \sin x \cos \sqrt{x}} \quad \text{d) } y = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x - 1}}{\sin \frac{x - 1}{x^2 + 2x}}$$

$$\text{e) } y = \operatorname{tg} \left(\sin \frac{1}{x^2 + 1} + 2^{\cos x^2} \right) \quad \text{f) } y = \frac{\log (x^3 + 2) - \sin (2x + 1) \cdot \cos (2x - 1)}{3^{\sqrt{\sin (x^2 + 2x)}} + \operatorname{tg} \frac{x - 1}{x + 1}}$$

$$\text{g) } \sqrt{\frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{\frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3}}}}}.$$

91. Hallar las descomposiciones canónicas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = (x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4)^n.$$

$$\text{b) } y = \frac{\sin (x_1 + x_2) - \log \frac{x_1}{x_3}}{\cos x_4 x_5 - 2^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}}.$$

$$c) \quad y = \sqrt[n]{\log(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_3) \cos(x_2 - x_4)}$$

$$d) \quad y = \frac{\frac{x_1}{x_2 + x_3} - 2^{x_1 + x_4} \cdot \cos(x_2 - x_3)}{\sqrt{\operatorname{tg}(x_1 - x_3) \frac{1 + x_2}{x_3 + x_4}}}$$

92. Hallar las descomposiciones de las siguientes funciones:

$$a) \quad y = \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3}} + \sin x_1 \cdot \log x_2, \quad \frac{x_1}{\log(x_1 + x_3)} - \cos x_1 \sin(x_1 - 2x_2) \right)$$

$$b) \quad y = \left(x_1(1 - x_2^2 + x_1), \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_2 + \sin(x_1 + x_3)}}, \quad 2^{\sqrt{x_1 + 3x_2^3}} \right)$$

$$c) \quad y = \left(\sqrt{\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1 - x_2}} \right. \\ \left. + \sqrt{x_1 + x_3} \sin(x_1 - x_2), \quad (2x_1 + x_2^2)^3 \cos(x_2^3 - 1) \operatorname{tg}(x_3 - 4x_1) \right).$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE APLICACIONES.

I. *La multiplicación de aplicaciones es asociativa.*—Esto significa que si f, g, h son aplicaciones tales que f es multiplicable por g y ésta por h , se verifica:

$$h(gf) = (hg)f,$$

en donde la igualdad es estricta. En efecto, basta observar que, para todo x perteneciente al conjunto inicial de f se verifica que

$$[h(gf)]x = h[(gf)x] = h[g(fx)]$$

y

$$[(hg)f]x = (hg)(fx) = h[g(fx)].$$

Ya se ha visto en los ejercicios anteriores que la multiplicación de aplicaciones no es conmutativa. De la definición se deduce que la multiplicación no siempre está definida, siendo necesario y suficiente para ello que el final del primer factor coincida con el inicial del segundo.

II. *A toda aplicación f se le pueden asignar dos aplicaciones, llamadas unidades por la derecha y por la izquierda, y que representaremos por u_d y u_i , respectivamente, tales que $f u_d = f$, $u_i f = f$.*—En efecto, u_d es la aplicación tal que si $x \in \operatorname{in}(f)$ se verifica $u_d(x) = x$. Análogamente, u_i es la aplicación

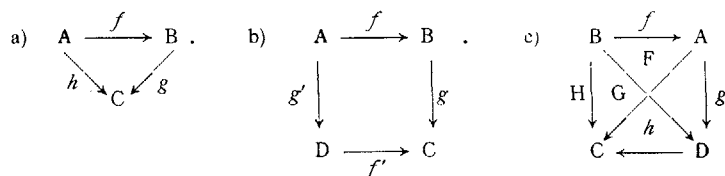
tal que si x es un elemento arbitrario de $\text{fin}(f)$ se verifica $u_i(x) = x$. Por consiguiente, $\text{in}(u_d) = \text{fin}(u_d) = \text{in}(f)$, $\text{in}(u_i) = \text{fin}(u_i) = \text{fin}(f)$.

DEFINICIÓN 24.—Dado un conjunto C , a cuyos elementos se les llama *objetos*, y otro conjunto $\text{Hom}(C)$, a cuyos elementos se les llama *morfismos*, tales que: 1) Dado un elemento cualquiera, $f \in \text{Hom}(C)$, quedan determinados unívocamente por él un par ordenado (A, B) de objetos de C , llamados objeto inicial y objeto final de f , respectivamente. 2) Cuando está definido el producto de morfismos éste es asociativo. 3) A todo morfismo f le corresponde una unidad por la derecha y otra por la izquierda tales que $f u_d = f$, $u_i f = f$. Al par formado por el conjunto C , de objetos, y conjunto $\text{Hom}(C)$, de morfismos, con las condiciones anteriores, se le llama una *categoría*.

En virtud de esta definición y de lo que acabamos de ver, resulta:

Si C es un conjunto de conjuntos y $\text{Hom}(C)$ es el conjunto de todas las aplicaciones entre los conjuntos de C , el par $(C, \text{Hom}(C))$ es una categoría.

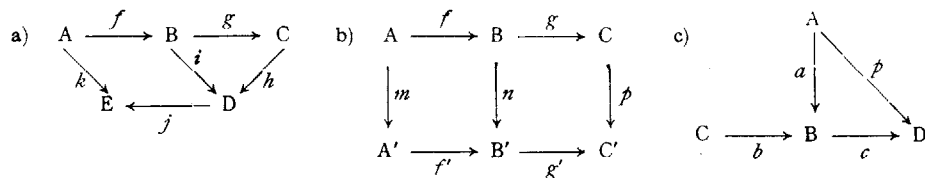
NOTACIÓN.—Para representar productos de aplicaciones son cómodos algunas veces los siguientes diagramas:



Decir que el esquema a) es *conmutativo* significa que da lo mismo pasar de A a C por la derecha que por la izquierda. Lo que equivale a escribir: $h = g f$. Decir que b) es *conmutativo* equivale a escribir la igualdad estricta entre aplicaciones: $g f = f' g'$. Decir que todos los diagramas de c) son conmutativos equivale a establecer las siguientes igualdades: $F = g f$; $H = h F$, $G = h g$, $H = G f$ y, como consecuencia, la propiedad asociativa. Los diagramas varían de un caso a otro, pero generalmente sirven para aclarar las ideas sobre las relaciones entre conjuntos y aplicaciones.

EJERCICIO:

93. Escribir las igualdades correspondientes a los siguientes diagramas conmutativos:



DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UNA APLICACIÓN.—Sea

$$(3) \quad A \xrightarrow{f} B$$

una aplicación. Sea n el epimorfismo natural:

$$(4) \quad A \xrightarrow{n} A/f.$$

Consideremos la correspondencia φ entre A/f e $\text{im}(f)$ definida del siguiente modo.

$$(5) \quad \varphi(xf) = f(x),$$

en donde representamos por xf a la clase que contiene a x . La función φ es biunívoca sobre, o biyección. Evidentemente que $\text{or}(\varphi) = A/f$. Sea $xf = yf$, esto significa que $f(x) = f(y)$, y $\varphi(xf) = \varphi(yf)$, luego φ es una aplicación. Es una inyección. En efecto, sea $\varphi(xf) = \varphi(yf)$, esto significa que $f(x) = f(y)$, y $xf = yf$, luego se trata de una inyección. φ es sobre. En efecto, si $y \in \text{im}(f)$ será $y = f(x)$, para $x \in A$, luego $\varphi(xf) = f(x) = y$.

Finalmente, se puede definir una aplicación i de $\text{im}(f)$ en B del siguiente modo: si $x \in \text{im}(f)$, $i(x) = x$. Esta correspondencia i es, evidentemente, una inyección, que llamaremos *inmersión*. Por consiguiente, hemos obtenido el siguiente diagrama conmutativo:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{n} & A/f \\ f \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B & \xleftarrow{i} & \text{im}(f) \end{array}$$

en donde n es el epimorfismo natural, i es la inmersión y φ es una biyección.

EJERCICIOS:

94. Sea A un conjunto de bolas de color rojo, azul, blanco, verde y negro. Sea B el conjunto de los cinco colores {rojo, azul, blanco, verde, negro}. Sea f la función que transforma cada bola en su color. Evidentemente que f es una aplicación de A sobre B , o epimorfismo. Hallar la descomposición canónica de f .

95. Hallar la descomposición canónica de la función $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida del siguiente modo: $f(x) = [x]$, en donde $[x]$ = máximo número entero $\leq x$.

5. Relaciones de orden. Orden total. Buena ordenación. Lema de Zorn.—Una relación R definida en un conjunto C es un subconjunto

to R de $C \times C$. Vamos a estudiar ahora otro tipo particular de relación, llamada ordenación.

DEFINICIÓN 25.—Una relación R definida en un conjunto C se llama una relación de *orden parcial*, o simplemente, una relación de *orden*, cuando se verifican las tres propiedades siguientes:

- I. Para todo x de C se verifica $x R x$.
- II. Las relaciones $x R y$ e $y R x$ implican $x = y$.
- III. Las relaciones $x R y$ e $y R z$ implican $x R z$.

De las tres propiedades anteriores, las fundamentales son la primera y la tercera. Una relación que verifica sólo las propiedades I y III se llama una relación de *preorden*.

EJERCICIOS:

96. Sea C el conjunto de todas las clasificaciones de un conjunto A . En el conjunto C se puede definir una relación del siguiente modo: $P R P'$ significa que toda clase de la clasificación P está contenida en una única clase de la partición P' . Probar que R es una relación de orden.

97. Sea $R(A)$ el conjunto de todas las partes de A , probar que la relación de inclusión es una relación de orden de $R(A)$.

98. Sea N el conjunto de los números naturales. Se define en N la relación R del siguiente modo: $x R y$ es equivalente a $y = x + m$, siendo m un número natural, o bien $y = x$. Probar que R es una relación de orden.

99. Dar una definición análoga a la del ejercicio anterior para definir una relación de orden en Z y en Q .

100*. Demostrar que toda relación de preorden define, en un cierto conjunto cociente del conjunto dado, una relación de orden.

NOTACIÓN.—La relación de orden se acostumbra a representar por el signo $\leq$.

Si el elemento a está relacionado con el b mediante la relación de ordenación $\leq$, esto es, si $a \leq b$, se dice que, en la ordenación $\leq$, a *precede* a b , o que b *sigue* a a , o bien, que a es *menor* o *igual* a b , o que b es *mayor* o *igual* a a . Si se verifican las dos relaciones: $a \leq b$ y $a \neq b$, se escribe $a < b$ y se dicen que a *precede estrictamente* a b , o que b *sigue estrictamente* a a , o bien, que a es *menor que* b o que b es *mayor que* a .

(*) Los ejercicios señalados con asterisco van destinados a alumnos aventajados.

Si $\leq$ es una relación de orden definida en el conjunto C , y si C' es un subconjunto de C , se puede definir en C' una relación de ordenación, $\leq'$, del siguiente modo: si a y $b \in C'$, se escribe $a \leq' b$ si, y sólo si, es $a \leq b$ en C . La relación $\leq'$ se llama subordinada por la relación $\leq$, y se acostumbra a representar por el mismo signo.

EJERCICIO:

101. Probar que la relación de ordenación en Z del ejercicio 99 es subordinada de la relación de orden en Q en el mismo ejercicio y que la relación de orden en N del ejercicio 98 es subordinada de la relación en Z del ejercicio 99.

DEFINICIÓN 26.—Si $\leq$ es una relación de orden del conjunto C , se llama *segmento de extremos* a y b , siendo a y b elemento de C , y se representa por $[a, b]$ al conjunto de todos los elementos x de C tales que $a \leq x \leq b$.

Se llama *segmento abierto por la derecha* (por la izquierda), y se representa por $[a, b)$ (por $(a, b]$) al conjunto de todos los elementos x de C tales que $a \leq x < b$ (tales que $a < x \leq b$). Se llama *intervalo de extremos* a, b , y se representa por (a, b) , al conjunto de todos los elementos x de C tales que $a < x < b$. Al conjunto $\{a, b\}$ formado por los extremos de un segmento se le llama *borde del segmento*; al conjunto $\{a, b\}$ formado por los dos extremos de un intervalo se le llama *frontera del intervalo*. Un subconjunto, A , del conjunto C se llama *convexo* cuando para todo par de elementos x, y de A se verifica que $[x, y] \subset A$. Si A es un subconjunto de C se llama *cierre convexo de A* , y se representa por $\widehat{A}$, al menor conjunto convexo que contiene a A , lo que puede expresarse del siguiente modo:

$$\widehat{A} = \bigcap_{C \supset A} C, \quad C \text{ convexo.}$$

De la definición de cierre convexo resultan las siguientes propiedades:

- I. $A \subset \widehat{A}$.
- II. A es convexo es equivalente a $A = \widehat{A}$.
- III. $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$.
- IV. $A \subset B$ implica $\widehat{A} \subset \widehat{B}$.
- V. $\widehat{A \cup B} \subset \widehat{A} \cup \widehat{B}$.
- VI. $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$.

EJERCICIOS:

102*. Demostrar las propiedades I-VI de la operación cierre convexo.

103. ¿Son los intervalos conjuntos convexos?

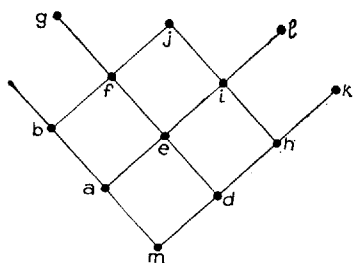


Fig. 17.

DIAGRAMAS PARA LA RELACIÓN DE ORDEN.— Para expresar gráficamente la relación de orden se emplea el diagrama indicado en (§ 1, 1, III). Así, por ejemplo, en el diagrama de la fig. 17 la relación $\leq$ está definida en el conjunto $C = \{a, b, \dots, m\}$ del siguiente modo: escribir $b \leq j$ significa que: 1.º en el diagrama, b está por debajo de j . 2.º que b y j figuran en el diagrama unidos por un segmento o una poligonal cuyos lados son todos ascendentes. 3.º todo elemento está relacionado consigo mismo.

EJERCICIOS:

104. Contestar a las siguientes preguntas relativas al diagrama de la figura 17: a) ¿Es $a \leq h$? b) ¿Es $a \leq j$? c) ¿Es $k \leq l$? d) ¿Es $f \leq l$? e) ¿Existe un elemento mínimo, esto es, tal que sea menor o igual a cualquier otro? f) ¿Existe un elemento máximo?

105. En el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ se define la relación $\leq$ por las siguientes condiciones: $a \leq b$, $b \leq c$, $c \leq d$, $d \leq e$, $e \leq f$, $d \leq g$, $g \leq l$, $h \leq i$, $i \leq j$, $j \leq g$, $j \leq k$, $k \leq l$, y todo elemento está relacionado consigo mismo. Suponiendo todos los elementos de A distintos entre sí, dibujar el diagrama correspondiente y comprobar que $\leq$ es una relación de orden.

DEFINICIÓN 27.—Sea A un conjunto con la relación de orden $\leq$, lo que se expresa también diciendo que A es un conjunto ordenado ($\leq$). Sea B un subconjunto de A . Se dice que m es una cota inferior de B si se verifica: 1.º $m \in A$. 2.º Para todo $x \in B$ es $m \leq x$. Se dice que M es una cota superior de B cuando: 1.º $M \in A$. 2.º Para todo $x \in B$ se verifica $x \leq M$. Si B posee una cota inferior se llama acotado inferiormente, y si posee una cota superior acotado superiormente. Un conjunto acotado es un conjunto acotado superior e inferiormente.

EJERCICIOS:

106. Sea A el conjunto ordenado correspondiente al diagrama de la figura 17. a) ¿Es l una cota superior de $B = \{i, h, k\}$? b) ¿Es d una cota inferior de $B = \{i, j, f, e, c\}$? c) ¿Es acotado el conjunto $B = \{a, d, i, f\}$? ¿Cuáles son sus cotas? d) ¿Es acotado el conjunto $B = \{g, f, e, c, b, a\}$?

107. Definir, en el diagrama de la figura 17, subconjuntos acotados superiormente, inferiormente, no acotados y acotados.

108. ¿Es acotado un segmento? ¿Y un intervalo? ¿Y un conjunto convexo?

Al conjunto de todas las cotas superiores del conjunto B lo representaremos por $S(B)$ y al conjunto formado por todas las cotas inferiores por $I(B)$.

EJERCICIO:

109. a) ¿Cómo son entre sí las siguientes proposiciones?: El conjunto B no está acotado superiormente. $S(B) = \emptyset$. b) Hallar $S(B)$ en el diagrama de la figura 17, siendo $B = \{a, e, d\}$. c) Hallar, en la misma figura, $I(C)$, siendo $C = \{f, i, l, k\}$. d) Calcular, en el diagrama de la figura 17, $S(E)$ e $I(E)$, siendo $E = \{g, k\}$.

Las operaciones S e I tienen las siguientes propiedades:

- I. $M \subset N$ implica $S(M) \supset S(N)$ e $I(M) \supset I(N)$.
- II. $M \subset IS(M)$ y $M \subset SI(M)$.
- III. $S(M) = S \bar{I} S(M)$ y $I(M) = I \bar{S} I(M)$.

EJERCICIO:

110. Demostrar las tres propiedades anteriores.

DEFINICIÓN 28.—Una ordenación $\leq$ de A se llama *filtrante superiormente* (o *dirigida superiormente*) cuando se verifica que, para todo par (x, y) de elementos de A , el conjunto $S(x, y)$ no es vacío. Análogamente, se dice que $\leq$ es una ordenación *filtrante inferiormente* (o *dirigida inferiormente*) cuando para todo par x, y de elementos de A se verifica que $I(x, y)$ no es vacío. Una ordenación $\leq$ de A se llama *filtrante* (dirigida) cuando lo es superior e inferiormente. Un *conjunto filtrante* (superiormente, inferiormente) es un conjunto con una ordenación filtrante (superiormente, inferiormente).

EJERCICIOS:

111. Sea M el conjunto de todos los puntos de un segmento de la recta euclídea, de extremos a, b . Una partición de M es el conjunto de los segmentos cuyos extremos son x_{i-1}, x_i , siendo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y n un número natural. Sea A el conjunto de todas las particiones de M . En A se define la relación $\leq$ del siguiente modo: $(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b) \leq (a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b)$ cuando todo segmento $[y_{i-1}, y_i]$ está totalmente contenido en un segmento $[x_{j-1}, x_j]$. Probar que la relación $\leq$ es una relación de ordenación filtrante.

112. Sea T el conjunto de todos los triángulos del plano. Se define $t \leq t'$ cuando el triángulo t está contenido en el t' . Probar que $\leq$ es una ordenación filtrante superiormente.

DEFINICIÓN 29.—Un *semirretículo* $\vee$ es un conjunto ordenado filtrante superiormente, A , tal que para todo par de elementos, x, y , de A , se verifique que existe un elemento u de A tal que $S(x, y) = S(u)$. Un *semirretículo* $\wedge$ es un conjunto ordenado filtrante inferiormente, A , tal que para todo par de elementos x, y , de A , se verifique que existe un elemento i de A tal que $I(x, y) = I(i)$. Un *retículo* es un semirretículo $\vee$ y un semirretículo $\wedge$.

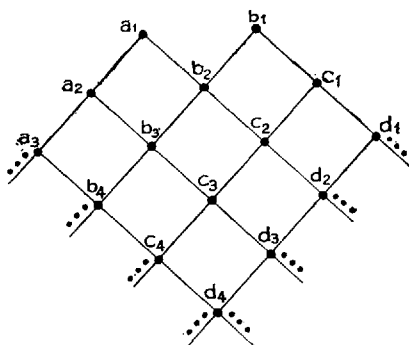


Fig. 18.

EJERCICIOS:

113. ¿Son los conjuntos de los ejercicios 111 y 112 semirretículos?

114. Una malla tal como la de la figura 18, ¿es semirretículo? Un elemento precede a otro cuando se puede pasar del uno al otro mediante segmentos de la malla constantemente ascendentes.

115. Transformar la malla del ejercicio anterior en un retículo.

Los elementos u e i de los semirretículos $\vee$ y $\wedge$ son únicos. Los retículos definidos en la definición anterior coinciden con los definidos en la definición 9.

EJERCICIO:

116. Demostrar la proposición anterior.

En virtud de la proposición anterior, podemos emplear la misma notación que se ha usado en la definición 9, y pondremos:

$$(1) \quad S(x, y) = S(x \cup y), \quad I(x, y) = I(x \cap y);$$

al elemento $x \cup y$ se le llama *unión* de x e y , y al elemento $x \cap y$ se le llama *intersección* de x e y .

De la definición (1) se deduce que si M es una cota superior de $\{x, y\}$, se verifica que $x \cup y \leq M$, luego $x \cup y$ es la menor de las cotas superiores de $\{x, y\}$. Análogamente, $x \cap y$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{x, y\}$. En general, conviene introducir la siguiente:

DEFINICIÓN 30.—Si C es una parte del conjunto ordenado A y se verifica que $S(C) = S(e)$ e $I(C) = I(e')$, a los elementos e y e' así definidos se les llama, respectivamente, *extremo superior* y *extremo inferior* de C .

Para justificar esta definición es preciso ver que e y e' están unívocamente determinados cuando existen.

EJERCICIO:

117*. Probar que e y e' están unívocamente determinados por la definición 30.

NOTACIÓN.

$S(C) = S(e)$ es equivalente a escribir $e = \text{ext. sup. } (C)$.

$I(C) = I(e')$ es equivalente a escribir $e' = \text{ext. inf. } (C)$.

EJERCICIOS:

118. ¿Son equivalentes las dos proposiciones siguientes?:

I. Todo subconjunto de A posee un extremo inferior.

II. A es un semirretículo A .

119. Dados dos elementos cualesquiera del conjunto del ejercicio 114, ¿están relacionados por la relación $\leq$?

120. Definir, en el conjunto del ejercicio 114, subconjuntos tales que dos elementos cualesquiera de ellos estén siempre relacionados por la relación de ordenación.

DEFINICIÓN 31.—Un elemento m se llama elemento *máximo* del conjunto C cuando se verifica: 1.º) $m = \text{ext. sup. } (C)$. 2.º) $m \in C$. Un elemento m' se llama elemento *mínimo* de C cuando se verifica: 1.º) $m' = \text{ext. inf. } (C)$. 2.º) $m' \in C$.

EJERCICIOS:

121. ¿Posee un segmento elemento máximo? ¿Posee un intervalo elemento máximo o mínimo? Si un conjunto posee elemento máximo y mínimo es un segmento?

122. Sean $C = \{b_2, b_3, b_4, c_2, c_3, c_4, d_2, d_3, d_4\}$, $D = \{b_2, b_4, c_3, d_4, d_2\}$, $E = \{a_3, b_2, c_4, c_2\}$, subconjuntos del conjunto del ejercicio 114. Decir si son segmentos y si poseen máximo o mínimo.

DEFINICIÓN 32.—Un conjunto A se llama *totalmente ordenado*, o *linealmente ordenado*, cuando posee una relación de orden, $\leq$, tal que, para todo par, x, y , de elementos de A , se verifique que $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

EJERCICIOS:

123. ¿Es el conjunto del ejercicio 114 totalmente ordenado? ¿Es el conjunto de los números racionales totalmente ordenado respecto de la relación de desigualdad ordinaria?

124. ¿Se puede definir una relación de orden entre los puntos de una circunferencia? ¿Y de orden total?

125. Se define la ordenación en el conjunto Z de los números enteros y en el conjunto Q de los números racionales del siguiente modo: $x \leq y$ equivale a $y = x + z$, siendo z un número no negativo. Dado un número x , ¿existe otro número y tal que $x \leq y$, $x \neq y$, y de $x \leq z \leq y$, $x \neq z$ se deduzca $z = y$?

DEFINICIÓN 33.—Un conjunto A se llama *bien ordenado* respecto de la ordenación $\leq$, cuando cualquiera de sus partes posee un mínimo. Al mínimo correspondiente a A se le llama *primer elemento* de A .

EJERCICIOS:

126. Respecto de la definición de ordenación del ejercicio 125, ¿es N bien ordenado? ¿Lo es Z ? ¿Y Q ?

127. Probar que toda buena ordenación es una ordenación total.

128. ¿Es bien ordenado, respecto de la relación de desigualdad ordinaria, el siguiente conjunto?: $A = \{0; 0,9; 0,99; 0,999; \dots; 1; 1,9; 1,99; \dots; 2; 2,9; 2,99; 2,999; \dots; 3; \dots\}$.

129. ¿Es bien ordenado, respecto de la relación de desigualdad ordinaria, el siguiente conjunto?: $B = \{\dots; 3; 2,1; 2,01; 2,001; \dots; 2; 1,1; 1,01; 1,001; \dots; 1; 0,1; 0,01; \dots; 0\}$.

130. ¿Es bien ordenado el conjunto del ejercicio 114? ¿Y el conjunto: $\{0; 0,9; 0,99; \dots; 1; 1,09; 1,099; \dots; 1,1; 1,109; 1,1099; \dots; 1,11; \dots\}$?

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN TRANSFINITA.—Si A es un conjunto bien ordenado, respecto de la relación de ordenación $\leq$, y si (x) representa al conjunto de todos los elementos y de A tales que $y \leq x$, $y \neq x$, si B es una parte de A tal que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1.º El primer elemento de A pertenece a B .

2.º $(x) \in B$ implica que $x \in B$, se verifica que $A = B$.

Un caso particular del principio de inducción transfinita es el principio de inducción completa cuando se toma A igual al conjunto de los números naturales.

EJERCICIOS:

131. Enunciar el principio de inducción completa.

132. Dado el segmento $[a, b]$, en donde a y b son números racionales, y llamando $h = b - a > 0$, llamaremos proceso P a sustituir el conjunto $C = \{a, b\}$ por el conjunto $C_1 = \{a, a + 0,9h, a + 0,99h, a + 0,999h, \dots, a + h = b\}$. Aplicado el proceso P a cada subconjunto de C_1 formado por dos números consecutivos de C_1 se obtiene otro conjunto C_2 . Aplicado P a cada dos elementos consecutivos de C_2 se obtiene C_3 , etc. ¿Es C_n , n natural, bien ordenado?

OBSERVACIÓN.—El principio de inducción transfinita permite demostrar la igualdad de dos conjuntos, que es una de las demostraciones que se repiten con más frecuencia en toda la matemática, de aquí su extraordinario interés. Ahora bien, para poderlo aplicar es necesario definir previamente una buena ordenación en el conjunto que se considere. De aquí nace la siguiente cuestión fundamental:

¿Se puede definir en cualquier conjunto una buena ordenación? Puede obtenerse la demostración de la contestación afirmativa a la cuestión precedente si se admite el siguiente:

AXIOMA DE LA LIBRE ELECCIÓN DE ZERMELO.—Si es c una correspondencia arbitraria:

$$X \xrightarrow{c} Y,$$

tal que $or(c) = X$, existe una aplicación f :

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

tal que para todo $x \in X$ se verifica que el par $(x, f(x))$ es un par de la correspondencia c .

Mediante este axioma se demuestra:

TEOREMA DE LA BUENA ORDENACIÓN.—En todo conjunto C se puede definir una buena ordenación.

DEFINICIÓN 34.—Si X es una parte del conjunto ordenado A , se dice que x es un *elemento maximal* (*elemento minimal*) de X cuando $x \in X$ y no existe ningún $y \in X$ tal que $y \geq x, y \neq x$ ($y \leq x, y \neq x$).

EJERCICIOS:

133. ¿Es equivalente decir elemento máximo y elemento maximal?

134. ¿Posee el conjunto del ejercicio 114 elementos maximales? ¿Cuáles son? ¿Posee elemento máximo?

135. Si un conjunto X posee dos elementos maximales distintos $a \neq b$, ¿posee elemento máximo?

DEFINICIÓN 35.—Un conjunto ordenado A se llama *inductivo* si se verifica que toda parte X de A , totalmente ordenada respecto de la ordenación subordinada en X por la ordenación de A , está acotada superiormente.

EJERCICIO:

136. Sea el conjunto M de la figura 19, en donde la relación de ordenación se define por: $a \leq b$ significa que se puede unir a con b mediante segmentos de la figura tales que ninguno de ellos sea descendente.

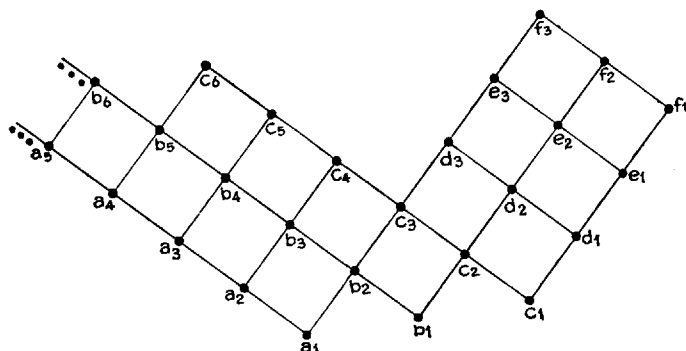


Fig. 19.

- ¿Es el conjunto M de la figura 19 inductivo?
- ¿Es el conjunto N , formado por los elementos representados por las letras c, d, e, f en la figura 19 inductivo?
- ¿Es inductivo el conjunto representado en el ejercicio 114?

Otra consecuencia muy importante del axioma de Zermelo es el siguiente:

TEOREMA DE ZORN.—*Todo conjunto inductivo posee un elemento maximal, por lo menos.*

6. Terminología y notaciones de la lógica matemática.—Entre las posibles agrupaciones de palabras de un idioma hay algunas que se llaman *proposiciones*. Ejemplos: a) Estudio matemática. b) Los «Elementos de Euclides» es la obra más importante de la matemática. c) Las hojas de los árboles son azules. d) Libro par extremadamente aquél. a), b) y c) son proposiciones y d) no es una proposición.

Sea P el conjunto de todas las proposiciones. En este conjunto se pueden definir dos operaciones fundamentales, llamadas *unión* y *negación* y representadas por la conjunción disyuntiva-copulativa «o» y por el adverbio «no», respectivamente, tales que dadas dos proposiciones arbitrarias P, Q , se verifica que $P \text{ o } Q$ es otra proposición que significa P o Q o ambas. Dada una pro-

posición P se verifica que *no* P es otra proposición, que niega la proposición P .

NOTACIÓN.—La operación unión la representaremos también por el signo $\vee$ y la operación negación por el signo $\neg$.

PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN UNIÓN.—I. *Asociatividad*: $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$.

II. *Conmutatividad*: $P \vee Q = Q \vee P$.

III. *Idempotencia*: $P \vee P = P$.

PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN NEGACIÓN.—I". *Nilpotencia*: $\neg(\neg P) = P$. (Esta propiedad no se admite en todas las lógicas.)

Mediante estas operaciones se pueden definir otras. En primer lugar, la *operación intersección*, que se representa por la conjunción copulativa *y* o por el signo $\wedge$.

DEFINICIÓN DE LA OPERACIÓN $\wedge$.—Si P y Q son dos proposiciones, $P \wedge Q$ es otra proposición definida por:

$$(1) \quad P \wedge Q = \neg((\neg P) \vee (\neg Q)),$$

o bien:

$$(1') \quad P \wedge Q = \text{no}((\text{no } P) \text{ o } (\text{no } Q)).$$

De la definición (1) se deducen inmediatamente las siguientes propiedades de la operación $\neg$:

$$\text{II}'' \quad \neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q).$$

$$\text{III}'' \quad \neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Para obtener II'' basta aplicar a los dos miembros de (1) la operación $\neg$ y recordar II''. Para obtener III'' basta sustituir en (1) P y Q por $\neg P$ y $\neg Q$, respectivamente y aplicar I''.

Respecto de las operaciones $\vee$ e $\wedge$ el conjunto $\mathbf{P}$ de las proposiciones es un retículo. En efecto, además de las propiedades I, II y III de la unión se verifican las siguientes:

$$\text{I}' \quad \text{Asociatividad. } (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R).$$

$$\text{II}' \quad \text{Conmutatividad. } P \wedge Q = Q \wedge P.$$

$$\text{III}' \quad \text{Idempotencia. } P \wedge P = P.$$

$$\text{IV}' \quad \text{Ley de simplificación. } P \vee (P \wedge Q) = P, \quad P \wedge (P \vee Q) = P.$$

EJERCICIO:

136. Admitiendo las propiedades I, II, III y I'' demostrar las propiedades I', II' y III' y admitiendo además la primera igualdad de IV, demostrar la segunda.

RELACIÓN DE IMPLICACIÓN.—En el retículo **P** de las proposiciones se puede definir una relación, llamada *implicación alternada*, y representada por el signo $\rightarrow$, que se lee *implica*, del siguiente modo:

$$(2) \quad P \rightarrow Q \text{ es otra forma de expresar: } Q \vee (\neg P)$$

$$(3) \quad (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \text{ se expresa mediante la notación } P \longleftrightarrow Q.$$

Si $P \longleftrightarrow Q$ se dice que las proposiciones P y Q son *equivalentes*.

EJERCICIO:

137. Enunciar, de acuerdo con la definición (2), las siguientes proposiciones: a) El Ebro es un río australiano implica la matemática es poesía. b) Uno igual a cero implica dos igual a uno. c) Me han suspendido en matemáticas implica el profesor es injusto.

V'. *Ley distributiva*. Si P , Q y R son proposiciones arbitrarias de **P**, se verifica que:

$$(4) \quad P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

EJERCICIO:

138. Supuesta cierta la relación (4) de la izquierda, demostrar la de la derecha.

Hemos visto que admitidas las propiedades I, II, III, I'', y la primera mitad de las IV y V, se podían demostrar las I', II', III' y las otras partes de las IV y V, entendiéndose por demostrar el pasar del primer miembro de la igualdad al segundo mediante una serie de sustituciones justificadas por las propiedades admitidas. Esto equivale a interpretar el signo $=$ colocado entre dos expresiones únicamente como autorización para sustituir en cualquier expresión la expresión del primer miembro de la igualdad por la expresión del segundo miembro.

EJERCICIO:

139. ¿Qué significado tiene el signo $=$ en la igualdad entre proposiciones: $A = B$?

Se llama *polinomio de Boole* o *proposición general* a una combinación de letras, llamadas indeterminadas o variables y los símbolos $\vee$, $\neg$ (o sus derivados $\wedge$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$). Si se sustituyen las variables de un polinomio de Boole por proposiciones se obtiene una proposición, que llamaremos valor particular del polinomio correspondiente a los valores particulares de las variables.

EJERCICIO:

140. Hallar valores particulares de los siguientes polinomios: a) $(x \vee y) \wedge z \rightarrow \neg t \vee x$.
b) $(\neg x) \wedge (y \rightarrow z)$.

VALORACIÓN DE LAS PROPOSICIONES.—Sea v una aplicación del conjunto **P** de las proposiciones en el conjunto $V = \{0, 1\}$, definida del siguiente modo:

$$\mathbf{P} \xrightarrow{v} V$$

$$(5) \quad v(P \vee Q) = v(P) + v(Q), \quad 1 + 1 = 1,$$

esto es, con el convenio de que $1 + 1 = 1$, y

$$(6) \quad v(\neg P) = \text{complemento } v(P),$$

siendo complemento de 1 el 0 y complemento de 0 el 1. Escribiremos abreviadamente: $c(v(P))$ en lugar de complemento $v(P)$. De (5) y (6) se deduce:

$$(7) \quad \begin{cases} v(P \wedge Q) = v[\neg((\neg P) \vee (\neg Q))] = c v[(\neg P) \vee (\neg Q)] \\ \quad = c[v(\neg P) + v(\neg Q)] = c[c(v(P)) + c(v(Q))], \end{cases}$$

luego, únicamente será $v(P \wedge Q) = 1$ cuando sea $[c(v(P)) + c(v(Q))] = 0$, lo que exige que $c(v(P)) = 0$ y $c(v(Q)) = 0$, luego $v(P) = v(Q) = 1$. Por consiguiente, (7) se puede expresar abreviadamente del siguiente modo:

$$(8) \quad v(P \wedge Q) = v(P) \cdot v(Q),$$

en donde el signo $\cdot$ significa producto de números.

Decir que $v(P) = 1$ se puede expresar también diciendo que P es verdad. Análogamente, $v(P) = 0$ es lo mismo que decir que P es falsa.

EJERCICIO:

141. Calcular los siguientes valores: a) $v(P \vee (\neg P))$. b) $v(P \wedge (\neg P))$. c) $v(A \longleftrightarrow B)$. d) $v[A \vee B \longleftrightarrow B \vee A]$. e) $v[(A \vee B) \vee C \longleftrightarrow A \vee (B \vee C)]$. f) $v(A \vee A \longleftrightarrow A)$. g) $v(A \vee (A \wedge B) \longleftrightarrow A)$. h) $v[A \wedge (B \vee C) \longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$.

Obsérvese que existen proposiciones cuyo valor no depende del valor que tomen las variables que figuran en ellas, mientras que en otras el valor de la proposición varía al variar el valor que toman las variables.

DEFINICIÓN 36.—Una *tautología* es una proposición cuyo valor es uno, cualesquiera que sean los valores que se den a las variables. Un *absurdo* es una proposición cuyo valor es cero, cualesquiera que sean los valores que se den a las variables. Si

$$A \longleftrightarrow B$$

es una tautología se dice que las proposiciones A y B son lógicamente iguales, y se escribe:

$$A = B.$$

En el conjunto **P** de todas las proposiciones se verifican las siguientes igualdades lógicas:

- I. $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$, $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$.
- II. $P \vee Q = Q \vee P$, $P \wedge Q = Q \wedge P$.
- III. $P \vee P = P$, $P \wedge P = P$.
- IV. $P \vee (P \wedge Q) = P$, $P \wedge (P \vee Q) = P$.
- V. $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- VI. Si P y Q son dos proposiciones arbitrarias, se verifica:

$$P \vee \neg P = Q \vee \neg Q, \quad P \wedge \neg P = Q \wedge \neg Q.$$

Si x es una variable,

$x \vee \neg x$ es una tautología, que representaremos por $\vee$ y

$x \wedge \neg x$ es un absurdo, que representaremos por $\wedge$.

Se verifica que

$$\begin{aligned} P \vee \top &= \top, & P \wedge \top &= P \\ P \vee \perp &= P, & P \wedge \perp &= \perp. \end{aligned}$$

$$\text{VII. } \neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q, \quad \neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q.$$

$$\text{VIII. } v(P \rightarrow Q) = 1 \text{ equivale a } v(Q) = 1, \text{ o a } v(P) = v(Q).$$

De las propiedades anteriores resulta el siguiente:

TEOREMA.—*El conjunto de todas las proposiciones es un álgebra de Boole.*

EJERCICIOS:

142. Demostrar las proposiciones I-VIII.

143. Decir si son o no verdad las siguientes proposiciones: a) $2 + 3 = 4 \rightarrow$ Avila está en España. b) $2 + 3 = 4 \rightarrow$ Avila está en Francia. c) $2 + 2 = 4 \rightarrow$ Avila está en Francia. d) $2 + 2 = 4 \rightarrow$ Avila está en España.

144. Decir si son verdad o no las siguientes proposiciones: a) Todos los triángulos son equiláteros $\leftrightarrow$ El día tiene veinticinco horas. b) Todos los triángulos son equiláteros $\leftrightarrow$ La semana tiene siete días. c) Los triángulos rectángulos tienen un ángulo recto $\leftrightarrow$ La semana tiene siete días.

PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN.—Si la proposición $P(p, q, \dots; x, y, \dots)$, que está compuesta de proposiciones particulares $p, q, \dots$ y de indeterminadas $x, y, \dots$, es verdad también lo es la proposición que resulta de sustituir una o varias indeterminadas por proposiciones particulares.

IMPLICACIÓN LÓGICA.—Se dice que la proposición A *implica lógicamente*, o simplemente que *implica*, la proposición B , y se escribe $A \Rightarrow B$, cuando se verifica que

$$v(A \rightarrow B) = 1.$$

Se dice que la proposición A es *lógicamente equivalente* a la proposición B , o que es *lógicamente igual* a la proposición B , y se escribe:

$$A \leftrightarrow B, \quad \text{o} \quad A = B,$$

cundo se verifican las dos proposiciones siguientes:

$$A \Rightarrow B \quad \text{y} \quad B \Rightarrow A.$$

La relación de implicación lógica es una relación de orden.

EJERCICIO:

145. Demostrar la proposición anterior.

DEFINICIÓN 37.—Una *función proposicional definida sobre un conjunto C* es una expresión

$$P(x)$$

tal que al sustituir x por cualquier elemento p de C se verifica que $P(p)$ es una proposición que posee un valor $v(P(p))$ perfectamente determinado.

Como consecuencia de ser $v(P(p))$ igual a uno o a cero, $P(x)$ establece una clasificación de C en dos clases. Se llama *clase verdad* a la clase C_p formada por todos los elementos p de C tales que $v(P(p)) = 1$.

La proposición $C_p = C$ se puede expresar del siguiente modo:

Para todo $p \in C$ se verifica que $P(p)$ es verdad, que simbólicamente se representa así:

$$(\forall p \in C) P(p),$$

el símbolo $\forall$, que se lee: *para todo*, se llama *cuantificador universal*.

Si $P(x)$ es una función proposicional definida en C , la proposición:

Existe un $p \in C$ tal que $P(p)$ es verdad,

se expresa simbólicamente así:

$$(\exists p \in C) P(p),$$

al símbolo $\exists$, que se lee *existe un*, se le llama *cuantificador existencial*.

Entre los dos cuantificadores $\forall$ y $\exists$ existen las siguientes relaciones:

- I. $\neg (\forall p \in C) P(p) = (\exists p \in C) \neg P(p).$
- II. $\neg (\exists p \in C) P(p) = (\forall p \in C) \neg P(p).$

§ 3. GRUPOS

1. Grupos y semigrupos.—Sea G un conjunto y a una aplicación de $G \times G$ en G :

$$(1) \quad G \times G \xrightarrow{a} G,$$

esto significa que a cada elemento (x, y) de $G \times G$ le corresponde un elemento z de G , lo que se expresa escribiendo:

$$(2) \quad z = a(x, y).$$

A un conjunto G más una aplicación a de $G \times G$ en G se le llama un *grupoide*. La aplicación a acostumbra a designarse, indistintamente, con los nombres de *adición* y de *multiplicación*. En lugar de la letra a , como característica de la aplicación, se emplea, en el primer caso el signo $+$ y en el segundo el signo $\cdot$ o $.$; por tanto, se escribe

$$(3) \quad z = +(x, y), \quad \text{ó} \quad z = .(x, y),$$

pero es costumbre, cuando se emplea esta característica, usar otra forma de escritura, poniéndose:

$$(4) \quad z = +(x, y) = (x + y), \quad z = .(x, y) = (x \cdot y).$$

Si no hay peligro de confusión, se puede prescindir del paréntesis, escribiéndose:

$$(5) \quad z = x + y, \quad .z = x \cdot y = xy.$$

A $x + y$ se le llama *suma* de x e y , y a xy se le llama *producto* de x e y ; en el primer caso, x e y se llaman *sumando* y *sumador*, respectivamente, y en el segundo, *multiplicando* y *multiplicador*.

EJERCICIOS:

146. Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales y a la aplicación $a(x, y) = 2x + y$, siendo las operaciones del segundo miembro la adición y multiplicación de números racionales. Calcular: a) $a(y, x)$. b) $a(a(x, y), z)$. c) $a(x, a(y, z))$. Representar mediante la notación (5) las siguientes expresiones: d) $a(a(x, y), z)$; e) $a(x, a(y, z))$; f) $a(a(x, y), a(z, t))$; g) $a(a(a(x, y), z), t)$.

147. Sea a la aplicación de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, siendo $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, definida por $a(x, y) = \sqrt[y]{x}$. Calcular $a(y, x)$, $a(a(x, y), z)$, $a(x, a(y, z))$, $a(t(x, y), a(z, t))$, $a(a(a(x, y), z), t)$.

148. ¿Son grupoides los conjuntos de los ejercicios 146 y 147 respecto de las aplicaciones allí definidas? ¿Es grupoide el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales respecto de la correspondencia $a(x, y) = \sqrt[y]{x}$? ¿Es grupoide el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ respecto de la correspondencia $a(x, y) = x - y$? ¿Es grupoide $\mathbb{N}$ respecto de $a(x, y) = x - 3$? ¿Es $\mathbb{N}$ grupoide respecto de $a(x, y) = x + 3$?

DEFINICIÓN 1.—Un *semigrupo* S es un grupoide en el que si x, y, z son tres elementos arbitrarios de S , y a es la aplicación de $S \times S$ en S que define al grupoide, se verifica la siguiente:

LEY ASOCIATIVA:

$$a(x, a(y, z)) = a(a(x, y), z),$$

o bien, escribiendo con la notación de (5):

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z.$$

EJERCICIOS:

149. ¿Es semigrupo el grupoide del ejercicio 146? ¿Y el del ejercicio 147? Sea $a(x, y) = x + y + 4$, siendo x, y números racionales. ¿Es $\mathbb{Q}$ un grupoide respecto de esta operación? ¿Es un semigrupo?

150. ¿Son semigrupos los siguientes conjuntos?: a) Los números naturales $\mathbb{N}$ respecto de la adición. b) $\mathbb{N}$ respecto de la multiplicación. c) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ respecto de la adición y de la multiplicación. d) El de los números racionales $\mathbb{Q}$ respecto de la adición y respecto de la multiplicación.

HOMOMORFISMOS.—Sea G un grupoide y sea a la operación de G . Sea G^* otro grupoide y a^* la operación de G^* . Si f es una aplicación de G en G^* :

$$G \xrightarrow{f} G^*,$$

se puede definir de modo natural una aplicación de $G \times G$ en $G^* \times G^*$, que representaremos con el mismo nombre f , del siguiente modo:

$$G \times G \xrightarrow{f} G^* \times G^*$$

es tal que

$$(6) \quad f(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Las aplicaciones de G , G^* , $G \times G$ y $G^* \times G^*$ pueden representarse mediante el diagrama siguiente:

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G^* \\ a \uparrow & & \uparrow a^* \\ G \times G & \xrightarrow{f} & G^* \times G^* \end{array}$$

el cual, en general, no es conmutativo, esto es, no se obtiene el mismo resultado pasando de $G \times G$ a G^* por un lado que si se pasa por el otro.

EJERCICIOS:

151. Sea G el conjunto de los números naturales, G^* el conjunto de los números racionales, sea $a(x, y) = 3x + y$, $a^*(x^*, y^*) = x^{*2} - y^* + 1$, $f(x) = \frac{1}{3}x^*$. ¿Es conmutativo en este caso el diagrama (7)?

152. Sea $G = G^* = \mathbb{Q}$; sea $a = a^* = +$ la adición de números racionales y $f(x) = mx$, siendo m un número racional fijo. ¿Es (7) conmutativo en este caso?

153. a) Sustituir en el ejercicio anterior a y a^* por la multiplicación. ¿Es entonces (7) conmutativo? b) Sustituir en el ejercicio anterior a y a^* por la multiplicación y poner $f(x) = x^m$, siendo m natural. ¿Es (7) conmutativo? c) Si a y a^* son la multiplicación y si se limita a considerar únicamente los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+ = G$ y los reales positivos $\mathbb{R}^+ = G^*$, y si $f(x) = \sqrt[m]{x}$, siendo m natural. ¿Es conmutativo (7)? d) Y si se pone en este último ejemplo $f(x) = \log x$, siendo a la multiplicación y a^* la adición?

DEFINICIÓN 2.—Un *homomorfismo* f es una aplicación de un grupoide G en un grupoide G^* tal que el diagrama (7) sea conmutativo, o lo que es equivalente, tal que:

$$(8) \quad a^* f = f a,$$

siendo a la operación de G y a^* la operación de G^* .

La conmutatividad (8) puede expresarse de varias formas cuando las operaciones a y a^* se expresan mediante la notación (5), dando lugar a las siguientes relaciones:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall (x, y) \in G \times G \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \\ f(xy) = f(x) + f(y), \\ f(xy) = f(x) f(y). \end{array} \right.$$

EJERCICIOS:

154. Sea $N \times N \xrightarrow{a} N$, siendo N el conjunto de los números naturales y $a(x, y) = m.c.d.(x, y)$. Sea $f(x) = nx$, siendo n un número natural fijo. ¿Es f un homomorfismo de N en N ?

155. Sea A el conjunto de todas las funciones de la forma $y = mx + n$, en donde m y n son números enteros y x e y variables enteras. Dadas dos funciones $\varphi(x) = mx + n$ y $\psi(x) = px + q$, se define $a(\varphi, \psi) = \psi\varphi$. ¿Es A un grupoide? ¿Es A un semigrupo? Dada la función $\varphi(x) = mx + n$, se representa por $f(\varphi)$ a la función $f(\varphi) = \lambda\varphi + \mu$

$= \lambda m x + \lambda n + \mu$, siendo λ y μ dos números enteros fijos. ¿Es f un homomorfismo de A en A ? ¿Se pueden determinar λ y μ de modo que f sea un homomorfismo?

156. Sea N el conjunto de los números naturales mayores o iguales a n . Sea f la correspondencia $f(x) = nx$, y g la correspondencia $g(x) = mx$, siendo $m < n$. ¿Es f un homomorfismo? ¿Lo es g ?

Siendo los homomorfismos aplicaciones, definen una clasificación en el conjunto original. Sea

$$G \xrightarrow{f} G^*$$

un homomorfismo de G en G^* , y sea G/f el conjunto cociente de G respecto de la relación de igualdad R definida por f en G ($x R y \iff f(x) = f(y)$). A la clase de G que contiene a x la representaremos por $x + f$. Sean $+$ las operaciones de G y G^* . En G/f se puede definir una operación del siguiente modo:

$$(10) \quad (x + f) + (y + f) = x + y + f.$$

G/f es un grupoide (un semigrupo) respecto de la operación definida en (10) siempre que G sea un grupoide (un semigrupo) respecto de $+$, llamado grupoide cociente de G respecto del homomorfismo f .

Para demostrar la proposición anterior es preciso probar: 1.º La uniformidad de la definición (10), esto es, que la clase $x + y + f$ no depende de los representantes x e y que se tomen de las clases $x + f$ e $y + f$. 2.º Que si G es un semigrupo se verifica que G/f posee la propiedad asociativa y, por tanto, que es también un semigrupo.

EJERCICIOS:

157*. Demostrar la proposición anterior.

158. Sea G el conjunto de los números reales del segmento $[0,1]$, sea $+$ la operación binaria definida en G del siguiente modo: $x + y = \sqrt{x(1-y)}$. ¿Es G un grupoide? ¿Es un semigrupo?

DEFINICIÓN 3.—Si $G \xrightarrow{f} G'$ es un homomorfismo y es suprayección, se dice que f es un *epimorfismo*. Si f es un homomorfismo tal que, para todo par de elementos x, y de G , se verifique que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, se dice que f es un *homomorfismo inyectivo*, o simplemente una *inyección*. Si f es una suprayección y una inyección, se dice que f es un *isomorfismo*.

Si existe un isomorfismo entre los grupoides G y G' (entre los semigrupos G y G'), se dice que G y G' son *isomorfos*, y se escribe:

$$G \approx G'.$$

EJERCICIOS:

159. Sea N el semigrupo aditivo de los números naturales y sea $N \xrightarrow{f} N$ el homomorfismo $f(x) = mx$, siendo m un número natural fijo. ¿Es f un epimorfismo? ¿Es f una inyección?

160. Sea $G = \{x \mid x \in N, x = my, y \in N, m \in N\}$, siendo m un número natural fijo. Sea N el semigrupo aditivo de los números naturales, y $f: G \rightarrow N$ la aplicación $f(my) = y$. ¿Es f un isomorfismo?

Sea $G \xrightarrow{f} G'$ un homomorfismo del grupoide G en el G' , y sea G/f el grupoide cociente de G respecto de f . Se verifican las siguientes proposiciones:

1. La aplicación $G \xrightarrow{n} G/f$, definida por $n(x) = x + f$, es un epimorfismo.

2. La aplicación $G/f \xrightarrow{b} \text{im}(f)$, definida por $b(x + f) = f(x)$, es un isomorfismo.

3. La aplicación $\text{im}(f) \xrightarrow{i} G'$, siendo $i(x) = x$, es una inyección.

Estas tres proposiciones pueden expresarse diciendo que el diagrama adjunto es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ n \downarrow & & \uparrow i \\ G/f & \xrightarrow{b} & \text{im}(f) \end{array}$$

EJERCICIOS:

161*. Demostrar las proposiciones anteriores.

2. Grupos. Subgrupos.

DEFINICIÓN 4.—Un grupo es un semigrupo tal que:

I. Existe un elemento neutro u , caracterizado por la siguiente propiedad: para todo elemento x del grupo se verifica que

$$(11) \quad a(x, u) = i(u, x) = x,$$

o bien, escrito con notación aditiva:

$$(11') \quad x + u = u + x = x,$$

y con notación multiplicativa:

$$(11'') \quad xu = ux = x.$$

II. Todo elemento x del grupo admite un simétrico x' caracterizado por la propiedad:

$$(12) \quad a(x, x') = a(x', x) = u,$$

o bien, con la notación aditiva:

$$(12) \quad x + x' = x' + x = u,$$

y con la multiplicativa:

$$(12'') \quad xx' = x'x = u.$$

De la definición anterior se deduce inmediatamente que:

1. El elemento neutro es único.

2. La condición II es equivalente a la siguiente: para todo x existen elementos x' y x'' tales que

$$a(x, x') = a(x'', x) = u.$$

Al elemento simétrico de x se le llama *opuesto a x* en la notación aditiva, o *inverso de x* en la notación multiplicativa. Al opuesto a x se le representa por $-x$ y al inverso de x por x^{-1} , o por $\frac{1}{x}$. Al elemento $x + (-y)$ se le representa abreviadamente por $x - y$ y se le llama *diferencia* por la derecha entre x e y . $-y + x$ es la diferencia por la izquierda. Análogamente, xy^{-1} es el cociente por la derecha, e $y^{-1}x$ el cociente por la izquierda de x e y . Al elemento neutro se le llama *cero* en el caso aditivo, y *uno* o *elemento unidad* en el caso multiplicativo. El cero será representado por 0.

EJERCICIOS:

162*. Demostrar 1.

163*. Demostrar 2.

164. a) ¿Es el conjunto de los números naturales un grupo respecto de la adición? b) ¿Y respecto de la multiplicación? c) ¿Es el conjunto de los números racionales un grupo respecto de la adición? d) ¿Y respecto de la multiplicación?

165. Sea P el conjunto de todas las permutaciones de cuatro elementos. En P se define el producto del siguiente modo: $((2, 3, 4, 1))((3, 1, 4, 2)) = ((1, 4, 2, 3))$, en donde el primer número de la permutación del segundo miembro es el número que ocupa, en la permutación que figura como segundo factor en el primer miembro, el lugar indicado por el primer número de la primera permutación; el segundo número de la permutación del segundo miembro es el que figura en el segundo factor en el lugar indicado por el segundo número del primer factor, etc. ¿Es el conjunto P , respecto de esta definición, un grupo?

166. Sea A el conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto C en sí mismo y B el subconjunto de A formado por las biyecciones. Se define en A , y por tanto en B , la operación multiplicación de aplicaciones. ¿Qué estructura tienen A y B ?

3. *El conjunto de todas las biyecciones de un conjunto C sobre sí mismo es un grupo respecto de la multiplicación de aplicaciones como operación del mismo. En particular, si C es finito se obtiene el llamado grupo de las permutaciones o de las sustituciones.*

DEFINICIÓN 5.—Los grupos con un número finito de elementos se llaman *grupos finitos*. Al número de elementos de un grupo finito se le llama *orden* del grupo.

EJERCICIOS:

167. ¿Cuál es el orden del grupo de las biyecciones del conjunto $C = \{1, 2, \dots, n\}$?

168. Un tipo particular de permutación es la que transforma en sí mismo todo elemento excepto un par de ellos que se transforman uno en otro. Así, por ejemplo, la permutación $((1\ 5\ 3\ 4\ 2))$. A estas permutaciones se les llama *transposiciones* y se pueden representar escribiendo únicamente los elementos que varían, de modo que la permutación anterior se escribirá así $(2, 5)$. Las permutaciones pueden escribirse también del siguiente modo: se escribe a continuación de cada elemento su elemento homólogo, de modo que el elemento homólogo del último sea el primero. Así, por ejemplo, la permutación $((2\ 5\ 1\ 3\ 4))$ se escribirá así: $((2\ 5\ 1\ 3\ 4)) = (1\ 2\ 5\ 4\ 3)$, y $((3\ 1\ 2\ 5\ 4)) = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$. Las permutaciones tales como las $(1\ 3\ 2)$ ó $(1\ 2\ 5\ 4\ 3)$, en las que el homólogo de cada elemento es el siguiente y el homólogo del último es el primero, se llaman ciclos. Descomponer en producto de ciclos todas las permutaciones con cuatro elementos.

169. Todo ciclo (véase el ejercicio 168) se puede descomponer en producto de transposiciones, así por ejemplo: $(2\ 4\ 3) = (2\ 4)(2\ 3)$. Descomponer en producto de transposiciones todas las permutaciones con cuatro elementos.

170. Cuéntese el número de permutaciones del ejercicio anterior que se descomponen en producto de un número par de transposiciones y el de las que se descomponen en producto un número impar de ellas. ¿Qué relación existe entre estos números y el número total de permutaciones con cuatro elementos? ¿Es única la descomposición de una permutación en producto de transposiciones? ¿Son de la misma paridad los números de transposiciones de dos descomposiciones de una misma permutación?

171. Una permutación se llama de clase par cuando se puede descomponer en un número par de transposiciones, y de clase impar en caso contrario. Demostrar que el producto de dos permutaciones de clase par es otra permutación de clase par.

172. Construir la tabla de multiplicar de las permutaciones con cuatro elementos.

DEFINICIÓN 6.—Un subconjunto H de un grupo G se llama *subgrupo* de G cuando H es grupo respecto de la operación de G .

EJERCICIOS:

173. Mediante la tabla de multiplicar del ejercicio 172 contestar a las siguientes preguntas: ¿Es el siguiente subconjunto un subgrupo del grupo de las permutaciones con cuatro elementos? a) $H = \{(1, 2, 3)(4), (1)(2)(3)(4)\}$. b) $K = \{(1, 2, 3)(4), (2, 1, 3)(4)\}$, $L = \{(1, 2, 3)(4), (2, 1, 3)(4), (1)(2)(3)(4)\}$.

174. Hallar todos los subgrupos del grupo de permutaciones con cuatro elementos (empléese la tabla del ejercicio 172).

4. Para que el subconjunto H de un grupo aditivo G sea un subgrupo de G , es necesario y suficiente que:

1. Para todo par (x, y) de elementos de H se verifique que $x + y \in H$.
2. El elemento neutro de G pertenezca a H .
3. Para todo elemento x de H se verifique que $-x \in H$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea H un subgrupo. Si $x, y \in H$, será $x + y \in H$, ya que $+$ debe ser una aplicación de $H \times H$ en H . En H debe existir un elemento neutro: o' . Sea 0 el cero de G . Si x es un elemento arbitrario de G se verifica que $x + o' = x + (-y + y) + o'$, siendo $-y + y = 0$, e y un elemento de H . Recordando que o' es el cero de H , será:

$$x + o' = [x + (-y)] + (y + o') = [x + (-y)] + y = x + [(-y) + y] = x + o = x,$$

por consiguiente, o' es cero de G , y como el elemento neutro es único, resulta que $o' = 0$. El elemento opuesto de todo elemento de H debe ser elemento de H . Recíprocamente, si se cumplen las tres condiciones anteriores, como la propiedad asociativa es cierta en G , también lo será en H , luego H será grupo.

A la suma de x con el opuesto de y se le llama *diferencia* entre x e y , y se escribe:

$$x - y = x + (-y).$$

5. Para que el subconjunto H de un grupo aditivo G sea un subgrupo de G es necesario y suficiente que para todo par de elementos x, y de H se verifique que $x - y \in H$.

DEMOSTRACIÓN.—Condición necesaria.—Si H es un subgrupo de G se verifican las condiciones del teorema 4, luego si $x, y \in H$, por la condición 3 será $-y \in H$, y, por la 1, $x + (-y) = x - y \in H$.

Condición suficiente.—Demostración de la condición 2 de 4. Si x es un elemento de H , de $x, x \in H$ se deduce que $x - x = o \in H$.

Demostración de 3.—Si $x \in H$, como $o \in H$, será $o - x = -x \in H$.

Demostración de 1.—Si $x, y \in H$, será $x, -y \in H$, luego $x - (-y) = x + y \in H$.

EJERCICIOS:

175. Enunciar los teoremas 3 y 4 para grupos multiplicativos.

176. Sea M el conjunto de todos los movimientos del plano euclídeo; M^+ el subconjunto de los movimientos directos, esto es, aquellos movimientos que se pueden descomponer en un número par de simetrías axiales; T el subconjunto de las traslaciones; G el subconjunto de los giros; G_o el subconjunto de giros de centro O ; C el subconjunto de las simetrías centrales; S el subconjunto de las simetrías axiales. Decir qué subconjuntos de M , entre los mencionados, son subgrupos de M .

177. Dibujar los diagramas que indiquen las relaciones de inclusión de los subgrupos de los ejercicios 174 y 176.

178. Sea Z el grupo aditivo de los números enteros. Definir todos los subgrupos de Z .

179. Sea Q^* el grupo multiplicativo de los números racionales (esto es, el conjunto de todos los números racionales excluido el cero). Determinar algunos subgrupos de Q^* .

DEFINICIÓN 7.—Sea G un grupo aditivo y H un subgrupo de G . Si x es un elemento arbitrario de G , representaremos por $x + H$ al conjunto de todos los elementos de G de la forma $x + y$, cuando y recorre todos los elementos de H . Análogamente, representaremos por $H + x$ al conjunto de todos los elementos de G de la forma $y + x$, cuando y recorre todos los elementos de H . $x + H$ se llama *clase adjunta de H por la izquierda*, y x es un *representante* de la misma. $H + x$ se llama *clase adjunta de H por la derecha* y x es un *representante* de ella. Al conjunto de todas las clases ad-

juntas por la izquierda lo representaremos por G/H , y al conjunto de las clases adjuntas por la derecha, por $H \backslash G$.

6. G/H es una clasificación de G . En efecto: 1.º De $\{x\} \subset x + H$ se deduce: $\bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} (x + H)$, y como $\bigcup_{x \in G} \{x\} = G$, resulta $G \subset \bigcup_{x \in G} (x + H)$. De $x + H \subset G$ se deduce $\bigcup_{x \in G} (x + H) \subset \bigcup_{x \in G} G = G$, luego $\bigcup_{x \in G} (x + H) = G$.

2.º Sea $y \in (x + H) \cap (z + H)$. Entonces será $y = x + h$, $y = z + k$; $h, k \in H$. De donde $x + h = z + k$. Teniendo en cuenta esta última igualdad, resulta: para todo $t \in x + H$, será $t = x + l$, $l \in H$, luego $t = z + (k - h + l) \in z + H$, luego $x + H \subset z + H$. Recíprocamente, para todo $s \in z + H$, será $s = z + m$, $m \in H$, luego $s = x + (h - k + m) \in x + H$, lo que equivale a $z + H \subset x + H$. Por consiguiente, $x + H = z + H$.

7. $x + H = z + H \iff x - z \in H$. Esta proposición es consecuencia inmediata de la anterior.

Si el grupo G es multiplicativo, las clases adjuntas se representan mediante las notaciones siguientes: xH y Hx .

EJERCICIOS:

180. Sea S el grupo de todas las permutaciones con cuatro elementos. Empleando las notaciones del ejercicio 174, escribir todos los elementos de los siguientes conjuntos cocientes: S/A , S/K , S/J , S/B , S/C , S/N .

181. Sea M el grupo de los movimientos en el plano euclídeo y M^+ el subgrupo de los movimientos directos. Escribir los elementos del conjunto M/M^+ .

182. Sea S el grupo de todas las permutaciones con tres elementos: $S = \{1 = (a)(b)(c), (a b c), (a c b), (a b), (a c), (b c)\}$. Sea $A = \{1, (a b c), (a c b)\}$ y $B = \{1, (a b)\}$. Calcular los elementos de S/A , $S \backslash A$, S/B y $S \backslash B$.

En el ejercicio 182 se ve que el subgrupo A tiene la propiedad de que $S/A = S \backslash A$, mientras que el B no posee esta propiedad: $S/B \neq S \backslash B$.

DEFINICIÓN 8.—A los subgrupos H de un grupo G que poseen la propiedad de ser $x + H = H + x$ para todo x de G se les llama *subgrupos normales o invariantes*. Si H es un subgrupo normal del grupo aditivo G , se define una adición en el conjunto cociente G/H del siguiente modo:

$$(1) \quad (x + H) + (y + H) = (x + y) + H.$$

8. El conjunto cociente G/H respecto de un subgrupo normal H de G es, respecto de la definición (1) de adición, un grupo.

DEMOSTRACIÓN.—En primer lugar hay que probar que la correspondencia (1) de $G/H \times G/H$ en G/H es una aplicación. Desde luego, está definida en todo el conjunto producto $G/H \times G/H$. Veamos que es unívoca. Sea $x + H = x' + H$, $y + H = y' + H$. De estas hipótesis se deduce que

$$x + h = x' + h'; \quad h, h' \in H; \quad y + k = y' + k'; \quad k, k' \in H.$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(x + h) + (y + k) = (x + h') + (y' + k').$$

o bien,

$$x + (h + y) + k = x' + (h' + y') + k'.$$

Ahora bien, por ser H normal y $h + y$, $h' + y' \in G \setminus H$, existirán elementos h_1 y h'_1 en H tales que

$$h + y = y + h_1, \quad h' + y' = y' + h'_1,$$

luego de la igualdad precedente se obtiene:

$$x + (y + h_1) + k = x' + (y' + h'_1) + k'$$

o bien,

$$(x + y) + (h_1 + k) = (x' + y') + (h'_1 + k'),$$

que prueba que

$$(x + y) + H = (x' + y') + H.$$

La adición (1) es asociativa:

$$\begin{aligned} [(x + H) + (y + H)] + (z + H) &= [(x + y) + H] + (z + H) = (x + y) + z + H \\ &= x + (y + z) + H = (x + H) + [(y + z) + H] = (x + H) + [(y + H) + (z + H)]. \end{aligned}$$

La clase $H = o + H$ es el elemento neutro de G/H . En efecto,

$$(x + H) + H = (x + o) + H = x + H, \text{ para cualquier } x + H.$$

La clase $-(x + H)$ opuesta a la clase $x + H$ es la clase $-x + H$. En efecto,

$$(x + H) + (-x + H) = (x + (-x)) + H = o + H.$$

Al grupo G/H se le llama *grupo cociente de G respecto del subgrupo normal H* .

3. Homomorfismos. Isomorfismos.

DEFINICIÓN 9.—Sean G y G^* dos grupos, que supondremos aditivos, y $f : G \rightarrow G^*$ una aplicación de G en G^* . La aplicación f se llama *homomorfismo* de G en G^* cuando es un homomorfismo del grupoide G en el grupoide G^* .

Recordando que se ha llamado aplicación f de $G \times G$ en $G^* \times G^*$ a la aplicación

$$(2) \quad f(x, y) = (fx, fy),$$

decir que f es un homomorfismo de G en G^* equivale a decir que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G^* \\ + \uparrow & & \uparrow + \\ G \times G & \xrightarrow{f} & G^* \times G^* \end{array}$$

es conmutativo, esto es, que para todo par (x, y) de $G \times G$ se verifica

$$(4) \quad f + (x, y) = + f(x, y),$$

o bien, con la notación ordinaria:

$$(5) \quad f(x + y) = fx + fy.$$

EJERCICIOS:

183. Escribir la condición (5) de homomorfismo en los siguientes casos: a) G es multiplicativo y G^* aditivo. b) G es aditivo y G^* multiplicativo. c) G y G^* son multiplicativos.

184. Sea Z el grupo aditivo de los números enteros. Se consideran las siguientes aplicaciones: a) $Z \xrightarrow{f} Z$, $fx = 3 + x$. b) $Z \xrightarrow{g} Z$, $gx = 3x$. c) $Z \xrightarrow{h} Z$, $hx = x^3$. ¿Cuáles de ellas son homomorfismos?

185. Sea Z el grupo aditivo de los números enteros y Q^* el grupo multiplicativo de los números racionales. ¿Es homomorfismo la aplicación $f: Z \rightarrow Q^*$ definida por $fx = a^x$, siendo a un número racional?

1. Si f es un homomorfismo de G en G^* se verifica que la imagen del elemento neutro de G es el elemento neutro de G^* .

DEMOSTRACIÓN. — Supongamos ambos grupos aditivos. $f(x) = f(x + o) = f(x) + f(o)$, de donde $f(o) = 0^*$.

2. Si f es un homomorfismo de G en G^* , se verifica que $f(-x) = -f(x)$ y $f(x - y) = fx - fy$.

DEMOSTRACIÓN. — $0^* = f(o) = f(x + (-x)) = fx + f(-x)$, luego $f(-x) = -fx$. $f(x - y) = f(x + (-y)) = fx + f(-y) = fx + (-fy) = fx - fy$.

3. La imagen de un homomorfismo f de G en G^* es un subgrupo de G^* .

DEMOSTRACIÓN. $fx - fy = f(x - y) \in \text{im}(f)$.

DEFINICIÓN 10. — Se llama *núcleo* de un homomorfismo $G \xrightarrow{f} G^*$, y se representa por $\ker(f)$, al siguiente subconjunto de G :

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow fx = o^*,$$

siendo o^* el elemento neutro de G^* .

4. El núcleo de un homomorfismo f de G en G^* es un subgrupo normal de G .

DEMOSTRACIÓN. — a) $o^* = fx, o^* = fy \Rightarrow o^* = fx - fy = f(x - y)$.

b) Sea x un elemento arbitrario de G y n un elemento arbitrario del núcleo, de $f(x + n - x) = fx + fn - fx = fx - fx = o^*$, se deduce que $x + n - x = n' \in \ker f$, luego $x + n = n' + x$, lo que prueba que $x + \ker f = \ker f + x$, para todo x de G .

Siendo el núcleo de un homomorfismo f un subgrupo normal de G , se puede definir la estructura de grupo en $G/\ker f$ mediante la siguiente definición de adición:

$$(3) \quad (x + \ker f) + (y + \ker f) = (x + y) + \ker f.$$

5. Si H es un subgrupo normal de G , la aplicación

$$(4) \quad G \xrightarrow{n} G/H$$

definida del siguiente modo:

$$(5) \quad nx = x + H.$$

es un homomorfismo de G sobre G/H cuyo núcleo es H .

DEMOSTRACIÓN.— n es una aplicación. $n(x + y) = (x + y) + H = (x + H) + (y + H) = nx + ny$. Si $o^* = nx = x + H$, recordando que el cero de G/H es $o + H$, esto es, que $o^* = o + H$, será $x + H = o + H$, luego $x \in H$. Recíprocamente, si $x \in H$, será $nx = x + H = H = o^*$, luego $x \in \ker n$.

A los homomorfismos tales como el (4) les llamaremos homomorfismos naturales.

DEFINICIÓN 11.—Sea f un homomorfismo del grupo G en el G^* . Se dice que f es un epimorfismo cuando $\text{im } f = \text{fin } f$. Se dice que f es un homomorfismo inyectivo, una inyección o un isomorfismo de G en G^* , cuando $\ker f = \{o\}$. Si f es epimorfismo e inyección, se dice que f es un isomorfismo, homomorfismo biyectivo o biyección.

6. Si f es un isomorfismo, f es una correspondencia biunívoca o biyección. La condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo sea un isomorfismo es que exista una aplicación g de G^* en G tal que gf sea la correspondencia identidad de G , y fg la correspondencia identidad de G^* .

DEMOSTRACIÓN.—Para probar la primera parte queda por ver que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Ahora bien, si $f(x) = f(y)$, será $f(x) - f(y) = o^*$ de donde $f(x - y) = o^*$, luego $x - y \in \ker f = \{o\}$, luego $x = y$.

En primer lugar, f es un epimorfismo. En efecto, si $x^* \in G^*$, de $x^* = fg x^* = f(g x^*)$ resulta que x^* es imagen en f de un elemento de G . Si $x \in \ker f$, $fx = o^*$, y como $fo = o^*$, $gf x = gfo$, y como gf es la identidad, $x = o$. Finalmente, si f es isomorfismo, f^{-1} es una aplicación de G^* en G tal que $f^{-1}f$ es la identidad de G , y ff^{-1} la de G^* .

EJERCICIOS:

186. Averiguar si son isomorfismos los siguientes homomorfismos: a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 5x$. b) P el grupo aditivo de los números pares. $g: \mathbb{Z} \rightarrow P$, $g(x) = 2x$. c) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(x) = -x$. d) $k: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $k(x) = x^2$, siendo $\mathbb{Q}^*$ el grupo multiplicativo de los números racionales. e) $l: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $l(x) = \frac{1}{x}$.

187. Si S es el grupo de las permutaciones con cuatro elementos, comprobar que el grupo alternado A formado por todas las permutaciones pares es subgrupo invariante de S y que el grupo diédrico D formado por $D = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ es subgrupo invariante de A .

188. Construir la tabla de multiplicar de A/D .

189. Sea A el grupo alternado de las permutaciones con cuatro elementos, y B el grupo alternado de las permutaciones con tres elementos: $A = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123)(132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$, $B = \{1, (123), (132)\}$. Se define la correspondencia $f: A \rightarrow B$ del siguiente modo: si $x \in A$, se pone $f(x) = y \Leftrightarrow yz = x$, siendo $z \in D = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Comprobar que f es un homomorfismo y que la correspondencia $y \cdot \ker(f) \rightarrow y$ es un isomorfismo entre $A/\ker(f)$ y B .

7. Si f es un homomorfismo del grupo multiplicativo G en el grupo multiplicativo G' , se puede obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ n \downarrow & & \uparrow i \\ G/\ker(f) & \xrightarrow{b} & \text{im}(f) \end{array}$$

en donde n es un homomorfismo natural, b es una biyección, e i es la inyección natural, o inmersión, que transforma cada elemento de $\text{im}(f)$ en él mismo considerado como elemento de G .

DEMOSTRACIÓN.—Para que (6) sea conmutativo es necesario y suficiente que:

$$(7) \quad f = i \circ b \circ n,$$

luego si x es un elemento arbitrario de G , será:

$$f(x) = i \circ b \circ n(x) = i \circ b(x \cdot \ker(f)),$$

luego habrá que definir

$$b(x \cdot \ker(f)) = f(x).$$

Todo se reduce a probar que b es una biyección. a) $\text{in}(b) = \text{or}(b)$, ya que para toda clase $x \cdot \ker(f)$ se verifica que $b(x \cdot \ker(f)) = f(x)$. b) b es aplicación, ya que $x \ker(f) = y \ker(f) \iff xy^{-1} \in \ker(f) \iff f(xy^{-1}) = 1 \iff f(x)[f(y)]^{-1} = 1 \iff f(x) = f(y) \iff b(x \cdot \ker(f)) = b(y \cdot \ker(f))$. c) b es homomorfismo. Ya que $b[(x \ker(f))(y \ker(f))] = b[xy \ker(f)] = f(xy) = f(x) \cdot f(y) = b(x \ker(f)) \cdot b(y \ker(f))$.

d) $\ker(b) = 1$. Recuérdese que el elemento unidad de $G/\ker(f)$ es $\ker(f)$, luego habrá que probar que $\ker(b) = \ker(f)$. En efecto, $b(x \ker(f)) = 1 \iff f(x) = 1 \iff x \in \ker(f)$. Recíprocamente, si $x \in \ker(f)$, $x \ker(f) = \ker(f)$ y $b(\ker(f)) = f(x) = 1$.

e) b es epimorfismo, ya que dado $f(x) \in \text{im}(f)$, se verifica que

$$b(x \cdot \ker(f)) = f(x).$$

DEFINICIÓN 12.—Dos grupos G y G' se llaman *isomorfos*, y se escribe:

$$G \approx G',$$

que se lee: G isomorfo a G' , cuando se puede establecer entre ellos un isomorfismo.

El teorema 7 se puede enunciar del siguiente modo:

8. PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA.—Si

$$G \xrightarrow{f} G'$$

es un homomorfismo de G en G' , se verifica que

$$(8) \quad G/\ker(f) \approx \text{im}(f).$$

EJERCICIOS:

190. Aplicar el primer teorema de isomorfía al siguiente homomorfismo: $Z \xrightarrow{f} Z$, $f(x) = nx$, siendo Z el grupo aditivo de los números enteros.

191. Sea Z el grupo aditivo de los números enteros, $K = \{0, 1, \dots, n-1\}$, un conjunto en el que se define la adición del siguiente modo: $x, y \in K$, $x + y = z \iff x + y = an + z$, $z < n$. Mediante esta adición es K un grupo. Sea $Z \xrightarrow{f} K$ la aplicación: $f(x) = y \iff x = pn + y$, $y < n$. Probar que f es un homomorfismo y aplicar el primer teorema de isomorfía.

192. Sea G un grupo multiplicativo no conmutativo; a un elemento arbitrario de G . Sea $G \xrightarrow{\varphi} G$ la correspondencia $\varphi(x) = axa^{-1}$. Demostrar que φ es un isomorfismo. A estos isomorfismos de G sobre G se les llama *automorfismos interiores de G* .

193*. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un subgrupo de un grupo sea normal es que se transforme en sí mismo en todos los automorfismos interiores del grupo.

DEFINICIÓN 13.—Se llama *automorfismo* de un grupo a los isomorfismos de dicho grupo sobre sí mismo.

EJERCICIOS:

194. Hallar todos los automorfismos del grupo aditivo Z de los números enteros.

DEFINICIÓN 14.—Sean G y G' dos grupos aditivos. Se representa por $\text{Hom}(G, G')$ al conjunto de todos los homomorfismos de G en G' . Se llama *suma* de los homomorfismos f y g , y se representa por $f + g$, a la aplicación de G en G' definida por

$$(f + g)x = fx + gx, \quad \forall x \in G.$$

9. El conjunto $\text{Hom}(G, G')$, con la definición de adición anterior, es un grupo aditivo abeliano si G' es abeliano.

DEMOSTRACIÓN.—a) $f + g$ es un homomorfismo de G en G' . En efecto, $f + g$ está definido en todo G y es una aplicación de G en G' . Además: $(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = [f(x) + g(x)] + [f(y) + g(y)] = (f + g)x + (f + g)y$. b) $(f + g)x = fx + gx = gx + fx = (g + f)x$.

c) La asociatividad es trivial.

d) La aplicación 0 , tal que $0(x) = 0'$, es un homomorfismo y es el elemento neutro.

e) El opuesto al homomorfismo f es $-f$, tal que $(-f)(x) = -[f(x)]$.

10. Dados dos homomorfismos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

la aplicación producto gf es también un homomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.— gf es una aplicación y $gf(x + y) = g[f(x + y)] = g[fx + fy] = g(fx) + g(fy) = (gf)x + (gf)y$.

11. Dados los homomorfismos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightleftharpoons[h]{g} C,$$

se verifica que

$$f(g + h) = fg + fh.$$

DEMOSTRACIÓN.— $f(g + h)x = f[(g + h)x] = f[gx + hx] = f(gx) + f(hx) = (fg)x + (fh)x = (fg + fh)x$.

DEFINICIÓN 15.—Se llama *endomorfismo* a todo homomorfismo de un grupo en sí mismo.

12. Si G es un grupo abeliano se verifica que $\text{End}(G)$, esto es, el conjunto de todos los endomorfismos de G es un conjunto con dos operaciones: una adición, respecto de la cual G es un grupo abeliano, y una multiplicación asociativa con elemento unidad y distributiva respecto de la adición.

4. Grupos finitos.

DEFINICIÓN 16. Se llama *grupo finito* a todo grupo con un número finito de elementos. Al número de elementos de un grupo finito se le llama *orden* del mismo.

EJERCICIOS:

195. ¿De qué orden es el grupo de las permutaciones con n elementos? ¿De qué orden es el grupo $Z/(n)$?

1. El orden de un subgrupo H de un grupo finito G es un divisor del orden de G .

DEMOSTRACIÓN.—Se ha visto que todo subgrupo H de un grupo G define en G una relación de igualdad R del siguiente modo: $xRy \iff x - y \in H$. Las clases correspondientes a esta relación de igualdad se obtienen sumando cada elemento x de G con cada uno de los elementos de H , y se representa por $x + H$. Como dos de estas clases, que sean distintas, no tienen ningún elemento común, se verifica que el número de elementos de G es la suma de los elementos de cada una de las clases, y como todas ellas tienen el mismo número de elementos que H , resulta que el número de elementos de G es múltiplo del número de elementos de H .

Al número de clases producido por la relación de igualdad determinada por un subgrupo H de un grupo finito G se le llama *índice* del subgrupo. Por consiguiente, se verifica que

$$(9) \quad \text{orden}(H) \cdot \text{índice}(H) = \text{orden}(G).$$

2. *Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea G un grupo finito, multiplicativo y de orden n :

$$(10) \quad G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}.$$

Con cada elemento g_i de G se calculan los productos:

$$g_i g_1 = g_{i_1}, \quad g_i g_2 = g_{i_2}, \dots, g_i g_n = g_{i_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y se hace corresponder a g_i , en una correspondencia φ entre G y el grupo S de las permutaciones con n elementos, la permutación:

$$(11) \quad \varphi(g_i) = (i_1, i_2, \dots, i_n),$$

$$G \xrightarrow{\varphi} S.$$

Se verifica: a) $\text{in}(\varphi) = \text{or}(\varphi)$. b) φ es una aplicación. c) φ es un homomorfismo. En efecto, sea

$$g_k g_{i_1} = g_{k i_1}, \dots, g_k g_{i_n} = g_{k i_n},$$

entonces sera:

$$\varphi(g_k) = (k_1, \dots, k_{i_1}, \dots, k_{i_n}, \dots, k_n).$$

Por consiguiente:

$$(g_k g_i) g_1 = g_k (g_i g_1) = g_k g_{i_1} = g_{k i_1}, \dots, (g_k g_i) g_n = g_k (g_i g_n) = g_k g_{i_n} = g_{k i_n}.$$

luego

$$(12) \quad \varphi(g_k g_i) = (k_{i_1}, \dots, k_{i_n}).$$

Por otra parte,

$$(13) \quad \varphi(g_k) \varphi(g_i) = (k_1, \dots, k_{i_1}, \dots, k_{i_n}, \dots, k_n) (i_1, \dots, i_n) = (k_{i_1}, \dots, k_{i_n}).$$

De (12) y (13) se deduce

$$\varphi(g_k g_i) = \varphi(g_k) \varphi(g_i).$$

d) φ es un homomorfismo inyectivo. En efecto, sea $\varphi(g_i) = \varphi(g_k)$, esto es:

$$\varphi(g_i) = (i_1, \dots, i_n) = \varphi(g_k) = (k_1, \dots, k_n),$$

luego

$$(14) \quad i_1 = k_1, \dots, i_n = k_n.$$

Como en G hay un elemento unidad, si éste es g_1 , se verifica que:

$$g_i g_1 = g_i, \text{ pero } g_i g_1 = g_{i_1}, \text{ luego } i = i_1,$$

análogamente:

$$g_k g_1 = g_k, \text{ pero } g_k g_1 = g_{k_1}, \text{ luego } k = k_1,$$

de estas relaciones y de (14) resulta que $i = k$, luego $g_i = g_k$. Como $\text{im}(\varphi)$ es un subgrupo de S , el primer teorema de isomorfía proporciona:

$$G \approx \text{im}(\varphi).$$

EJERCICIOS:

196. Si φ es un endomorfismo de un grupo finito G , ¿qué relación existe entre $\text{ord}(G)$, $\text{ord}(\ker \varphi)$ y $\text{ord}(\text{im } \varphi)$?

197. Si H y K son dos subgrupos de un grupo G , demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el conjunto de elementos $\{xH\}_{x \in K}$ esté formado por clases distintas es que $H \cap K = \{e\}$, siendo e el elemento unidad.

198. ¿Cuántos endomorfismos posee un grupo finito G ?

199. Calcular el número de endomorfismos del grupo de las permutaciones con cuatro elementos.

200. Si G es un grupo finito y $x \in G$, demostrar que el conjunto $\langle x \rangle$ formado por todos los elementos $x^n = x \dots x$ es un subgrupo conmutativo de G .

201. Probar que el conjunto Z formado por todos los elementos z de un grupo G que son permutables con todos los elementos del grupo, esto es, tales que $zx = xz$, para todo $x \in G$, es un subgrupo de G , llamado el *centro* de G .

5. Grupos abelianos.

DEFINICIÓN 17.—Se llama *grupo abeliano* o *conmutativo* a todo grupo que verifica la siguiente propiedad conmutativa:

Para todo par de elementos x, y del grupo se verifica:

$xy = yx$, si el grupo es multiplicativo, o

$x + y = y + x$, si el grupo es aditivo.

EJERCICIOS:

202. Comprobar que todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales. Si G es un grupo abeliano y H un subgrupo de G , G/H es un grupo respecto de la definición de adición de clases.

En lo que sigue escribiremos todos los grupos abelianos aditivamente.

OPERACIONES CON SUBGRUPOS DE UN GRUPO ABELIANO.

DEFINICIÓN 18.—Se llama *intersección* de dos subgrupos H y K de un grupo abeliano, y se representa por $H \cap K$, a la intersección de dichos grupos considerados como conjuntos.

1. La intersección de dos subgrupos de un grupo es otro subgrupo.

DEMOSTRACIÓN.—Si H y K son subgrupos de G , y si $x, y \in H \cap K$, se verifica que $x, y \in H$ y $x, y \in K$, luego $x - y \in H$ y $x - y \in K$, de donde $x - y \in H \cap K$, que prueba que $H \cap K$ es subgrupo de G . (Obsérvese que en esta demostración no se ha hecho uso de la conmutatividad y que por tanto el teorema es cierto también para grupos no abelianos.)

EJERCICIOS:

203 El conjunto (n) de todos los múltiplos de un número entero n es subgrupo del grupo aditivo Z de los números enteros. Demostrar que $(m) \cap (n) = (M)$, siendo M el m. c. m. (m, n) .

204. Empleando la misma notación del ejercicio anterior, comprobar que la unión conjuntista de los subgrupos (4) y (7) no es un subgrupo de Z .

DEFINICIÓN 19.—Si H y K son subgrupos de un grupo abeliano G , se llama *suma* de H y K , y se representa por $H + K$ al conjunto de todos los elementos de G que pueden obtenerse como suma de un elemento de H y otro de K , esto es:

$$(15) \quad x \in H + K \Leftrightarrow x = y + z, \quad y \in H, \quad z \in K.$$

2. La suma de dos subgrupos de un grupo abeliano es otro subgrupo del mismo.

DEMOSTRACIÓN.—Sean H y K subgrupos de G . Sea $x, y \in H + K$. De $x = z + z'$; $y = t + t'$; $z, t \in H$; $z', t' \in K$, se deduce que $x - y = (z + z') - (t + t') = (z - t) + (z' - t')$, $z - t \in H$, $z' - t' \in K$, luego $x - y \in H + K$.

EJERCICIOS:

205. Demostrar que la suma de los subgrupos (m) y (n) del grupo aditivo de los números enteros es el subgrupo (d) , siendo $d = \text{m. c. d. } (m, n)$.

206. Demostrar que si p y q son enteros primos entre sí se verifica que todo número entero x se puede expresar en la forma $x = yp + zq$.

207. Si H es un subgrupo de G y $n: G \rightarrow G/H$ es el homomorfismo natural, demostrar que si K' es un subgrupo de G/H , y si $n^{-1}(K')$ es el conjunto de todos los elementos $x \in G$ tales que $n(x) \in K'$, se verifica que $n^{-1}(K')$ es un subgrupo de G que contiene a H .

208. En las mismas hipótesis del ejercicio anterior, si K es un subgrupo de G , probar que $n^{-1}(n(K)) = K + H$.

209*. Teniendo en cuenta los ejercicios anteriores, probar el *segundo teorema de isomorfía*: si H y K son subgrupos de G se verifica que $H + K/K \approx H/H \cap K$.

DEFINICIÓN 20.—Si H y K son dos subgrupos de un grupo abeliano G y $H \cap K = \{o\}$, la suma $H + K$ se llama *suma directa* y se escribe $H \oplus K$. Un endomorfismo π de un grupo H se llama *proyector* cuando es igual a su cuadrado: $\pi^2(x) = \pi(x)$, para todo x de G .

3. Si π es un proyector del grupo G se verifica que

$$G = \ker(\pi) \oplus \text{im}(\pi).$$

DEMOSTRACIÓN.—a) Sea $x \in G$ y sea $y = x - \pi(x)$. Recordando que $\pi^2(x) = \pi(x)$ resulta que $\pi(y) = \pi(x) - \pi^2(x) = \pi(x) - \pi(x) = 0$, luego $y \in \ker \pi$ y $x \in \ker(\pi) + \text{im}(\pi)$. Como $\ker(\pi) + \text{im}(\pi) \subset G$, resulta que $G = \ker(\pi) + \text{im}(\pi)$.

b) $x \in \ker(\pi) \cap \text{im}(\pi) \implies \pi(x) = 0$, $x = \pi(y) \implies o = \pi(x) = \pi^2(y) = \pi(y) = x$.

4. Si $G = H \oplus K$, existe un proyector π cuyo núcleo es H y cuya imagen es K .

DEMOSTRACIÓN.—Sea x un elemento arbitrario de G , y $x = y + z$, $y \in H$, $z \in K$. Se define $\pi(x) = z$. a) π es una aplicación. En efecto, si $\pi(x) = z'$, sería $x = y' + z'$, $y' \in H$, $z' \in K$, de donde $y + z = y' + z'$ e $y - y' = z' - z \in H \cap K$, luego $y = y'$, $z = z'$. b) π es homomorfismo. Ya que si $x' = y' + z'$; $y, y' \in H$, $z, z' \in K$, es $x + x' = (y + y') + (z + z')$, de donde $\pi(x + x') = z + z' = \pi(x) + \pi(x')$. c) π es proyector. Puesto que si $x = y + z$, $y \in H$, $z \in K$, como $z = o + z$, $o \in H$, $z \in K$, se verifica que $\pi(x) = z$, $\pi(z) = z$, luego $\pi^2(x) = \pi(z) = z = \pi(x)$.

EJERCICIOS:

210. Sea $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En G se define la adición del siguiente modo: $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Demostrar que G es un grupo abeliano.

211. Sea G el grupo del ejercicio anterior y sean: G_1 el subconjunto formado por todos los elementos de la forma $(x_1, 0, 0)$; G_2 el subconjunto de los elementos de la forma $(0, x_2, 0)$; G_3 el subconjunto de los elementos de la forma $(0, 0, x_3)$. Demostrar: a) G_1 , G_2 y G_3 son subgrupos de G . b) $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$.

212. Demostrar que $G_i \approx \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$, siendo G_i los grupos del ejercicio anterior.

Si n es un número entero positivo, se define $n x$, siendo x un elemento de un grupo abeliano G por: $n x = x + \dots + x$. Análogamente, $0 x = 0$, siendo el 0 del primer miembro el número entero 0 y el del segundo el elemento neutro de G . Finalmente se define $(-n) x = -(n x)$, siendo $-n$ un entero negativo.

DEFINICIÓN 21.—Un *sistema de generadores de un grupo abeliano* G es un subconjunto S de G tal que todo elemento x de G se pueda expresar en la forma $x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$, siendo $g_i \in S$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$. Si el número de elementos de S es finito se dice que S es un *sistema finito de generadores* de G . Un grupo que admite un sistema finito de generadores se llama de *tipo finito*. Un sistema de generadores B de un grupo G se llama una *base* cuando de $x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$ y $x = a'_1 g'_1 + \dots + a'_m g'_m$ se deduce que $m = n$ y se pueden ordenar los términos de modo que $g_i = g'_i$, $i = 1, \dots, n$, $a_i = a'_i$, $i = 1, \dots, n$. Los grupos que admiten una base se llaman *grupos libres*.

EJERCICIOS:

213. Comprobar que el grupo G del ejercicio 210 es un grupo libre.

214. Si G es un grupo libre con una base con n generadores, se verifica que $G \approx \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, con la definición de adición en este último grupo: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

215. Sea G el grupo libre del ejercicio 210. Se define una aplicación v de G en $\mathbb{Z}^*$ siendo $\mathbb{Z}^*$ el conjunto de los enteros positivos, del siguiente modo: $v(x_1, x_2, x_3) = \text{m. c. d.}(x_1, x_2, x_3)$. Comprobar que $v(2, 4, 3) = 1$ y que se puede elegir una base de G en la que figure el elemento $(2, 4, 3)$.

216*. Sea $L = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y L' el subgrupo engendrado por $a = (2, 0, 6, 0)$, $b = (3, 6, -12, 0)$, $c = (3, -6, 30, 0)$, $d = (0, 4, 0, 12)$. Hallar una base, u_1, u_2, u_3, u_4 , de L tal que $f_1 u_1, f_2 u_2, f_3 u_3$, sea una base de L' .

217*. Si L y L' tienen el significado del ejercicio anterior, probar que

$$L/L' \approx \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}.$$

218*. Probar que si L y L' tienen el significado del ejercicio 216 se verifica que

$$L/L' \approx \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}.$$

219*. Probar que si p y q son dos números primos entre sí, se verifica que

$$\mathbb{Z}/(pq) \approx \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(q).$$

5. Si L es un grupo libre de tipo finito y L' un subgrupo de L , se puede construir una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de L tal que existen unos números enteros $f_1, \dots, f_n$, tales que: 1.º $f_1 | f_2 | \dots | f_n$. 2.º $B' = \{f_1 u_1, f_2 u_2, \dots, f_n u_n\}$ (en donde se prescinde de aquellos elementos cuyo coeficiente f_i sea cero) es una base de L' (*).

6. Si G es un grupo abeliano de tipo finito se verifica que

$$G \approx \mathbb{Z}/(f_1) \oplus \mathbb{Z}/(f_2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(f_n),$$

en donde $f_1 | f_2 | \dots | f_n$ son números enteros, llamados factores invariantes del grupo G .

DEMOSTRACIÓN.—Sean $\{g_1, \dots, g_n\}$ un sistema de generadores de G , y sea L el grupo libre enendrado por la base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Se define la aplicación

$$f: L \rightarrow G: f(a_1 x_1, \dots, a_n x_n) = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n.$$

f es un epimorfismo de L sobre G y el primer teorema de isomorfía proporciona:

$$G \approx L/\ker(f).$$

Como $\ker(f)$ es un subgrupo del grupo libre L se podrá hallar, en virtud de 5, una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de L tal que $B' = \{f_1 u_1, \dots, f_n u_n\}$ sea una base de $\ker(f)$. La correspondencia

$$L/\ker(f) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/(f_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(f_n)$$

definida por

$$\varphi[(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) + \ker(f)] = (x_1 + (f_1), \dots, x_n + (f_n))$$

es un isomorfismo.

(*) La demostración de este teorema puede hacerse siguiendo la marcha del ejercicio 216, como puede verse en ABELLANAS, *Matemática para físicos e ingenieros*. Romo, 1963. Madrid.

§ 4. ANILLOS

1. Anillos. Subanillos.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *anillo* a un conjunto A con dos operaciones, llamadas *adición* y *multiplicación*, respectivamente, tales que: 1.º) Respecto de la adición es A un grupo abeliano. 2.º) Respecto de la multiplicación es A un semigrupo. 3.º) La multiplicación es distributiva respecto de la adición, esto es, se verifica que para toda terna x, y, z de A es:

$$x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx.$$

Si existe un elemento 1 tal que para todo elemento x de A se verifique que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, se dice que 1 es *elemento unidad* del anillo y que el anillo posee elemento unidad. Si la multiplicación es conmutativa, el anillo se llama *conmutativo*.

EJERCICIOS:

220. ¿Es el conjunto Z de los números enteros un anillo? ¿De qué clase? ¿Es el conjunto P de los números enteros pares un anillo? ¿De qué clase?

221. ¿Es el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales y una variable un anillo? ¿Cuál es el elemento unidad?

222. ¿Es el conjunto de los polinomios de grado n con coeficientes reales y una variable un anillo?

223. ¿Es el conjunto de todos los múltiplos de un número entero m un anillo?

224. Sea Z el grupo aditivo de los números enteros. Sea $\text{End.}(Z)$ el conjunto de todos los endomorfismos de Z . Si x^* e y^* son dos endomorfismos de Z , se define: $(x^* + y^*)x = x^*x + y^*x$ e $(y^*x^*)x = y^*(x^*x)$, siendo x cualquier número entero. Probar que $\text{End.}(Z)$ es un anillo conmutativo y con elemento unidad.

225. Sea A un anillo arbitrario, y sea o el cero de la adición, esto es, $x + o = x$, para todo $x \in A$. Probar que $o \cdot x = x \cdot o = o$, para todo $x \in A$ y que $x(-y) = -(xy)$.

226. Sea S el conjunto de todos los múltiplos de un número entero n . Se verifica que el producto $s_1 s_2$ de dos elementos de S pertenece a S . Sea Z_s el conjunto de todas las fracciones tales que el numerador es entero y el denominador pertenece a S . Probar que Z_s es un anillo.

227. Sea S el conjunto de todos los números enteros que no son divisibles por el número primo p , y sea Z_p el conjunto de todas las fracciones cuyo numerador es entero y cuyo denominador pertenece a S . Probar que Z_p es un anillo.

DEFINICIÓN 2.—Se llama *subanillo* B de un anillo A a todo subconjunto B de A que sea anillo respecto de las operaciones de A .

Si B es un subanillo de A se verificará que la adición de A será también una operación de B , y recordando que una operación de B es una aplicación de $B \times B$ en B , se verificará que para todo par x, y de B , $x + y$ será también elemento de B . En B existirá un elemento neutro o' respecto de la adición, y si o es el elemento neutro de A respecto de la adición, será $y + o' = y$ para todo $y \in B$. Ahora bien, si x es cualquier elemento de A , será: $x + o' = [x + (-y + y)] + o' = [x + (-y)] + (y + o') = x + [(-y) + y] = x + o = x$, luego $o' = o$. Si x es un elemento arbitrario de B , se verificará que $-x \in B$. Por ser la multiplicación una operación de B , se verificará que para todo par (x, y) de B el producto xy pertenecerá a B .

Recíprocamente, sea B un subconjunto de un anillo A que posee las propiedades siguientes:

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Para todo par } x, y \text{ de } B \text{ se verifica que } x + y \in B, xy \in B \text{ e } yx \in B. \\ 2. \text{ El cero de } A \text{ pertenece a } B. \\ 3. \text{ Si } x \text{ pertenece a } B, -x \text{ pertenece también a } B. \end{array} \right.$

Si se verifican las condiciones [1], B es un subanillo de A . En efecto, en virtud de 1 la adición y la multiplicación de A son operaciones de B . La adición es asociativa y conmutativa en B por serlo en A ; la adición posee elemento neutro en B , y todo elemento de B posee opuesto en virtud de 2 y 3, respectivamente. La multiplicación en B es asociativa, por serlo en A , y es distributiva respecto de la adición por la misma razón.

1. *Un subconjunto B de un anillo A es un subanillo de A $\iff$ Para todo par x, y perteneciente a B se verifica que $x - y \in B$, $xy \in B$, y $yx \in B$.*

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probar que la segunda proposición implica las condiciones [1]. En efecto, si $x \in B$, de $x \in B$, $x \in B$ se deduce que $x - x \in B$, luego $o \in B$. Si $x \in B$, como $o \in B$, será $o - x = -x \in B$. Finalmente, si $x, y \in B$, se verifica que $x, -y \in B$, y de aquí resulta que $x - (-y) = x + y \in B$.

(Obsérvese que a este resultado se hubiera llegado directamente sin más que recordar las condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto B de un grupo sea subgrupo, y para que un subconjunto de un semigrupo sea semigrupo.)

EJERCICIOS:

228. ¿Es el subconjunto (m) de todos los múltiplos del número entero m un subanillo de $\mathbb{Z}$?

229. ¿Es el subconjunto $(p(x))$ de todos los múltiplos de un polinomio, un subanillo del anillo de los polinomios con coeficientes racionales y una variable?

2. Homomorfismos entre anillos. Isomorfismos.

Dada una aplicación $A \xrightarrow{f} B$ de un conjunto A en otro B , queda definida una aplicación de $A \times A$ en $B \times B$, que representaremos por la misma letra f , del siguiente modo:

$$f(x, y) = (fx, fy).$$

EJERCICIO:

230. Dada la aplicación $Z \rightarrow Z$ definida por $f(x) = 3x$, escribir las imágenes en $Z \times Z \rightarrow Z \times Z$ de $f(1, 2)$, $f(3, 5)$, $f(4, -2)$.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *homomorfismo* del anillo A en el anillo B , a toda aplicación f de A en B que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{f} & B \times B \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \cdot \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ + \uparrow & & \uparrow + \\ A \times A & \xrightarrow{f} & B \times B \end{array}$$

en donde las aplicaciones de $A \times A$ en A y de $B \times B$ en B son la adición y la multiplicación en A y en B , respectivamente.

La conmutatividad de [1] equivale a las siguientes igualdades:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f + (x, y) = + f(x, y), \\ f \cdot (x, y) = \cdot f(x, y), \end{array} \right.$$

para todo par (x, y) de $A \times A$. Las condiciones [2] pueden escribirse del siguiente modo:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x + y) = fx + fy, \\ f(x \cdot y) = fx \cdot fy. \end{array} \right.$$

EJERCICIO:

231. De las siguientes aplicaciones, decir cuáles son homomorfismos y cuáles no.
a) A es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales en una variable x ; B el conjunto de todos los números racionales; $A \xrightarrow{f} B$ es la aplicación $f(a_0 + a_1 x$

$+ \dots + a_n x^n) = a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n$, siendo m un número racional. b) A y B son el conjunto de los números enteros; $A \xrightarrow{g} B$ es la aplicación $g(x) = nx$, siendo n un número entero. c) A y B son el anillo de los números enteros; $A \xrightarrow{h} B$ se define así: $h(x) = x^n$ siendo n un número entero. d) A es el conjunto de los polinomios con coeficientes reales y una variable, y B es el conjunto de los números complejos. Se define $A \xrightarrow{j} B$ del siguiente modo:

$$j(a_0 + a_1 x + \dots + a_{2k} x^{2k}) = (a_0 + a_2 (-1) + a_4 (-1)^2 + \dots + a_{2k} (-1)^k) \\ + i(a_1 + a_3 (-1) + \dots + a_{2k-1} (-1)^{k-1})$$

y

$$j(a_0 + \dots + a_{2k+1} x^{2k+1}) = (a_0 + a_2 (-1) + \dots + a_{2k} (-1)^k) \\ + i(a_1 + a_3 (-1) + \dots + a_{2k+1} (-1)^k).$$

DEFINICIÓN 4.—Se llama *imagen* del homomorfismo $A \xrightarrow{f} B$, y se representa por $\text{im}(f)$, al conjunto de los elementos $x' \in B$ tales que

$$(4) \quad x' \in \text{im}(f) \Leftrightarrow x' = f(x), \quad x \in A.$$

Se llama *núcleo* de f , y se representa por $\ker(f)$, al conjunto de los elementos x de A tales que:

$$(5) \quad x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

1. Si f es un homomorfismo de A en B se verifica que $\text{im}(f)$ es un subanillo de B .

DEMOSTRACIÓN.—Sean $x', y' \in \text{im}(f)$. Esto es equivalente a $x' = fx$, $y' = fy$, de donde: $x' - y' = fx - fy = f(x - y) \in \text{im}(f)$ y $x'y' = fx \cdot fy = f(xy) \in \text{im}(f)$.

2. Si f es un homomorfismo de A en B se verifica que $\ker(f)$ es un conjunto de A que verifica las siguientes condiciones:

$$(6) \quad \begin{cases} 1) & x, y \in \ker(f) \Rightarrow x - y \in \ker(f). \\ 2) & x \in \ker(f), y \in A \Rightarrow xy \in \ker(f), yx \in \ker(f). \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.—1) $x, y \in \ker(f) \Leftrightarrow fx = 0, fy = 0 \Rightarrow fx - fy = 0 \Leftrightarrow f(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker(f)$.

2) $x \in \ker(f), y \in A \Leftrightarrow fx = 0, y \in A \Rightarrow fx \cdot fy = 0, fy \cdot fx = 0 \Leftrightarrow f(xy) = 0, f(yx) = 0 \Leftrightarrow xy \in \ker(f), yx \in \ker(f)$.

EJERCICIOS:

232. Si f es el homomorfismo f del ejercicio 231 a), comprobar que $\text{im}(f) = B$ y $\ker(f)$ es igual al conjunto de todos los polinomios múltiplos de $x - m$.

233. Sea A el anillo de polinomios con dos variables independientes y coeficientes racionales, y B el anillo de polinomios con una variable y coeficientes racionales. Sea $A \rightarrow B$ la aplicación $f(p(x, y)) = p(x, 0)$. Probar que f es un homomorfismo y calcular el núcleo y la imagen del mismo.

DEFINICIÓN 5.—Se llama *ideal por la izquierda* I del anillo A a todo subconjunto I de A que verifica las condiciones siguientes:

$$(7) \quad \begin{cases} 1) & x, y \in I \Rightarrow x - y \in I. \\ 2) & x \in I, y \in A \Rightarrow yx \in I. \end{cases}$$

Si en lugar de la condición 2) se verifica $xy \in I$, el ideal se llama *ideal por la derecha*, y si se verifican las dos, se llama *ideal bilátero*.

EJERCICIOS:

234. El núcleo de un homomorfismo es un ideal bilátero.

235. Sea I un ideal de A ; demostrar que la relación

$$x R y \Leftrightarrow x - y \in I$$

es una relación de igualdad.

236. Si A/I es el conjunto cociente de A respecto de la relación de igualdad definida por I , y si se define la adición $(x + I) + (y + I) = x + y + I$, y la multiplicación $(x + I)(y + I) = xy + I$, ¿es A/I un anillo cuando I es un ideal por la izquierda? ¿Y cuándo I es bilátero?

3. Si A es un anillo e I un ideal de A , la relación

$$(8) \quad x R y \Leftrightarrow x - y \in I$$

es una relación de igualdad. Al conjunto cociente de A respecto de la relación R lo representaremos por A/I y le llamaremos *conjunto cociente* de A respecto del ideal I .

4. Si I es un ideal bilátero de A , el conjunto cociente A/I se puede organizar como anillo mediante la siguiente definición:

$$\text{Adición: } (x + I) + (y + I) = x + y + I.$$

$$\text{Multiplicación: } (x + I)(y + I) = xy + I.$$

Al anillo A/I se le llama *anillo cociente de A respecto del ideal I* .

5. La aplicación suprayectiva natural

$$A \xrightarrow{n} A/I,$$

en la que $nx = x + I$, es un homomorfismo suprayectivo cuyo núcleo es I , llamado epimorfismo natural.

DEMOSTRACIÓN.— n es una aplicación. Sea $ny = y + I$, luego $n(x + y) = x + y + I = (x + I) + (y + I) = nx + ny$, $n(xy) = xy + I = (x + I)(y + I) = (nx)(ny)$. Dada la clase $x + I$, se verifica que $nx = x + I$, luego es un epimorfismo. Se verifica que $nx = 0 \iff x + I = 0 \iff x \in I$, luego $\ker(n) = I$.

EJERCICIOS:

237. Construir las tablas de sumar y de multiplicar del anillo $Z/(5)$, siendo Z el anillo de los enteros y (5) el ideal de los múltiplos de 5.

238. Construir la tabla de multiplicar del anillo $Z/(12)$.

239. Comparar la tabla de multiplicar del ejercicio anterior con la tabla de multiplicar ordinaria y con la tabla de multiplicar del ejercicio 237. ¿Qué diferencia se observa entre la tabla del ejercicio 238 y las otras dos? Compárense las filas de los números 1, 5, 7, 11 con las restantes filas de la tabla del ejercicio 238. ¿Qué diferencias se observan? ¿Existe algún elemento $x \neq 0$ de $Z/(12)$ tal que $x^2 = 0$? ¿Existe alguno tal que $x^2 = x$? ¿Existe algún elemento $u \neq 1$ tal que $2 \cdot u = 2$, $3 \cdot u_1 = 3$, $4 \cdot u_2 = 4$, $6 \cdot u_3 = 6$, $8 \cdot u_4 = 8$, $10 \cdot u_5 = 10$? ¿Sucede lo mismo para los elementos 1, 5, 7, 11? ¿Cómo son los números 1, 3, 7, 11 respecto de 12? ¿Cómo son los restantes?

240. Sea $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, siendo $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Se define en A la adición y la multiplicación del siguiente modo: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$; $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$. Demostrar que A es un anillo conmutativo. (El elemento (x, y) se llama igual al (z, t) y se escribe $(x, y) = (z, t)$ cuando $x = z$, $y = t$.)

241. ¿Qué elementos del anillo del ejercicio anterior no poseen inverso? ¿Existen elementos no nulos cuyo producto sea cero en el anillo del ejercicio anterior? ¿Existen elementos distintos del elemento unidad cuyo producto por otro elemento sea este último, excluido, naturalmente, el cero?

DEFINICIÓN 6.—Un elemento a de un anillo A se llama *divisor de cero* cuando se verifica que: 1.º) $a \neq 0$. 2.º) Existe otro elemento $b \neq 0$ tal que $ab = 0$. Un elemento b de un anillo A se llama *nilpotente* cuando existe un número entero positivo n tal que $b^n = 0$. Un elemento c de un anillo A se llama *idempotente* cuando $c^2 = c$. Un elemento u de un anillo A se llama *unidad parcial* cuando siendo distinto del elemento unidad del anillo existe un elemento d tal que $du = d$.

EJERCICIOS:

242. ¿Cuáles son los divisores de cero del anillo del ejercicio 238? ¿Cuáles son los elementos nilpotentes? ¿Cuáles los idempotentes? ¿Cuáles son unidades parciales?

243. Hallar todos los divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}/(30)$.

244. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que m sea divisor de cero de $\mathbb{Z}/(n)$ es que $\text{m. c. d.}(m, n) \neq 1$. ($0 < m < n$).

245. ¿Qué condición debe cumplir m , $0 < m < n$, para que sea nilpotente en $\mathbb{Z}/(n)$?

246. ¿Qué condición debe cumplir m , $0 < m < n$, para que sea idempotente en $\mathbb{Z}/(n)$?

DEFINICIÓN 7.—Un homomorfismo $A \xrightarrow{f} B$ del anillo A en el B se llama *suprayectivo*, o *epimorfismo*, cuando $\text{im}(f) = B$. Un homomorfismo f se llama *inyectivo* cuando $\ker(f) = 0$. Un epimorfismo inyectivo se llama *isomorfismo*. Si existe un isomorfismo entre los anillos A y B , éstos se llaman *isomorfos*, y se escribe $A \approx B$. Un homomorfismo de un anillo en sí mismo se llama *endomorfismo*. Un endomorfismo que sea isomorfismo se llama *automorfismo*.

6. TEOREMA DE ISOMORFÍA.—Todo homomorfismo $A \xrightarrow{f} B$ del anillo A en el B se puede descomponer en forma canónica del siguiente modo:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ n \downarrow & & \uparrow i \\ A/\ker(f) & \xrightarrow{b} & \text{im}(f) \end{array}$$

en donde el diagrama [8] es conmutativo, siendo n el homomorfismo natural, b un isomorfismo e i la inyección $i(x) = x$ para todo $x \in \text{im}(f)$.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que existe la descomposición [8] del homomorfismo f . Será $f = i \circ b \circ n$, de donde, si x es un elemento arbitrario de A , será:

$$f x = (i \circ b \circ n) x = i \circ b(n x) = i \circ b(x + \ker f) = b(x + \ker f),$$

luego b debe definirse del siguiente modo:

$$(9) \quad b(x + \ker f) = f x.$$

b es una aplicación. En efecto. $x + \ker f = y + \ker f \iff x - y \in \ker f$
 $\iff f(x - y) = 0 \iff f x = f y \iff b(x + \ker f) = b(y + \ker f)$.

b es un homomorfismo. En efecto: a) $b[(x + \ker f) + (y + \ker f)] = b(x + y + \ker f) = f(x + y) = fx + fy = b(x + \ker f) + b(y + \ker f)$.
 b) $b[(x + \ker f)(y + \ker f)] = b(xy + \ker f) = f(xy) = fx \cdot fy = b(x + \ker f) \cdot b(y + \ker f)$.

b es epimorfismo. En efecto, dado fx , se verifica que $b(x + \ker f) = fx$.

b es inyectivo, en efecto, $b(x + \ker f) = b(y + \ker f) \iff fx = fy \iff f(x - y) = 0, \iff x - y \in \ker f \iff x + \ker f = y + \ker f$.

En virtud de la definición 7 se puede escribir:

$$(10) \quad A/\ker(f) \approx \text{im}(f).$$

EJERCICIOS:

247. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales; representamos por $\mathbb{Q}[i]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales en la letra i , con la condición de que $i^2 = -1$. En $\mathbb{Q}[i]$ se definen la adición y la multiplicación como en el caso de polinomios con una indeterminada o variable. La relación $i^2 = -1$ permite escribir todo elemento de $\mathbb{Q}[i]$ en la forma canónica $a + bi$, siendo a y b números racionales. $\mathbb{Q}[i]$ es, evidentemente, un anillo. Probar que si $a + bi \neq 0$ existe el inverso de $a + bi$.

248. Sea $\mathbb{Q}[x]$ el conjunto de todos los polinomios en una indeterminada x con coeficientes racionales. $\mathbb{Q}[x]$ es un anillo. Sea $\mathbb{Q}[i]$ el anillo del ejercicio anterior, y sea f la aplicación:

$$\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{f} \mathbb{Q}[i]: f(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1i + \dots + a_ni^n.$$

Mostrar que

$$\mathbb{Q}[i] \approx \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1),$$

en donde $(x^2 + 1)$ representa el ideal formado por todos los polinomios de la forma $p(x)(x^2 + 1)$, $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

249. Sea G el subconjunto de $\mathbb{Q}[i]$ (ejercicio 247) formado por todos los elementos $a + bi$, tales que a y b sean enteros. El conjunto G es un subanillo de $\mathbb{Q}[i]$, llamado *anillo de los enteros de Gauss*. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el anillo de todos los polinomios en una indeterminada con coeficientes enteros. Probar que

$$G \approx \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1).$$

3. Anillos enteros. Ideales primos. Anillos euclídeos.

DEFINICIÓN 8.—Los anillos que no poseen divisores de cero se llaman *anillos enteros*. Un ideal $\mathfrak{p}$ de un anillo A se llama *primo* cuando el anillo cociente $A/\mathfrak{p}$ es entero.

EJERCICIOS:

250. ¿Qué condición debe cumplir p para que $\mathbb{Z}/(p)$ sea entero?

251. Sea $\mathbb{Q}[x]$ el conjunto de todos los polinomios en una indeterminada x con coeficientes de $\mathbb{Q}$. ¿Es $(x^2 - 5x + 6)$ un ideal primo? ¿Es primo $(x^2 - 2)$?

1. La condición necesaria y suficiente para que p sea un ideal primo de A es que $x \cdot y \in p$, $x \notin p \implies y \in p$.

DEMOSTRACIÓN.—Si p es primo y $(x + p)(y + p) = xy + p = o + p$ y $x + p \neq o + p$ será $y + p = o + p \iff y \in p$. Recíprocamente, si $(x + p)(y + p) = o + p$, y $x \notin p \implies y \in p \iff y + p = o + p$, el ideal p es primo.

DEFINICIÓN 9.—Un ideal a de un anillo A se llama *principal* cuando existe un elemento $a \in A$ tal que $x \in a \iff x = ya$, $y \in A$. El elemento a se llama una base del ideal a y se escribe $a = (a)$.

EL ANILLO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.—Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros.

2. Todo ideal a de $\mathbb{Z}$ es un ideal principal.

DEMOSTRACIÓN.—A todo número entero x le haremos corresponder el número no negativo: $v(x) = |x|$. Sea a un elemento de a tal que si x es otro elemento arbitrario de a se verifique que $v(a) \leq v(x)$, $v(a) \neq 0$. Si x es un elemento arbitrario de a , dividiendo x por a se obtiene:

$$(10) \quad x = qa + r, \quad v(r) < v(a).$$

De $a \in a$ se deduce que $qa \in a$ y de $x \in a$, $qa \in a$, se deduce que $x - qa = r \in a$, y de $v(r) < v(a)$ y la condición de mínimo de $v(a)$ resulta que $v(r) = 0$, pero $v(r) = |r| = 0$ implica $r = 0$, luego de (10) se deduce que

$$x = qa,$$

luego $a \subset (a)$, y como $(a) \subset a$, se obtiene $a = (a)$.

DEFINICIÓN 10.—Dados dos ideales a y b de un anillo conmutativo A , se llama *suma* de a y b , y se representa por $a + b$ al conjunto de todos los elementos de la forma $x + y$, $x \in a$, $y \in b$.

3. La suma de dos ideales es otro ideal.

DEMOSTRACIÓN.— $z, t \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \iff z = x + y, t = x' + y'; x, x' \in \mathfrak{a}, y, y' \in \mathfrak{b}$, luego $z - t = (x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Si $z \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ y $t \in A$, será $z = x + y, x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$, luego

$$tz = t(x + y) = tx + ty \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

De 2 y 3 se deduce:

4. Si (a) y (b) son dos ideales de Z , $(a) + (b) = (d)$ es otro ideal de Z y por tanto principal.

De 4 se deduce que $(a) \subset (d)$, $(b) \subset (d)$, luego:

$$(11) \quad a = a'd, \quad b = b'd, \quad a', b' \in Z,$$

luego d es divisor común a a y b .

Además, de $(a) + (b) = (d)$ se deduce que $d \in (a) + (b)$, luego:

$$(12) \quad d = ma + nb; \quad m, n \in Z,$$

luego [12] establece que todo divisor común de a y de b es divisor de d , luego d es el máximo común divisor de a y b . Las fórmulas [11] y [12] caracterizan al máximo común divisor de a y b .

De 4 se deduce el proceso para calcular d . En efecto, dividiendo a por b se obtiene:

$$a = qb + r, \quad v(r) < v(b), \quad b < a,$$

de donde:

$$r = a + (-q)b \in (a) + (b),$$

si $v(r) \neq 0$,

$$b = q_1 r + r_1, \quad v(r_1) < v(r),$$

implica que

$$r_1 = b + (-q_1)r \in (a) + (b),$$

así, siguiendo como $v(b) > v(r) > v(r_1) > \dots$, se llegará, después de un número finito de operaciones a $v(r_n) = 0$, de donde $r_n = 0$, y como:

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n = q_n r_{n-1},$$

será $r_{n-2} \in (r_{n-1})$, $r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \in (r_{n-1})$, ..., $b \in (r_{n-1})$, $a \in (r_{n-1})$, luego $(a) + (b) \subset (r_{n-1})$. Ahora bien, de

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-2} \\ r_{n-2} &= r_{n-3} - q_{n-2} r_{n-3} \\ &\vdots \\ r_1 &= b - q_1 r \\ r &= a - q b \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= r_{n-2} - q_{n-1} (r_{n-3} - q_{n-2} r_{n-3}) = (1 + q_{n-1} q_{n-2}) r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-4} \\ &= (1 + q_{n-1} q_{n-2}) (r_{n-4} - q_{n-3} r_{n-4}) - q_{n-1} r_{n-4} \\ &= (1 + q_{n-1} q_{n-2}) r_{n-4} - [(1 + q_{n-1} q_{n-2}) q_{n-3} + q_{n-1}] r_{n-5} \\ &= \dots = m a + n b, \end{aligned}$$

lo que prueba que $r_{n-1} \in (a) + (b)$, luego $(r_{n-1}) \subset (a) + (b)$ y $(r_{n-1}) = (a) + (b)$, luego $r_{n-1} = d$ es el máximo común divisor de a y b . El algoritmo anterior se conoce con el nombre de *algoritmo de Euclides*.

EJERCICIO:

252. Calcular el m. c. d. de 252 y de 186 y calcular m y n de la igualdad [12].

DEFINICIÓN 11.—Se llama *intersección* de dos ideales α y $\mathfrak{b}$, y se representa por $\alpha \cap \mathfrak{b}$, a la intersección de α y $\mathfrak{b}$ considerados como conjuntos.

5. La intersección de dos ideales es otro ideal.

DEMOSTRACIÓN.—a) $x, y \in \alpha \cap \mathfrak{b} \iff x, y \in \alpha, x, y \in \mathfrak{b} \implies x - y \in \alpha, x - y \in \mathfrak{b} \implies x - y \in \alpha \cap \mathfrak{b}$.

b) $x \in \alpha \cap \mathfrak{b}, y \in A \iff x \in \alpha, x \in \mathfrak{b}, y \in A \implies xy \in \alpha, xy \in \mathfrak{b} \implies xy \in \alpha \cap \mathfrak{b}$.

De 2 y 5 se deduce:

6. La intersección de dos ideales (a) y (b) de Z es otro ideal principal (M) de Z .

De 6 se deduce que $(M) \subset (a)$, $(M) \subset (b)$, luego $M = p a$, $M = q b$, luego M es múltiplo común de a y b . Si x es un múltiplo común de a y b , será $x = x' a$, $x = x'' b$, luego $x \in (a) \cap (b)$, luego $x \in (M)$ y $x = t M$, luego M es el mínimo común múltiplo de a y b .

De 6, (11) y (12) se deduce el método de cálculo del mínimo común múltiplo. En efecto, $M = p a = p a' d$, $M = q b = q b' d$, luego $p a' d = q b' d$, $p a' = q b'$, y como de [12] se deduce que $1 = m a' + n b'$, resulta $p = m a' p + n b' p = m q b' + n p b' = (m q + n p) b' = h b'$, $h = m q + n p$, luego de $p a' = q b'$ resulta $h b' a' = q b'$, $h a' = q$, luego $M = h b' a$, luego $(M) \subset (a b')$, y como $a b' = a' b \in (a) \cap (b) = (M)$, es $(a b') \subset (M)$, luego $(M) = (a b') = (a' b) = (a' b' d)$ y $M = a' b' d$.

EJERCICIO:

252. Calcular m. c. m. (252, 186).

EL ANILLO DE LOS POLINOMIOS CON UNA VARIABLE.—Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, y $\mathbb{Q}[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes de $\mathbb{Q}$.

Se define la aplicación $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{v} \mathbb{Z}^*$, siendo $\mathbb{Z}^*$ el conjunto de los enteros no negativos, del siguiente modo:

$$v(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \text{grado}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = n, \quad a_n \neq 0.$$

La aplicación v permite proceder con $\mathbb{Q}[x]$ como se ha hecho en $\mathbb{Z}$.

7. Todo ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{Q}[x]$ es ideal principal.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $p(x)$ un polinomio de $\mathfrak{a}$ tal que si $q(x)$ es otro polinomio cualquiera, distinto del cero, se verifique $0 < v(p(x)) \leq v(q(x))$. Si $q(x)$ es un polinomio cualquiera de $\mathbb{Q}[x]$, distinto de cero, dividiendo $q(x)$ por $p(x)$, se obtiene:

$$q(x) = h(x)p(x) + r(x), \quad v(r(x)) < v(p(x)),$$

de donde $r(x) = q(x) - h(x)p(x) \in \mathfrak{a}$, y como $v(r(x)) <$ que el valor positivo mínimo, será $r(x) = 0$. Luego $\mathfrak{a} = (p(x))$.

8. Si $(p(x))$ y $(q(x))$ son dos ideales arbitrarios de $\mathbb{Q}[x]$, el ideal $(p(x)) + (q(x)) = (d(x))$ es principal.

De 8 se deduce:

$$(13) \quad \begin{cases} p(x) = p_1(x) \cdot d(x), & q(x) = q_1(x) \cdot d(x). \\ d(x) = m(x)p(x) + n(x)q(x). \end{cases}$$

Las relaciones (13) caracterizan al polinomio $p(x)$, salvo un factor de proporcionalidad numérico. Si se elige $d(x)$ con la condición de que el coeficiente del término de mayor grado sea la unidad, al polinomio $d(x)$ así obtenido se le llama *máximo común divisor* de $p(x)$ y $q(x)$. Como en el caso de los números enteros, se puede emplear el algoritmo de Euclides para calcular el m. c. d. de dos polinomios.

EJERCICIOS:

254. Dados los polinomios $3x^5 - 2x^4 + x^2 + 1 = p(x)$ y $4x^3 + 2x + 3 = q(x)$, calcular el m. c. d. y los polinomios $m(x)$ y $n(x)$ de (13).

255. Hallar el m. c. d. de $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ y $x^3 + x^2 - 5x + 3$ y los polinomios $m(x)$ y $n(x)$.

De modo análogo a como se ha hecho en el caso del anillo Z , se ve que

$$(p(x)) \cap (q(x)) = (M(x)),$$

siendo $M(x) = p'(x) \cdot q'(x) \cdot d(x)$, $d(x) = \text{m. c. d.}(p(x), q(x))$, $p(x) = p'(x) \cdot d(x)$, $q(x) = q'(x) \cdot d(x)$. El polinomio $M(x)$ es el *mínimo común múltiplo* de $p(x)$ y $q(x)$.

EJERCICIOS:

256. Calcular el m. c. d. y el m. c. m. de $p(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 3x + 18$ y $q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$.

257. Demostrar que $\mathbb{Q}[x]/(x-p) \approx \mathbb{Q}$.

258. Sea A el conjunto de todos los elementos de la forma $ax + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, en donde se define la adición y la multiplicación como si se tratara de polinomios en la indeterminada x con la condición de sustituir x^2 por $x - 2$. Demostrar que $A \approx \mathbb{Q}[x]/(x^2 - x + 2)$.

259. Hallar los divisores de cero de $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$.

DEFINICIÓN 12.—Se llama *anillo euclídeo* a un anillo conmutativo y entero en el que existe una aplicación v del anillo en el semigrupo Z^* de los enteros no negativos tal que para dos elementos arbitrarios x, y del anillo tales que $v(x) \leq v(y)$ se verifique que $y = qx + r$, q, r pertenecen al anillo y $v(r) < v(x)$. En estos anillos se puede definir un algoritmo análogo al de Euclides y se puede trasladar a ellos todo lo visto para Z y para $\mathbb{Q}[x]$. En el caso de Z es $v(x) = |x|$, y en el caso de $\mathbb{Q}[x]$ es $v(f(x)) = \text{grado } f(x)$.

§ 5. CUERPOS

1. Cuerpo de fracciones de un anillo entero.—Sea A un anillo conmutativo y entero, esto es, sin divisores de cero. En $A \times A$ se define la siguiente relación R :

$$(1) \quad (x, y) R (x', y') \iff xy' = yx'.$$

1. La relación R es una relación de igualdad en $A \times A - \{(x, 0)\}$.

En efecto: a) $(x, y) R (x, y)$, ya que $xy = yx$.

$$b) \quad (x, y) R (x', y') \iff xy' = yx' \iff x'y = y'x \iff (x', y') R (x, y).$$

c) $(x, y) R (x', y')$ y $(x', y') R (x'', y'') \iff xy' = yx'$, $x'y'' = y'x'' \implies xy''(x'y') = yx''(x'y')$. Por ser (x, y) , (x', y') , (x'', y'') elementos de $A \times A - \{(x, 0)\}$ se verifica que $y' \neq 0$. Si $x' \neq 0$, de la última igualdad se deduce que $xy'' = yx''$, de donde $(x, y) R (x'', y'')$. Si fuese $x' = 0$, como $y' \neq 0$, de $xy' = yx'$ resultaría $x = 0$, y de $x'y'' = y'x''$ resultaría $x'' = 0$, luego $xy'' = 0 = yx''$ y $(x, y) R (x'', y'')$.

A la clase de $A \times A - \{(x, 0)\}/R$, representada por el par (x, y) la designaremos por $\frac{x}{y}$ y le llamaremos una *fracción*.

DEFINICIÓN 1.—En $K = A \times A - \{(x, 0)\}/R$ se define una *adición* del siguiente modo:

$$(2) \quad \frac{x}{y} + \frac{x'}{y'} = \frac{xy' + yx'}{yy'}$$

y una *multiplicación*, por

$$(3) \quad \frac{x}{y} \frac{x'}{y'} = \frac{xx'}{yy'}.$$

2. La adición es uniforme.

En efecto: sean (x, y) y (x', y') dos representantes de $\frac{x}{y}$, esto es:

$(x, y) R (x', y')$ y (z, t) y (z', t') dos representantes de $\frac{z}{t}$, es decir: $(z, t) R (z', t')$. De estas relaciones se deducen que $xy' = yx'$ y $zt' = tz'$, de donde:

$$(xt + yz)y't' = xy'(t't) + zt'(yy') = yx'(t't) + tz'(yy') = (x't' + z'y')yt,$$

de donde:

$$\frac{x t + y z}{y t} = \frac{x' t' + y' z'}{y' t'},$$

esto es:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{x'}{y'} + \frac{z'}{t'}.$$

3. La multiplicación es uniforme.

En efecto, de $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, $\frac{z}{t} = \frac{z'}{t'}$ se deduce $x y' = y x'$, $z t' = t z'$, de donde $x z y' t' = y t x' z' \iff \frac{x z}{y t} = \frac{x' z'}{y' t'} \iff \frac{x}{y} \frac{z}{t} = \frac{x'}{y'} \frac{z'}{t'}$.

4. El conjunto K es un grupo abeliano respecto de la adición.

En efecto: a) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \left(\frac{a d f}{b d f} + \frac{c b f}{b d f}\right) + \frac{b d e}{b d f} = \frac{a d f + c b f + b d e}{b d f}$
 $+ \frac{b d e}{b d f} = \frac{(a d f + c b f) + b d e}{b d f} = \frac{a d f + (c b f + b d e)}{b d f} = \frac{a d f}{b d f} + \frac{c b f + b d e}{b d f}$
 $= \frac{a}{b} + \left(\frac{c b f}{b d f} + \frac{b d e}{b d f}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right).$

$$b) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a d + b c}{b d} = \frac{b c + a d}{b d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

$$c) \quad \frac{a}{b} + \frac{0}{x} = \frac{a x}{b x} = \frac{a}{b}.$$

$$d) \quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a + (-a)}{b} = \frac{0}{b}, \text{ luego } -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$

5. El conjunto $K - \left\{\frac{0}{1}\right\}$ es un grupo respecto de la multiplicación.

En efecto: a) $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a c}{b d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{(a c) e}{(b d) f} = \frac{a (c e)}{b (d f)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c e}{d f} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right).$

$$b) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a c}{b d} = \frac{c a}{d b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

$$c) \quad \frac{r}{b} \cdot \frac{x}{x} = \frac{a x}{b x} = \frac{a}{b}.$$

$$d) \quad \text{Si } \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}, \quad \frac{b}{a} \text{ es una fracción y } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a b}{b a}.$$

6. La multiplicación es distributiva respecto de la adición.

En efecto: $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c f + d e}{d f} = \frac{a c f + a d e}{b d f} = \frac{a c f}{b d f} + \frac{a d e}{b d f}$
 $= \frac{a c}{b d} + \frac{a e}{b f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}.$

DEFINICIÓN 2.—Un conjunto K con dos operaciones, adición y multiplicación, tal que:

1. K es un grupo abeliano respecto de la adición.
2. $K - \{0\}$ es un grupo abeliano respecto de la multiplicación.
3. La multiplicación es distributiva respecto de la adición; se llama un *cuerpo*.

Todo lo anterior puede resumirse en la siguiente proposición:

7. *El conjunto K de las fracciones de un anillo entero A es, respecto de la adición y la multiplicación definidas en 1, un cuerpo, llamado cuerpo de fracciones del anillo A .*

2. El cuerpo de los números racionales.—A partir del anillo Z de los números enteros, se obtiene como cuerpo de fracciones el cuerpo Q de los números racionales. En el cuerpo de los números racionales se puede establecer una ordenación del siguiente modo:

DEFINICIÓN 3.—Un número racional $\frac{a}{b}$ (a y b enteros) se llama *positivo* cuando ab es un entero positivo. Los números racionales no positivos ni nulos se llaman *negativos*. Por consiguiente, se verifica que:

El conjunto de los números racionales es unión del conjunto Q^+ de los números racionales positivos, el cero y el conjunto Q^- de los números racionales negativos. Estos conjuntos son disjuntos entre sí.

Para la consistencia de la definición anterior es preciso ver que si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{a}{b}$ es positivo, $\frac{a'}{b'}$ también es positivo. En efecto, la igualdad anterior es equivalente a $ab' = ba'$, que implica $ab'(bb') = ba'(bb')$, equivalente a $ab b'^2 = a' b' b^2$ y como b'^2 y b^2 son enteros positivos, resulta que ab positivo equivale a $a' b'$ positivo.

1. Si $\frac{a}{b}$ es negativo se verifica que $-\frac{a}{b}$ es positivo. Ya que $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ y $ab < 0 \implies (-a)b > 0$.

2. $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son positivos implica que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} \frac{c}{d}$ son positivos.

En efecto, de $ab > 0$ y $cd > 0$ se deduce que $(ad + bc)bd = ab d^2 + cd b^2 > 0$, luego $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > 0$ y $(ac)(bd) = (ab)(cd) > 0$, luego $\frac{a}{b} \frac{c}{d} > 0$.

DEFINICIÓN 4.—El número racional $\frac{a}{b}$ es menor que el $\frac{c}{d}$, y se escribe $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ es positivo. Si el número $\frac{a}{b}$ es menor o igual al número $\frac{c}{d}$, se escribe $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

3. La relación $\leq$ es una relación de orden total.

DEMOSTRACIÓN.

$$a) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a b d^2 \leq c d b^2.$$

En efecto, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ es positivo $\Leftrightarrow (b c - a d) b d > 0$
 $\Leftrightarrow a b d^2 < c d b^2$. Por otra parte, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a d = b c \Leftrightarrow a d (b d) = b c (b a)$.

$$b) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} \text{ Ya que } a b b^2 \leq a b b^2.$$

$$c) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ y } \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Leftrightarrow a b d^2 \leq c d b^2 \text{ y } c d b^2 \leq a b d^2 \Leftrightarrow a b d^2 = c d b^2 \Leftrightarrow a d = b c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

d) $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Leftrightarrow a b d^2 \leq c d b^2$ y $c d f^2 \leq e f d^2$, de donde $a b d^2 f^2 \leq c d b^2 f^2$ y $c d b^2 f^2 \leq e f b^2 d^2$, y por la transitividad de la relación de ordenación de enteros, $a b d^2 f^2 \leq e f b^2 d^2$ y $a b f^2 \leq e f b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

e) Por ser la relación de ordenación en $\mathbb{Z}$ total, si no se verifica $a b d^2 \leq c d b^2$, se verificará $c d b^2 \leq a b d^2$, que equivale a $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$.

4. Se verifican las siguientes relaciones:

$$a) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{m}{n} \leq \frac{c}{d} + \frac{m}{n}, \text{ para todo } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$b) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ y } \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} + \frac{c'}{d'}.$$

$$c) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ y } \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \frac{m}{n} \leq \frac{c}{d} \frac{m}{n}.$$

$$d) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ y } \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow \frac{c}{d} \frac{m}{n} \leq \frac{a}{b} \frac{m}{n}.$$

$$e) \quad \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0.$$

EJERCICIOS:

260. Demostrar las relaciones a)-e)

5. Se verifican las siguientes relaciones:

a) $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, 0 < \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \implies \frac{a}{b} \frac{m}{n} < \frac{c}{d} \frac{p}{q}.$

b) $1 < \frac{a}{b}, 1 < \frac{c}{d} \implies 1 < \frac{a}{b} \frac{c}{d}.$

c) $1 < \frac{a}{b} \implies 1 < \left(\frac{a}{b}\right)^n, n \text{ natural}.$

d) $1 < \frac{a}{b}, m < n, m \text{ y } n \text{ naturales} \implies 1 < \left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

e) $0 < \frac{a}{b} < 1, 0 < \frac{c}{d} < 1 \implies 0 < \frac{a}{b} \frac{c}{d} < 1.$

f) $0 < \frac{a}{b} < 1, m < n, m \text{ y } n \text{ naturales} \implies 0 < \left(\frac{a}{b}\right)^n < \left(\frac{a}{b}\right)^m < 1.$

g) $0 < \frac{p}{q} < \frac{a}{b} < 1 \implies \exists n \text{ natural, tal que } 0 < \left(\frac{a}{b}\right)^n < \frac{p}{q}.$

EJERCICIOS:

261. Demostrar la proposición de 5.

262. Probar que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$, siempre que b y d tengan el mismo signo.

6. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y λ es un número racional arbitrario tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, se verifica que $\frac{a}{b} \leq \lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda) \frac{c}{d} \leq \frac{c}{d}.$

En efecto. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff \frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0 \iff \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$, luego: $\lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda) \frac{c}{d} = \lambda \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$, ya que $\lambda > 0, \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \implies \lambda \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) < 0$. Poniendo $1-\lambda = \mu, \lambda = 1-\mu$, será $0 < \mu$ y $\lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda) \frac{c}{d} = (1-\mu) \frac{a}{b} + \mu \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \mu \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \geq \frac{a}{b}.$

7. Entre dos números racionales distintos existen infinitos números racionales.

En efecto, en virtud de 6 existen tantos como números racionales existen entre cero y uno, ya que si $\frac{a}{b} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{c}{d}$, poniendo $\frac{x}{y} = \lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda) \frac{c}{d}$ se obtiene: $\frac{x}{y} = \lambda \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d}, \lambda = \left(\frac{c}{d} - \frac{x}{y}\right) \frac{bd}{ad-bc}$ y como $\frac{c}{d} - \frac{x}{y} \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$, resulta, por ser $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0$, que $\left(\frac{c}{d} - \frac{x}{y}\right) \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^{-1} \leq \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^{-1} = 1$. luego $\lambda \leq 1$ y $0 \leq \lambda$. Todos los números $\frac{1}{n}$ se hallan comprendidos entre 0 y 1.

3. El cuerpo de fracciones de un anillo de polinomios.—Sea $Q[x]$ el anillo de polinomios con una indeterminada x y coeficientes en un cuerpo Q , que generalmente supondremos el de los números racionales. En $Q[x]$ se define la igualdad del siguiente modo:

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \\ \Leftrightarrow m = n, a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n.$$

El cuerpo de fracciones de $Q[x]$ se representa por $Q(x)$. Por consiguiente, si $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$ son polinomios, la igualdad en $Q(x)$ viene definida por:

$$(2) \quad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{P_3(x)}{P_4(x)} \Leftrightarrow P_1(x) P_4(x) = P_2(x) P_3(x), P_2(x) \neq 0, P_4(x) \neq 0.$$

EJERCICIOS

263. Demostrar que si $P(x) \neq 0$, se verifica que $\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{P_1(x) P(x)}{P_2(x) P(x)}$

264. Demostrar que el cuerpo de fracciones de $Z[x]$, en donde $Z[x]$ es el anillo de polinomios con coeficientes enteros, es igual al cuerpo de fracciones de $Q[x]$.

Sea $\frac{A(x)}{B(x)}$ una fracción arbitraria de $Q(x)$. Supondremos que el representante $(A(x), B(x))$ elegido de esta fracción es tal que m. c. d. $(A(x), B(x)) = 1$; a tal representante le llamaremos *reducido*. Sea $Q[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$ el conjunto de todas las fracciones de $Q(x)$ que se obtienen al multiplicar la fracción $\left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$ por cada uno de los polinomios de $Q[x]$.

1. El conjunto $Q[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$ tiene las siguientes propiedades:

a) Es un subgrupo del grupo aditivo de $Q(x)$.

b) $f(x), g(x) \in Q[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$ y $E(x), F(x) \in Q[x] \Rightarrow$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. E(x) [f(x) + g(x)] = E(x) f(x) + E(x) g(x). \\ 2. [E(x) + F(x)] f(x) = E(x) f(x) + F(x) f(x). \\ 3. (E(x) F(x)) f(x) = E(x) [F(x) f(x)] \\ 4. 1 \cdot f(x) = f(x). \end{array} \right.$$

DEMOSTRACIÓN.—Las propiedades (3) son consecuencia de las leyes del cuerpo $\mathcal{Q}(x)$ y de la identificación $E(x) = \frac{E(x)}{1}$. Si $f(x) = E(x) \frac{A(x)}{B(x)}$ y $g(x) = G(x) \frac{A(x)}{B(x)}$, resulta, en virtud de (3), que

$$f(x) - g(x) = [E(x) - G(x)] \frac{A(x)}{B(x)} \in \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right).$$

DEFINICIÓN 5.—A un conjunto, tal como el $\mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$, que posee las propiedades 1 se le llama un *módulo* con el dominio de multiplicadores $\mathcal{Q}[x]$.

2. Si $C(x) \mid B(x)$ se verifica que $\mathcal{Q}[x] \frac{A(x)}{C(x)} \subset \mathcal{Q}[x] \frac{A(x)}{B(x)}$.

En efecto, $\frac{A(x)}{C(x)} = D(x) \frac{A(x)}{B(x)} \in \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$, siendo $B(x) = C(x) D(x)$, luego si $P(x)$ es cualquier polinomio, será $P(x) \frac{A(x)}{C(x)} \in \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$.

DEFINICIÓN 6.—Se llama *suma* del $\mathcal{Q}[x]$ -módulo $\mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$ y del $\mathcal{Q}[x]$ -módulo $\mathcal{Q}[x] \left(\frac{M(x)}{N(x)} \right)$, y se representa por

$$\mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right) + \mathcal{Q}[x] \left(\frac{M(x)}{N(x)} \right),$$

al conjunto de todas las fracciones de $\mathcal{Q}(x)$ que se pueden poner en la forma:

$$H(x) \frac{A(x)}{B(x)} + K(x) \frac{M(x)}{N(x)},$$

cuando $H(x)$ y $K(x)$ recorren todos los polinomios de $\mathcal{Q}[x]$.

3. La suma de dos $\mathcal{Q}[x]$ módulos es otro $\mathcal{Q}[x]$ módulo.

DEMOSTRACIÓN. — $\mathbf{M} = \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$, $\mathbf{N} = \mathcal{Q}[x] \left(\frac{C(x)}{D(x)} \right)$ y sea $d(x) = \text{m. c. d.}(B(x), D(x))$, $B(x) = B'(x) d(x)$, $D(x) = D'(x) d(x)$, y $\text{m. c. d.}(A D', C B') = e(x)$, siendo $A D' = L(x) \cdot e(x)$, $C B' = J(x) \cdot e(x)$. Sea $M(x) \frac{A(x)}{B(x)} + N(x) \frac{C(x)}{D(x)}$ un elemento arbitrario de $\mathbf{M} + \mathbf{N}$, será:

$$\begin{aligned} M(x) \frac{A(x)}{B(x)} + N(x) \frac{C(x)}{D(x)} &= \frac{M(x) A(x) D'(x) + N(x) C(x) B'(x)}{B'(x) D'(x) d(x)} \\ &= \frac{[M(x) L(x) + N(x) J(x)] e(x)}{B'(x) D'(x) d(x)} \in \mathcal{Q}[x] \frac{e(x)}{B'(x) D'(x) d(x)} = \mathbf{P}, \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{M} + \mathbf{N} \subset \mathbf{P}.$$

Sea $T(x) \frac{e(x)}{B'(x) D'(x) d(x)}$ un elemento arbitrario de $\mathbf{P}$. De

$$e(x) = R(x) A(x) D'(x) + S(x) C(x) B'(x),$$

se deduce que

$$\begin{aligned} T(x) \frac{e(x)}{B'(x) D'(x) d(x)} &= T(x) \left[\frac{R(x) A(x)}{B(x)} + \frac{S(x) C(x)}{D(x)} \right] \\ &= T(x) R(x) \frac{A(x)}{B(x)} + T(x) S(x) \frac{C(x)}{D(x)} \in \mathbf{M} + \mathbf{N}, \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{M} + \mathbf{N}.$$

y, por tanto,

$$\mathbf{M} + \mathbf{N} = \mathbf{P}.$$

OBSERVACIONES.—1. El denominador $B'(x) D'(x) d(x)$ de $\mathbf{P}$ es el mínimo común múltiplo de $B(x)$ y $D(x)$.

2. Si $A(x)$ y $B(x)$ son dos polinomios de $\mathcal{Q}[x]$, existen otros dos polinomios, $q(x)$ y $r(x)$, unívocamente determinados por las siguientes condiciones: 1.º $A(x) = q(x) B(x) + r(x)$. 2.º $\text{grad. } r(x) < \text{grad. } B(x)$.

4. Si $B(x) = B_1(x) \dots B_s(x)$, $(B_1(x), B_j(x)) = 1$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, s$
 $B'_1 = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s B_j$, se verifica que m. c. d. $(B'_1, \dots, B'_s) = 1$, de donde:

$$(4) \quad 1 = R_1(x) B'_1 + \dots + R_s(x) B'_s$$

Y, además, se verifica que

$$(5) \quad \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right) = \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x) R_1(x)}{B_1(x)} \right) + \dots + \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x) R_s(x)}{B_s(x)} \right).$$

DEMOSTRACIÓN.—1.º $\frac{A(x) R_i(x)}{B_i(x)} = B'_i(x) R_i(x) \frac{A(x)}{B(x)} \implies \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x) R_i(x)}{B_i(x)} \right) \subset \mathcal{Q}[x] \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)$ $i = 1, \dots, s. \implies$ segundo miembro de (5) está contenido en el primer miembro.

y como

$$\text{grado}(r_i B'_i) = \text{grado}(r_i) + \text{grado}(B'_i) < \text{grado}(B_i) + \text{grado}(B'_i) = \text{grado}(B),$$

resulta que $\text{grado}(r_1 B'_1 + \dots + r_s B'_s) < \text{grado}(B)$, luego, por la observación segunda anterior:

$$P(x) = q_1(x) + \dots + q_s(x), \quad a(x) = r_1 B'_1 + \dots + r_s B'_s.$$

7. Si $B_i(x) = (x - a_i)^{a_i}$, como $\text{grad.}(r_i(x)) < \text{grad.}(B_i(x))$, si

$$(9) \quad r_i(x) = a_{i1} + a_{i2}(x - a_i) + \dots + a_{ia_i}(x - a_i)^{a_i-1}$$

se verifica que

$$(10) \quad \frac{r_i(x)}{B_i(x)} = \frac{a_{i1}}{(x - a_i)^{a_i}} + \frac{a_{i2}}{(x - a_i)^{a_i-1}} + \dots + \frac{a_{ia_i}}{x - a_i},$$

y los coeficientes $a_{i1}, \dots, a_{ia_i}$ están unívocamente determinados por $\frac{r_i(x)}{B_i(x)}$.

DEMOSTRACIÓN.—Dividiendo (9) por $B_i(x) = (x - a_i)^{a_i}$ resulta (10). Supongamos que fuera

$$(11) \quad \frac{r_i(x)}{B_i(x)} = \frac{b_{i1}}{(x - a_i)^{a_i}} + \frac{b_{i2}}{(x - a_i)^{a_i-1}} + \dots + \frac{b_{ia_i}}{x - a_i},$$

Multiplicando (11) por $B_i(x)$, sería:

$$r_i(x) = b_{i1} + b_{i2}(x - a_i) + \dots + b_{ia_i}(x - a_i)^{a_i-1}$$

de ésta y de (9) se obtiene:

$$(12) \quad (a_{i1} - b_{i1}) + (a_{i2} - b_{i2})(x - a_i) + \dots + (a_{ia_i} - b_{ia_i})(x - a_i)^{a_i-1} = 0,$$

de donde, dando a x el valor a_i , resulta $a_{i1} = b_{i1}$. Supuesto demostrado que $a_{ij} = b_{ij}$, $j = 1, \dots, j$, de (12) se obtendría:

$$(a_{ij+1} - b_{ij+1})(x - a_i)^j + \dots + (a_{ia_i} - b_{ia_i})(x - a_i)^{a_i-1} = 0,$$

y como $(x - a_i)^j \neq 0$, sería

$$(a_{ij+1} - b_{ij+1}) + \dots + (a_{ia_i} - b_{ia_i})(x - a_i)^{a_i-1-j} = 0,$$

y para $x = a_i$, resultaría $a_{ij+1} = b_{ij+1}$.

de (13) y (14) resultaría:

$$(m_{j1} - p_{j1})x + n_{j1} - q_{j1} = H(x)(x^2 + b_j x + c_j),$$

de donde, por tener que poseer los polinomios de ambos miembros el mismo grado, resulta que:

$$(m_{j1} - p_{j1})x + n_{j1} - q_{j1} = 0, \quad H(x) = 0,$$

y la primera implica que $m_{j1} = p_{j1}$, $n_{j1} = q_{j1}$. Repitiendo sucesivamente el razonamiento con $H(x) = 0$, queda probada la unicidad.

DEFINICIÓN 7.—A las fracciones de la forma $\frac{a}{(x-b)^\beta}$ y $\frac{mx+n}{(x^2+ax+b)^\gamma}$, en donde a , b , m y n son números de K , y α y β números naturales, se les llama *fracciones simples*.

9. TEOREMA 1.—Si el polinomio $B(x)$ admite la descomposición factorial:

$$B(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_s)^{\alpha_s} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \dots (x^2+b_rx+c_r)^{\beta_r},$$

siendo $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, y siendo los polinomios $x^2 + b_i x + c_i$ primos y primos entre sí, y si $A(x)$ es otro polinomio arbitrario, siendo

$$A(x) = q(x)B(x) + r(x), \quad \text{grad}(r(x)) < \text{grad}(B(x)),$$

se verifica que la descomposición:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A(x)}{B(x)} &= q(x) + \left(\frac{a_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{a_{1\alpha_1}}{x-a_1} \right) + \dots + \left(\frac{a_{s1}}{(x-a_s)^{\alpha_s}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{s\alpha_s}}{x-a_s} \right) + \left(\frac{m_{11}x+n_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{m_{1\beta_1}x+n_{1\beta_1}}{x^2+b_1x+c_1} \right) + \dots \\ &\quad \left. + \left(\frac{m_{r1}x+n_{r1}}{(x^2+b_rx+c_r)^{\beta_r}} + \dots + \frac{m_{r\beta_r}x+n_{r\beta_r}}{x^2+b_rx+c_r} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

en fracciones simples es única.

DEMOSTRACIÓN.—De 4 y 5 se deduce que la descomposición (5) está únicamente determinada por $\frac{A(x)}{B(x)}$. La descomposición (7) de 6 es también única, ya que si $\frac{a(x)}{B(x)} = \frac{r'_1(x)}{B_1(x)} + \dots + \frac{r'_s(x)}{B_s(x)}$,

$$(16) \quad \text{grad}(r'_i(x)) < \text{grad}(B_i);$$

de esta relación y de (7), resultaría:

$$(r'_s - r_s) B'_s = (r'_1 - r_1) B'_1 + \dots + (r'_{s-1} - r_{s-1}) B'_{s-1},$$

y de (4) se obtendría:

$$\begin{aligned} r'_s - r_s &= R_1 (r'_s - r_s) B'_1 + \dots + R_{s-1} (r'_s - r_s) B'_{s-1} + R_s [(r'_1 - r_1) B'_1 + \dots \\ &\quad + (r'_{s-1} - r_{s-1}) B'_{s-1}] = [R_1 (r'_s - r_s) + R_s (r'_1 - r_1)] B'_1 + \dots + [R_{s-1} (r'_s - r_s) \\ &\quad + R_s (r'_{s-1} - r_{s-1})] B'_{s-1}, \end{aligned}$$

y como todas las $B'_1, \dots, B'_{s-1}$ son divisibles por B_s , el grado del segundo miembro es mayor o igual al grado de B_s , mientras que de (6) y (16) resulta que $\text{grad}(r'_s - r_s) < \text{grad}(B_s)$, luego $r'_s - r_s = 0$, y como el razonamiento es válido para $s = 1, \dots, s$, queda probada la unicidad de la descomposición (7). Finalmente, 7 y 8 prueban la unicidad de las descomposiciones (10) y (11), respectivamente.

EJERCICIOS:

265. Descomponer en fracciones simples la fracción racional: $\frac{x^5 - 4x^3 + x - 2}{x^3 - 3x + 2}$, sabiendo que $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$.

266. Descomponer en fracciones simples la fracción racional: $\frac{x^3 - x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2(x-1)^2}$.

CAPITULO SEGUNDO

EL ESPACIO VECTORIAL

§ 1. EL ESPACIO VECTORIAL

1. Definiciones.—Sea K un cuerpo arbitrario, que el lector puede suponer el de los números racionales. Consideremos el conjunto V producto de K por sí mismo n -veces:

$$(1) \quad V = K^n = K \times K \times \dots \times K.$$

Los elementos de V son de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in K$, $i = 1, \dots, n$. La definición de producto de conjuntos establece la siguiente definición de igualdad:

$$(2) \quad (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

DEFINICIÓN 1.—Se define una aplicación de $V \times V$ en V , llamada *adición*, del siguiente modo:

$$(3) \quad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

1. EL CONJUNTO V ES UN GRUPO ABELIANO RESPECTO DE LA ADICIÓN (3).

DEMOSTRACIÓN.—a) *Asociatividad*:

$$\begin{aligned} & [(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] + (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n) \\ & = ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) = (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ & = (x_1, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) = (x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)]. \end{aligned}$$

b) *Conmutatividad*. Es trivial.

c) *Elemento neutro*. Si 0 es el cero del cuerpo K, se verifica que, para cualquier elemento de V, es:

$$(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, \dots, x_n).$$

d) *Elemento opuesto*. Dado el elemento $(x_1, \dots, x_n)$ de V, el elemento $(-x_1, \dots, -x_n)$ posee la propiedad:

$$(x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, \dots, 0),$$

por lo que al elemento $(-x_1, \dots, -x_n)$ se le llama opuesto al elemento $(x_1, \dots, x_n)$ y se le representa por $-(x_1, \dots, x_n)$.

DEFINICIÓN 2.—Se define una aplicación de $K \times V$ en V, llamada multiplicación de elementos de K por elementos de V, del siguiente modo:

$$(4) \quad a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n), \quad a \in K, (x_1, \dots, x_n) \in V.$$

2. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE ELEMENTOS DE K POR ELEMENTOS DE V.

I. Para todos $a, b \in K$ y $(x_1, \dots, x_n) \in V$, se verifica que:

$$(a + b)(x_1, \dots, x_n) = a(x_1, \dots, x_n) + b(x_1, \dots, x_n).$$

II. Para todo $a \in K$ y $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in V$, se verifica que:

$$a[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] = a(x_1, \dots, x_n) + a(y_1, \dots, y_n).$$

III. Para todo $a, b \in K$ y todo $(x_1, \dots, x_n) \in V$ se verifica que:

$$(ab)(x_1, \dots, x_n) = a[b(x_1, \dots, x_n)].$$

IV. Si 1 es el elemento unidad de K:

$$1 \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

DEMOSTRACIÓN I.

$$\begin{aligned} (a + b)(x_1, \dots, x_n) &= ((a + b)x_1, \dots, (a + b)x_n) = (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n) = a(x_1, \dots, x_n) + b(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} a[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] &= a(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= [a(x_1 + y_1), \dots, a(x_n + y_n)] = (ax_1 + ay_1, \dots, ax_n + ay_n) \\ &= (ax_1, \dots, ax_n) + (ay_1, \dots, ay_n) = a(x_1, \dots, x_n) + a(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}(a \ b) (x_1, \dots, x_n) &= ((a \ b) x_1, \dots, (a \ b) x_n) = (a (b x_1), \dots, a (b x_n)) \\ &= a (b x_1, \dots, b x_n) = a [b (x_1, \dots, x_n)].\end{aligned}$$

IV.

$$1 (x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

DEFINICIÓN 3.—Al conjunto V con las dos operaciones establecidas en las definiciones 1 y 2 se le llama un *espacio vectorial* y a sus elementos *vectores*.

EJERCICIOS:

267. Demostrar que: a) $0 (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. b) $a (0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$. c) $(-1) (x_1, \dots, x_n) = -(x_1, \dots, x_n)$.

268. Probar que $(x_1, \dots, x_n) = x_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 0, 1)$.

269. Probar que si $x_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 0, 1) = y_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + y_n (0, \dots, 0, 1)$ se verifica que $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

2- Concepto de vector libre.

DEFINICIÓN 4.—Se llama *vector* en el espacio euclídeo ordinario a un segmento $\overline{AB}$ cuyos extremos se dan en un cierto orden. Por consiguiente, un vector es el par formado por un segmento $\overline{AB}$ y la ordenación: A es el **pri**mer extremo, B es el segundo extremo. Al primer extremo de un vector se le llama *origen* del vector, y al segundo *extremo*. Al vector formado por el segmento $\overline{AB}$, el origen A y el extremo B se le designa por $\overrightarrow{AB}$.

En geometría elemental se demuestra el siguiente:

TEOREMA REDUCIDO DE DESARGUES.—I. ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos situados en el mismo plano o en planos paralelos tales que $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $AA' \parallel BB'$ (fig. 20). Se verifica que:

$$BC \parallel B'C' \Leftrightarrow CC' \parallel AA'.$$

Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de todos los vectores del espacio. En $\mathcal{V}$ se define una relación, llamada *equi*-*polencia*, que representamos por el signo $\sim$, del siguiente modo:

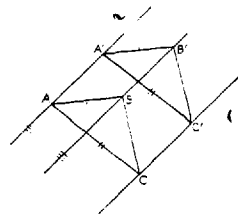


Fig. 20.

DEFINICIÓN 5.—Se dice que el vector $\overrightarrow{AB}$ es *equipolente* al vector $\overrightarrow{CD}$,

y se escribe: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, cuando: a) Si las rectas AB y CD son distintas, se verifica que la figura $ABCD$ es un paralelogramo. b) Si las rectas AB y CD coinciden, existe otro vector $\overrightarrow{MN}$ tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{MN}$ según la definición anterior (fig. 21).

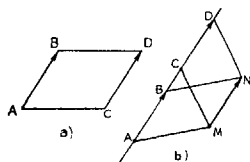


Fig. 21.

1. La relación de equipolencia es una relación de igualdad.

DEMOSTRACIÓN.—a) Sea $\overrightarrow{AB}$ un vector arbitrario y $ABCD$ un paralelogramo uno de cuyos lados es $\overrightarrow{AB}$. En virtud de la definición 5, b) se verifica que

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}.$$

b) Sea $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Si AB y CD son rectas distintas (fig. 21 a), la figura $ABCD$ es un paralelogramo, luego también lo es $CDBA$ y, por tanto, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$. Si las rectas AB y CD coinciden, existe un vector $\overrightarrow{MN}$ tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{MN}$ (fig. 21 b), luego $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN}$, que expresa que $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.

c) Si $\overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{CC'}$, pueden presentarse los siguientes casos: 1.º) Las rectas AA' , BB' y CC' son distintas. En este caso (fig. 20) se verifica que $BB'A'A$ y $AA'CC'$ son paralelogramos, luego $BB' \parallel AA'$, $AA' \parallel CC'$, $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$; luego, por el teorema reducido de Desargues I, se verifica que $BC \parallel B'C'$ y la figura $BB'C'C$ es también un paralelogramo, luego $\overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{CC'}$. El lector demostrará como ejercicio alguno de los siguientes casos: 2.º) La recta BB' coincide con la recta AA' . 3.º) La recta BB' coincide con la recta CC' . 4.º) Las tres rectas AA' , BB' y CC' coinciden.

DEFINICIÓN 6.—A las clases definidas por la relación de equipolencia se les llama *vectores libres*, y al conjunto cociente $\mathcal{V}/\sim = V$ se le llama *espacio de los vectores libres*. A los vectores libres los representaremos por letras negritas minúsculas o encerrando entre paréntesis rectangular a uno de sus representantes; por ejemplo: $\mathbf{a} = [\overrightarrow{AB}]$.

2. Si $\mathbf{a} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\mathbf{b} = [\overrightarrow{CD}]$, se verifica que

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que los vectores libres son conjuntos de vectores, luego la igualdad de dos vectores libres es la igualdad de dos conjuntos, y como estos conjuntos son clases relativas a una relación de igualdad, la igualdad de las clases equivale (Criterio de igualdad de clases, 3, § 2, Cap. I) a que un representante de una esté relacionado por la relación de igualdad con un representante de la otra.

3. Si $\mathbf{a}$ es un vector libre y O un punto arbitrario del espacio, existe un representante único de $\mathbf{a}$ con origen O .

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\overrightarrow{AB}$ un representante de $\mathbf{a}$. Supongamos que O no pertenece a la recta AB . En el plano ABO tracemos las rectas $OP \parallel AB$, $BP \parallel AO$, con lo que se obtiene el paralelogramo $ABPO$, luego $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB}$ y, por tanto, $\overrightarrow{OP}$ es representante de $\mathbf{a}$ con origen O . Si $\overrightarrow{OQ}$ fuera otro representante de $\mathbf{a}$, la figura $ABQO$ sería paralelogramo, luego $QB \parallel AO$ y $QO \parallel AB$, de donde $QB \parallel PB$ y $QO \parallel PO$, luego $PB = QB$ y $QO = PO$ y $Q = P$. Si O perteneciese a la recta AB se tomaría un punto O' exterior a ella, se construiría el representante $\overrightarrow{O'P'}$ con origen O' y, empleando éste, se construiría el representante con origen O .

ADICIÓN DE VECTORES LIBRES. DEFINICIÓN 7.—Dados dos vectores libres, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, se llama *suma*, y se representa por $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, al vector libre obtenido mediante la siguiente construcción: se toma un punto arbitrario, O , del espacio, el representante $\overrightarrow{OA}$ del vector $\mathbf{a}$ y el representante $\overrightarrow{AB}$ del vector $\mathbf{b}$ (fig. 22) y

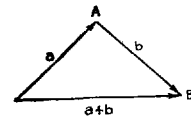


Fig. 22.

$$(5) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = [\overrightarrow{OB}].$$

4. La adición de vectores libres es una aplicación de $V \times V$ sobre V .

DEMOSTRACIÓN.—Sea O' otro punto arbitrario del espacio, $\overrightarrow{O'A'}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ representantes de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente. Supongamos que las rectas OA

y $O'A'$ sean distintas y lo mismo AB y $A'B'$ y OB y $O'B'$. Entonces los

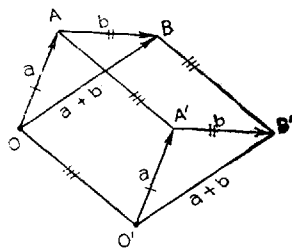


Fig. 23.

triángulos OAB y $O'A'B'$ son tales que $OA \parallel O'A'$, $AB \parallel A'B'$ y $OO' \parallel AA' \parallel BB'$ (fig. 23); luego, por el teorema reducido de Desargues I, se verifica que $OB \parallel O'B'$, y la figura $OB B'O'$ es un paralelogramo, luego

$\vec{OB} \sim \vec{O'B'}$ y $[\vec{OB}] = [\vec{O'B'}]$. Si algún par de las rectas anteriores coincidiera, se podría reducir la demostración al caso considerado utilizando otro punto auxiliar O'' . Se trata, por tanto, de una aplicación, siempre que

se considere que el conjunto de todos los vectores cuyo origen coincide con su extremo forman un vector libre $[\vec{XX}] = \mathbf{0}$, que representamos por $\mathbf{0}$. Como todo vector libre se puede considerar como suma de él mismo con este vector $\mathbf{0}$, la aplicación es suprayectiva.

5. El conjunto de los vectores libres V es un grupo abeliano respecto de la adición (5).

DEMOSTRACIÓN.—1. Asociatividad. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tres vectores libres, y sean $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ representantes de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, respectivamente (fig. 24). Se verifica que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\vec{OB}]$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = [\vec{AC}]$ y $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = [\vec{OC}] = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

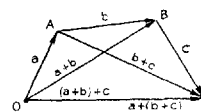


Fig. 24.

2. Conmutatividad (fig. 25). Sean $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ representantes de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}$, respectivamente. Por consiguiente, $OACB$ es un paralelogramo y $\vec{OB} \sim \vec{AC}$, luego $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

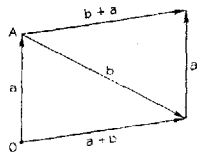


Fig. 25.

3. Elemento neutro. El vector libre $\mathbf{0} = [\vec{XX}]$ es el elemento neutro, ya que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = [\vec{OA}] + [\vec{AA}] = [\vec{OA}] = \mathbf{a}$.

4. Elemento opuesto. Dado el vector libre $\mathbf{a} = [\vec{AB}]$, se verifica que $\mathbf{a} + [\vec{BA}] = [\vec{AB}] + [\vec{BA}] = [\vec{AA}] = \mathbf{0}$, luego $-\mathbf{a} = [\vec{BA}]$.

A la suma de un vector $\mathbf{a}$ y el opuesto a un vector $\mathbf{b}$ se la representa del siguiente modo:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

y se le llama *diferencia* entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

3. El cuerpo de las razones de segmentos.—En geometría se demuestra el siguiente:

TEOREMA REDUCIDO DE DESARGUES. II.—Si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos tales que $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ y AA' corta a BB' en O , se verifica que $BC \parallel B'C'$ $\Leftrightarrow O \in CC'$ (fig. 26).

Este teorema es verdad tanto si los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en el mismo plano como si están en planos distintos (y por tanto paralelos).

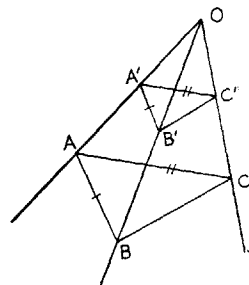


Fig. 26.

DEFINICIÓN 8.—Dos segmentos se llaman *iguales*: $\overline{AB} \text{ I } \overline{CD}$ cuando existe un movimiento del espacio que transforma uno en otro. Si S es el conjunto de todos los segmentos del espacio, al conjunto cociente de S respecto de la relación de igualdad I lo representaremos por Σ : $\Sigma = S/I$ y a sus elementos los llamaremos segmentos generales.

Por ser los segmentos generales clases relativas a una relación de igualdad, se verifica:

1. Si $a = [\overline{AB}]$, $\bar{b} = [\overline{CD}]$:

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \overline{AB} \text{ I } \overline{CD}.$$

2. Dado un segmento general $\bar{a} = [\overline{AB}]$ y una semirrecta r de origen O , existe un único representante $\overline{OP}$ de $\bar{a}$ contenido en r y con origen O .

DEFINICIÓN 9.—Dados dos segmentos generales $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se llama *suma* de ambos, y se representa por $\bar{a} + \bar{b}$, al segmento general obtenido mediante la siguiente construcción: se toma una semirrecta arbitraria, r (fig. 27), de origen O , se

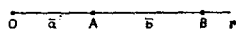


Fig. 27.

toma el representante $\overline{OA}$ de a , contenido en r y con origen O ; en la semirrecta de origen O contenida en r se toma el representante $\overline{AB}$ de $\bar{b}$, se define:

$$a + b = [\overline{OB}].$$

3. El conjunto Σ de los segmentos generales es un semigrupo conmutativo respecto de la adición definida en 9.

DEFINICIÓN 10.—En el conjunto $\Sigma \times \Sigma$ se define la siguiente relación:

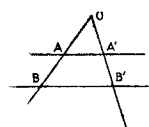


Fig. 28.

$$(\bar{a}, \bar{b}) R (\bar{c}, \bar{d}) \Leftrightarrow A A' \parallel B B',$$

siendo (fig. 28)

$$\overline{OA} \in \bar{a}, \quad \overline{OA'} \in \bar{b}, \quad \overline{OB} \in \bar{c}, \quad \overline{OB'} \in \bar{d},$$

y OA y OA' dos semirrectas arbitrarias de origen O

4. La relación R no depende del par de semirrectas elegido.

DEMOSTRACIÓN.—Sean OA' y OB' otras dos semirrectas (fig. 29) y

$$\overline{OA}, \overline{OA'} \in \bar{a}, \quad \overline{OB}, \overline{OB'} \in \bar{b}, \quad \overline{OC}, \overline{OC'} \in \bar{c} \quad \text{y} \quad \overline{OD}, \overline{OD'} \in \bar{d}.$$

Mediante un movimiento se puede llevar la semirrecta OB' a coincidir con la semirrecta OB y el segmento OB' con el OB y el OD' con el OD (fig. 29). La semirrecta OA' tomará la posición OA_1 y OA', OD' se transformarán en OA_1 y OC_1 , respectivamente; luego $\overline{OA_1} \in \bar{a}$, $\overline{OB_1} \in \bar{b}$. Por consiguiente, los triángulos OAA_1 y OCC_1 son isósceles, luego el ángulo OAA_1 es igual al OCC_1 y las rectas AA_1 y CC_1 son paralelas.

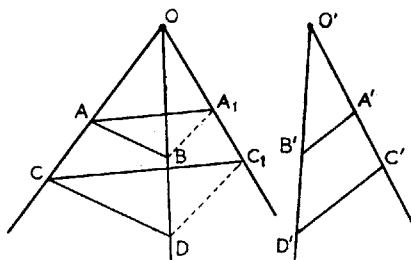


Fig. 29.

Como las rectas AB y CD también lo son, resulta que, por el teorema de Desargues II, son paralelas las rectas BA_1 y DC_1 , luego también lo son las rectas $A'B'$ y $C'D'$.

5. La relación R es una relación de igualdad en $\Sigma \times \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN.—a) $(\bar{a}, \bar{b}) R (\bar{a}, \bar{b}) \iff AB \parallel AB$ (fig. 30).

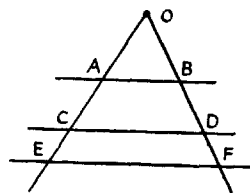


Fig. 30.

b) $(\bar{a}, \bar{b}) R (\bar{c}, \bar{d}) \iff AB \parallel CD \iff CD \parallel AB \iff (\bar{c}, \bar{d}) R (\bar{a}, \bar{b})$.

c) $(\bar{a}, \bar{b}) R (\bar{c}, \bar{d}) \iff (\bar{c}, \bar{d}) R (\bar{e}, \bar{f}) \iff AB \parallel CD, CD \parallel EF \implies AB \parallel EF \implies (\bar{a}, \bar{b}) R (\bar{e}, \bar{f})$.

DEFINICIÓN 11.—A las clases de $R = \Sigma \times \Sigma / R$ se les llama *razones* y se representan por $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$.

6. $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{\bar{a}} \iff (a, b) R (c, d)$.

POSTULADO DE PAPPUS.—Si A, C, E son puntos de una recta r ; B, D, F puntos de una recta coplanaria s (fig. 31), se verifica que

$$AB \parallel DE \text{ y } BC \parallel EF \implies CD \parallel AF.$$

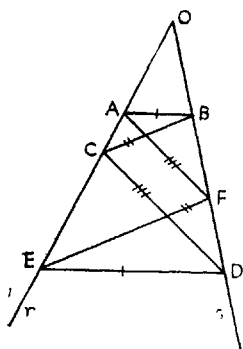


Fig. 31.

7. Si $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ y $\overline{OA} \in \bar{a}$, $\overline{OB} \in \bar{b}$, $\overline{OC} \in \bar{c}$ y

$\overline{OD} \in \bar{d}$, siendo O, A, B puntos de una recta r y O, C, D puntos de otra recta s , se verifica que $AC \parallel BD$.

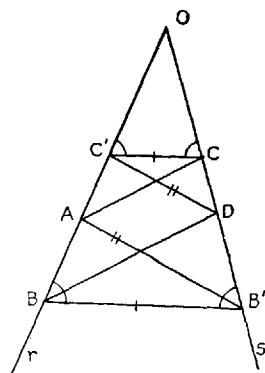


Fig. 32.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\overline{OC'} \in \bar{c}$, $\overline{OB'} \in \bar{b}$, $C' \in r$, $B' \in s$ (fig. 32). De $\overline{OC} \parallel \overline{OC'}$ se deduce que $OC C'$ es un triángulo isósceles y de $\overline{OB} \parallel \overline{OB'}$ que $OB B'$ es isósceles, luego $CC' \parallel BB'$. Por otra parte, de $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ se deduce que $AB' \parallel C'D$, luego, por el postulado de Pappus, es $AC \parallel BD$.

$$8. \quad \frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \frac{\overline{c}}{\overline{d}} \iff \frac{\overline{a}}{\overline{c}} = \frac{\overline{b}}{\overline{d}}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata de 7.

9. De la definición 11 se deduce que, dadas dos razones $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ y $\frac{\overline{c}}{\overline{d}}$ se pueden hallar otras dos $\frac{\overline{m}}{\overline{p}}$ y $\frac{\overline{n}}{\overline{p}}$, con el mismo denominador tales que

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \frac{\overline{m}}{\overline{p}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{c}}{\overline{d}} = \frac{\overline{n}}{\overline{p}},$$

siendo $\overline{p}$ un segmento arbitrariamente dado.

DEMOSTRACIÓN.—Sean (fig. 33) $\overline{OA} \in \overline{a}$, $\overline{OB} \in \overline{b}$, $\overline{OC} \in \overline{c}$, $\overline{OD} \in \overline{d}$ y $\overline{OP} \in \overline{p}$. Trazando por P paralelas PM y PN a AB y CD, respectivamente, resulta que si $\overline{m} = [\overline{OM}]$ y $\overline{n} = [\overline{ON}]$, se verifican las igualdades del enunciado.

A la operación de 9 se le llama *reducción a común denominador*.

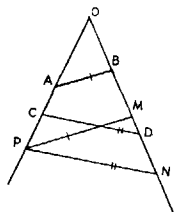


Fig. 33.

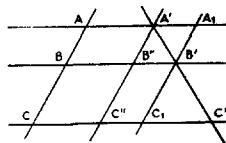


Fig. 34.

10. Si $A B C$ y $A' B' C'$ son puntos de dos rectas coplanarias (fig. 34) tales que $A A' \parallel B B' \parallel C C'$, se verifica que

$$\frac{[A B]}{[A' B']} = \frac{[A C]}{[A' C']} = \frac{[B C]}{[B' C']}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $A' B''$ (fig. 34) la paralela a $A B$ trazada por A' y B'' y C'' los puntos de intersección con $B B'$ y $C C'$, respectivamente. Por ser $A A' B'' B$, $A A' C'' C$ y $B B'' C'' C$ paralelogramos resulta que

$$[A B] = [A' B''], \quad [A C] = [A' C''], \quad [B C] = [B'' C''],$$

luego de la figura formada por los puntos $A' B' C'$ y $A' B'' C''$, las paralelas $B' B''$, $C' C''$ y las igualdades anteriores resulta la primera igualdad de razones. Si en lugar de trazar la paralela a AB por A' se traza por B' , resulta la igualdad de la primera razón y la tercera.

DEFINICIÓN 12.—Una razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ define una aplicación de Σ sobre Σ , llamada *proporcionalidad*, del siguiente modo:

$$(6) \quad \frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) = \bar{y} \Leftrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

EJERCICIOS:

270. Dados los segmentos $\bar{a} = [\overline{AB}]$, $\bar{b} = [\overline{CD}]$, $\bar{x} = [\overline{MN}]$, construir el segmento $\bar{y} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x})$.

271. Comprobar que para que la proporcionalidad $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ sea igual a la proporcionalidad $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ es necesario y suficiente que la razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ sea igual a la razón $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$.

DEFINICIÓN 13.—Se llama *suma* de la proporcionalidad $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ y la proporcionalidad $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$, y se representa por $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$, a la aplicación de Σ en Σ definida del siguiente modo:

$$(7) \quad \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \right)(\bar{x}) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) + \frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x})$$

11. La suma de las proporcionalidades $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ y $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ es una proporcionalidad definida por la razón $\frac{\bar{y} + \bar{z}}{\bar{x}}$, siendo $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) = \bar{y}$, $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x}) = \bar{z}$.

DEMOSTRACIÓN.—De (6) se deduce que $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, $\frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$, luego, por el ejercicio anterior, la proporcionalidad $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ es igual a la $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ y la proporcionalidad $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ igual a la $\frac{\bar{z}}{\bar{x}}$, luego

$$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \right)(\bar{t}) = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \right)(\bar{t}) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{t}) + \frac{\bar{z}}{\bar{x}}(\bar{t})$$

para todo $\bar{t}$. Sean $\overline{OX} \in \bar{x}$, $\overline{OY} \in \bar{y}$, $\overline{YZ} \in \bar{z}$, $\overline{OT} \in \bar{t}$ (fig. 35), si

$$YT' \parallel XT \parallel ZT''$$

se verifica que

$$\frac{[\overline{OY}]}{[\overline{OX}]} = \frac{[\overline{OT}]}{[\overline{OT}]} , \quad \frac{[\overline{YZ}]}{[\overline{OX}]} = \frac{[T'T'']}{[\overline{OT}]}$$

de donde,

$$\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \right) (\bar{t}) = [\overline{OT}] + [T'T''] = [\overline{OT'}],$$

pero

$$\frac{\bar{y} + \bar{z}}{\bar{x}} (\bar{t}) = [\overline{OT'}],$$

Fig. 35.

ya que $XT \parallel ZT''$ y $[\overline{OZ}] = \bar{y} + \bar{z}$, luego

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \frac{\bar{y} + \bar{z}}{\bar{x}}.$$

A la razón $\frac{\bar{y} + \bar{z}}{\bar{x}}$ que define la proporcionalidad suma de las proporcionalidades $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ y $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ se le llama *razón suma* de las razones $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ y $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$.

12. El conjunto $\mathbb{R}$ de las razones de segmentos es un semigrupo aditivo.

DEMOSTRACIÓN.—a) La uniformidad de la adición es consecuencia de la definición (7).

b) *Asociatividad.* De $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, $\frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$, $\frac{\bar{e}}{\bar{f}} = \frac{\bar{t}}{\bar{x}}$, se deduce:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \right) + \frac{\bar{e}}{\bar{f}} &= \frac{\bar{y} + \bar{z}}{\bar{x}} + \frac{\bar{t}}{\bar{x}} = \frac{(\bar{y} + \bar{z}) + \bar{t}}{\bar{x}} = \frac{\bar{y} + (\bar{z} + \bar{t})}{\bar{x}} \\ &= \frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \frac{\bar{z} + \bar{t}}{\bar{x}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \left(\frac{\bar{c}}{\bar{d}} + \frac{\bar{e}}{\bar{f}} \right). \end{aligned}$$

c) *Conmutatividad.*

$$\left(\frac{\bar{a}}{b} + \frac{\bar{c}}{d}\right)(\bar{x}) = \frac{\bar{a}}{b}(\bar{x}) + \frac{\bar{c}}{d}(\bar{x}) = \frac{\bar{c}}{d}(\bar{x}) + \frac{\bar{a}}{b}(\bar{x}) = \left(\frac{\bar{c}}{d} + \frac{\bar{a}}{b}\right)(\bar{x}).$$

13. Dadas dos razones distintas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ existe una razón única $\frac{m}{n}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d}$, o $\frac{c}{d} + \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$. En el primer caso la razón $\frac{m}{n}$ se llama *diferencia* entre $\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}$, y se escribe:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \iff \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{g}, \quad \frac{c}{d} = \frac{k}{g}.$$

Si $h < k$ existirá un segmento general l tal que $h + l = k$, luego

$$\frac{c}{d} = \frac{k}{g} = \frac{h+l}{g} = \frac{h}{g} + \frac{l}{g} = \frac{a}{b} + \frac{l}{g}.$$

En caso contrario existirá un segmento t tal que $k + t = h$.

Si $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ se escribe $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y se dice que la razón $\frac{a}{b}$ es *menor que* $\frac{c}{d}$.

DEFINICIÓN 14.—Se llama *producto* de la proporcionalidad $\frac{a}{b}$ por la proporcionalidad $\frac{c}{d}$ a la aplicación de Σ en Σ producto de las aplicaciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$:

$$(8) \quad \frac{\bar{c}}{d} \frac{\bar{a}}{b}(\bar{x}) = \frac{\bar{c}}{d} \left(\frac{\bar{a}}{b}(\bar{x}) \right)$$

14. Sea $\frac{\bar{a}}{b}(\bar{m}) = \bar{n}$ y $\frac{\bar{c}}{d}(\bar{n}) = \bar{p}$. Se verifica que

$$(9) \quad \frac{\bar{c}}{d} \frac{\bar{a}}{b} = \frac{\bar{p}}{\bar{m}}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) = \bar{y}$, $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{y}) = \bar{z}$, siendo $\bar{x}$ un segmento general arbitrario. De las igualdades anteriores se deduce:

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{n}}{\bar{m}}, \quad \frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \frac{\bar{p}}{\bar{n}}, \quad \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad \frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \frac{\bar{z}}{\bar{y}},$$

de donde:

$$\bar{z} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) = \frac{\bar{p}}{\bar{n}} \frac{\bar{n}}{\bar{m}}(\bar{x}).$$

Si (fig. 36) $\overline{OM} \in \bar{m}$, $\overline{ON} \in \bar{n}$, $\overline{OP} \in \bar{p}$, $\overline{OX} \in \bar{x}$, y si $NY \parallel MX$, $PZ \parallel NY$, se verifica que $\overline{OY} \in \bar{y}$, $\overline{OZ} \in \bar{z}$, y $MX \parallel PZ$, luego $\frac{\bar{p}}{\bar{m}}(\bar{x}) = \bar{z}$, que demuestra (9).

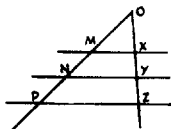


Fig. 36.

En virtud de (9) llamaremos *producto de la razón* $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ por la razón $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ a la razón $\frac{\bar{p}}{\bar{m}}$

15. El conjunto R es, respecto de la multiplicación, un grupo conmutativo y distributivo respecto de la adición.

DEMOSTRACIÓN.—a) La asociatividad es consecuencia de la asociatividad de la multiplicación de aplicaciones.

b) *Conmutatividad.* Sea $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, $\frac{c}{d} = \frac{n}{p} = \frac{q}{m}$.

$$\frac{c}{d} \frac{a}{b}(n) = \frac{n}{p} \frac{m}{n}(n) = \frac{q}{m}(m) = q, \quad \frac{a}{b} \frac{c}{d}(n) = \frac{m}{n} \frac{q}{m}(n) = \frac{q}{n}(n) = q,$$

luego

$$\frac{c}{d} \frac{a}{b} = \frac{q}{n} = \frac{a}{b} \frac{c}{d}.$$

c) *Elemento unidad.* $\frac{\bar{a}}{\bar{a}} = \frac{\bar{b}}{\bar{b}}$, para todo $\bar{a}$ y todo $\bar{b}$, ya que (fig. 37) por ser los triángulos $O A A'$ y $O B B'$ isósceles las rectas $A A'$ y $B B'$ son paralelas. Por consiguiente:

$$\frac{\frac{\bar{m}}{\bar{n}} \frac{\bar{a}}{\bar{a}}}{\frac{\bar{m}}{\bar{n}} \frac{\bar{a}}{\bar{a}}} = \frac{\frac{\bar{m}}{\bar{n}} \frac{\bar{n}}{\bar{n}}}{\frac{\bar{m}}{\bar{n}} \frac{\bar{n}}{\bar{n}}} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}},$$

que prueba que $\frac{\bar{a}}{\bar{a}}$ es el elemento unidad de la multiplicación.

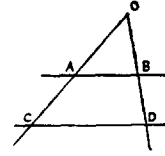


Fig. 37.

d) *Elemento inverso.* Dada la razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ se verifica que

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}} \iff \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right)^{-1} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}.$$

e) *Distributividad.* Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} = \frac{m}{a}$, $\frac{e}{f} = \frac{d}{a}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) \frac{a}{b} &= \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{a} \right) \frac{a}{b} = \frac{m+n}{a} \frac{a}{b} = \frac{m+n}{b} = \frac{m}{b} + \frac{n}{b} \\ &= \frac{m}{a} \frac{a}{b} + \frac{n}{a} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

272. Calcular las siguientes razones: a) Datos $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$: calcular $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \frac{e}{f}$.
b) Datos, los mismos. Calcular $\left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{c}{d} \right] / \frac{e}{f}$.

DEFINICIÓN 15.—En $R \times R$ se define la siguiente relación:

$$(10) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \sim \left(\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'} \right) \iff \frac{a}{b} + \frac{c'}{d'} = \frac{c}{d} + \frac{a'}{b'}.$$

La relación (10) es una relación de igualdad. Al conjunto cociente, $K = R \times R / \sim$ se le llama *cuerpo de las razones relativas u orientadas*. En K se definen la adición y la multiplicación del siguiente modo:

$$(11) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) + \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{m}{n}, \frac{c}{d} + \frac{p}{q} \right)$$

y

$$(12) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \right) = \left(\frac{a}{b} \frac{m}{n} + \frac{c}{d} \frac{p}{q}, \frac{a}{b} \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \frac{m}{n} \right).$$

16. El conjunto K , respecto de las definiciones (11) y (12), es un cuerpo conmutativo, llamado *cuerpo de las razones orientadas*.

El elemento cero de K es $\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \right)$ y lo representaremos por 0 . Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, se verifica que

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}, 0 \right) \text{ T } \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right)$$

y si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se verifica que

$$\left(0, \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) \text{ T } \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right).$$

Por consiguiente, cada elemento de K puede representarse por uno de los pares siguientes:

$$(13) \quad \left(\frac{\bar{m}}{n}, 0 \right), 0, \left(0, \frac{\bar{m}}{n} \right).$$

Los pares $\left(\frac{\bar{m}}{n}, 0 \right)$ se llaman *razones positivas*, los pares $\left(0, \frac{\bar{m}}{n} \right)$ se llaman *razones negativas*. Las razones positivas $\left(\frac{\bar{m}}{n}, 0 \right)$ se representan únicamente por $\frac{\bar{m}}{n}$ y las razones negativas $\left(0, \frac{\bar{m}}{n} \right)$ se representan por $-\frac{\bar{m}}{n}$.

EJERCICIOS:

$$273. \text{ Calcular } \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) \left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q} \right).$$

EL PROBLEMA DE LA MEDIDA DE SEGMENTOS.—Sea $\bar{u}$ un segmento general fijo. Se puede definir una aplicación m de Σ en K del siguiente modo:

$$(14) \quad \begin{cases} \Sigma \xrightarrow{m} K \\ \bar{x} \longrightarrow m(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\bar{u}}. \end{cases}$$

17. m es una aplicación inyectiva de Σ en K y homomorfismo respecto de las adiciones en Σ y en K .

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de la definición es una aplicación. Es inyectiva, ya que

$$m(\bar{x}) = m(\bar{y}) \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{u}} (\bar{u}) = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} (\bar{u}) \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}.$$

Finalmente, se verifica que

$$m(\bar{x} + \bar{y}) = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\bar{x}}{\bar{u}} + \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = m(\bar{x}) + m(\bar{y}).$$

A la aplicación m se le llama una *medida* en el semigrupo Σ de los segmentos generales respecto de la unidad $\bar{u}$.

18. Si K^+ es el conjunto de todas las razones positivas de K , se verifica que

$$\Sigma \approx K^+.$$

DEMOSTRACIÓN.—Queda por probar que la aplicación m es suprayectiva.

Sea $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ una razón positiva arbitraria. Se ha visto que se puede hallar un segmento $\bar{c}$ único tal que $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{\bar{u}}$, de donde $m(\bar{c}) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$.

MEDIDA APROXIMADA DE SEGMENTOS.—Sea F el conjunto de todas las razones de la forma $\frac{m \bar{u}}{n \bar{u}}$, siendo m y n números naturales.

19. F es un semicuerpo isomorfo al semicuerpo de los números racionales positivos.

DEMOSTRACIÓN.—Sea Q^+ el conjunto de los números racionales positivos y pongamos:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^+ \xrightarrow{f} F \\ \frac{m}{n} \xrightarrow{f} \left(\frac{m}{n} \right) = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} \end{array} \right.$$

La correspondencia f es una aplicación. En efecto, si

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m n' = n m',$$

será

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} = \frac{(m n') \bar{u}}{(n n') \bar{u}}.$$

ya que

$$\frac{(m n') \bar{u}}{(n n') \bar{u}} \cdot ((n n') \bar{u}) = (m n') \bar{u}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} (m n') \bar{u} &= \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} (n \bar{u} + \dots + n \bar{u}) = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} (n \bar{u}) + \dots + \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} (n \bar{u}) \\ &= m \bar{u} + \dots + m \bar{u} = n' (m \bar{u}) = (n' m) \bar{u}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$f\left(\frac{m'}{n'}\right) = \frac{n' \bar{u}}{m' \bar{u}} = \frac{(n m') \bar{u}}{(n n') \bar{u}}$$

y, en virtud de $m n' = n m'$, resulta $(m n') \bar{u} = (n m') \bar{u}$, luego

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m'}{n'}\right).$$

La aplicación f es inyectiva. En efecto, si

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) \quad \text{se:á} \quad \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} = \frac{p \bar{u}}{q \bar{u}}$$

y, por lo demostrado arriba,

$$\frac{(m q) \bar{u}}{(n q) \bar{u}} = \frac{(n p) \bar{u}}{(n q) \bar{u}},$$

de donde $(m q) \bar{u} = (n p) \bar{u}$ y si fuese $m q > n p$, esto es, $m q = n p + r$, $r \geq 1$, sería $(r + 1) \bar{u} = \bar{u}$, contradicción. Por consiguiente, $m q = n p$ (ya que por la misma razón no puede ser $n q < n p$), y esto prueba que $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

La aplicación f es suprayectiva. Ya que dada la razón $\frac{m \bar{u}}{n \bar{u}}$ de F se verifica que $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}}$.

Se verifica además que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{mq + np}{nq}\right) = \frac{(mq + np) \bar{u}}{(nq) \bar{u}} = \frac{(mq) \bar{u} + (np) \bar{u}}{(nq) \bar{u}} \\ &= \frac{(mq) \bar{u}}{(nq) \bar{u}} + \frac{(np) \bar{u}}{(nq) \bar{u}} = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} + \frac{p \bar{u}}{q \bar{u}} = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{mp}{nq}\right) = \frac{(mp) \bar{u}}{(nq) \bar{u}}. \quad \text{Ahora bien,} \quad \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} \cdot \frac{p \bar{u}}{q \bar{u}} = \frac{(nq) \bar{u}}{(nq) \bar{u}} \\ &= \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} \left[\frac{p \bar{u}}{q \bar{u}} (q \bar{u} + \dots + q \bar{u}) \right] = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} [p \bar{u} + \dots + p \bar{u}] \\ &= \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} [(p n) \bar{u}] = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} (n \bar{u} + \dots + n \bar{u}) = m \bar{u} + \dots + m \bar{u} \\ &= (mp) \bar{u}, \quad \text{que prueba que} \quad \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} \cdot \frac{p \bar{u}}{q \bar{u}} = \frac{(mp) \bar{u}}{(nq) \bar{u}}, \quad \text{luego:} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = \frac{m \bar{u}}{n \bar{u}} \cdot \frac{p \bar{u}}{q \bar{u}} = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Un segmento $\bar{x}$ se llama *commensurable* respecto de la unidad $\bar{u}$ cuando se verifica que $m(\bar{x}) \in F$. En virtud del isomorfismo establecido en 19, a todo segmento commensurable se le puede hacer corresponder un número racional del siguiente modo:

$$\bar{x} \longrightarrow \mu(\bar{x}) = f m(\bar{x}).$$

20. El subconjunto Σ_0 de Σ formado por todos los segmentos commensurables respecto de la unidad $\bar{u}$ es un subsemigrupo de Σ y se verifica que μ es un isomorfismo de Σ_0 sobre el semigrupo aditivo de Q^+ .

DEMOSTRACIÓN.—Como f es un isomorfismo bastará probar que la restricción de m a Σ_0 es un isomorfismo, pero, por la definición de Σ_0 , es $\Sigma_0 = m^{-1}(F)$.

Al número racional $\mu(\bar{x})$ se le llama también *medida* del segmento $\bar{x}$ respecto de la unidad $\bar{u}$.

Si $\bar{x}$ es un segmento no commensurable respecto de la unidad $\bar{u}$, se dice que $\bar{u}$ es *incommensurable* respecto de $\bar{u}$.

21. Dado un segmento $\bar{x}$, inconmensurable con $\bar{u}$ y un número natural arbitrario n , se puede hallar un número racional único $x_n = \frac{p}{n}$ tal que:

$$(16) \quad \frac{p \bar{u}}{n \bar{u}} < m(\bar{x}) < \frac{(p+1) \bar{u}}{n \bar{u}}$$

DEMOSTRACIÓN.—Por el postulado de Arquímedes, dado el segmento $n \bar{x}$ existe un único número entero p tal que $p \bar{u} \leq n \bar{x} < (p+1) \bar{u}$, de donde

$$\frac{p \bar{u}}{\bar{u}} \leq \frac{n \bar{x}}{\bar{u}} < \frac{(p+1) \bar{u}}{\bar{u}}$$

y como

$$\frac{n \bar{x}}{\bar{u}} = \frac{\bar{x}}{\bar{u}} + \dots + \frac{\bar{x}}{\bar{u}} = n \frac{\bar{x}}{\bar{u}} = n [m(\bar{x})],$$

resulta:

$$(17) \quad \frac{p \bar{u}}{\bar{u}} \leq n [m(\bar{x})] < \frac{(p+1) \bar{u}}{\bar{u}}$$

Ahora bien, se verifica: a) Si n es un número natural: $\frac{n \bar{c}}{n \bar{d}} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$, ya que $\frac{n \bar{c}}{n \bar{d}} (n \bar{d}) = n \bar{c}$ y

$$\frac{\bar{c}}{\bar{d}} (n \bar{d}) = \frac{\bar{c}}{\bar{d}} (\bar{d} + \dots + \bar{d}) = \bar{c} = \dots + \bar{c} = n \bar{c}.$$

b) $n \frac{\bar{c}}{n \bar{d}} = \frac{n \bar{c}}{n \bar{d}}$, ya que

$$n \frac{\bar{c}}{n \bar{d}} = \frac{\bar{c}}{n \bar{d}} + \dots + \frac{\bar{c}}{n \bar{d}} = \frac{n \bar{c}}{n \bar{d}}.$$

c) $n \frac{\bar{a}}{n \bar{b}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \implies \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{n \bar{d}}$. En efecto, de a) y b) se deduce que $n \frac{\bar{c}}{n \bar{d}} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ y de esta igualdad y de la hipótesis se deduce que $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{n \bar{d}}$.

De c) y de (17) se deduce:

$$\frac{p\bar{u} + \bar{a}}{\bar{u}} = n[m(\bar{x})], \quad n \frac{\bar{x} + \bar{b}}{\bar{u}} = \frac{(p+1)\bar{u}}{\bar{u}},$$

$$m(\bar{x}) = \frac{p\bar{u}}{n\bar{u}} + \frac{\bar{a}}{n\bar{u}}, \quad m(\bar{x}) + \frac{\bar{b}}{\bar{u}} = \frac{(p+1)\bar{u}}{n\bar{u}},$$

de donde:

$$\frac{p\bar{u}}{n\bar{u}} \leq m(\bar{x}) < \frac{(p+1)\bar{u}}{n\bar{u}},$$

y el signo de igualdad implica que $\bar{x}$ es conmensurable.

OBSERVACIÓN.—Si $\bar{x}$ es un segmento inconmensurable se puede obtener un conjunto:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

de números racionales tales que se verifiquen las desigualdades (16).

El número x_n se llama medida por defecto de $\bar{x}$ con un error inferior a $\frac{1}{n}$.

4. El espacio vectorial de los vectores libres.—Sea $\bar{u}$ un segmento general fijo que tomaremos como segmento *unidad* en todo lo que sigue.

DEFINICIÓN 16.—Se llama *módulo de un vector libre*, $\mathbf{x}$, y se representa por $|\mathbf{x}|$ a

$$|\mathbf{x}| = \frac{[\overline{AB}]}{\bar{u}}, \quad \overrightarrow{AB} \in \mathbf{x}.$$

Se llama *dirección* en el espacio ordinario al conjunto de todas las rectas del espacio paralelas entre sí. Si d es una dirección y r una recta del conjunto d , se dice que r tiene la dirección d . El conjunto de todas las direcciones del espacio es una clasificación del conjunto de todas las rectas del espacio; por consiguiente, una dirección queda unívocamente determinada por cualquiera de sus rectas, que se llama *representante* de la dirección. Se llama *dirección de un vector libre* $\mathbf{x}$, a la dirección de cualquier recta que contenga a un representante del vector $\mathbf{x}$. Si dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tienen la misma direc-

ción, se escribe $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$. Dos vectores libres $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se dice que *tienen el mismo sentido* cuando se verifica que si $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$ y $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{y}$, uno de los vectores $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ contiene al otro. Si $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ son dos vectores de la misma recta que tienen común únicamente el punto O, se dice que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tienen *sentidos opuestos*. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tienen el mismo sentido escribiremos $\mathbf{x} \uparrow \mathbf{y}$. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tienen sentidos opuestos escribiremos $\mathbf{x} \downarrow \mathbf{y}$.

22. La relación $\uparrow$: tener el mismo sentido, es una relación de igualdad.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\overrightarrow{OX} \subset \overrightarrow{OX} \iff \mathbf{x} \uparrow \mathbf{x}$.

b) $\mathbf{x} \uparrow \mathbf{y} \iff \overrightarrow{OX} \subset \overrightarrow{OY}$, o, $\overrightarrow{OY} \subset \overrightarrow{OX} \iff \mathbf{y} \uparrow \mathbf{x}$.

c) $\mathbf{x} \uparrow \mathbf{y}, \mathbf{y} \uparrow \mathbf{z} \iff (\overrightarrow{OX} \subset \overrightarrow{OY}, \text{ o, } \overrightarrow{OY} \subset \overrightarrow{OX}) \text{ y } (\overrightarrow{OY} \subset \overrightarrow{OZ}, \text{ o, } \overrightarrow{OZ} \subset \overrightarrow{OY}) \implies \overrightarrow{OX} \subset \overrightarrow{OZ}, \text{ o, } \overrightarrow{OZ} \subset \overrightarrow{OX} \iff \mathbf{x} \uparrow \mathbf{z}$.

23. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos vectores libres, se verifica que

$$(18) \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \quad |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|. \\ 2.^{\circ} \quad \mathbf{x} \parallel \mathbf{y}. \\ 3.^{\circ} \quad \mathbf{x} \uparrow \mathbf{y}. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACIÓN.—La implicación $\implies$ es consecuencia de las definiciones de Def. 16. Vamos a demostrar la implicación $\impliedby$. Sea O un punto arbitrario y $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{y}$. De 2.º) se deduce que O, X, Y están en la misma recta r . De 3.º) que X e Y están en la misma semirrecta de origen O y de 1.º) que $\frac{[OX]}{\overline{u}} = \frac{[OY]}{\overline{u}}$ de donde $X = Y$. Por consiguiente, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$.

DEFINICIÓN 17.—Se llama *producto de la razón r por el vector libre x*, y se representa por $r\mathbf{x}$, al vector libre definido por las siguientes condiciones:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad |r\mathbf{x}| = |r| |\mathbf{x}|. \\ 2. \quad r\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}. \\ 3. \quad r > 0 \implies r\mathbf{x} \uparrow \mathbf{x}; \quad r < 0 \implies r\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x} \end{array} \right.$$

En virtud del teorema 23, las condiciones (19) determinan de modo único al vector $r\mathbf{x}$.

EJERCICIO:

274. Dados la razón r y el vector libre $\mathbf{x}$, construir $r\mathbf{x}$.

24. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE RAZONES POR VECTORES LIBRES.

- I. $r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{y}$.
- II. $(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$.
- III. $(rs)\mathbf{x} = r(s\mathbf{x})$.
- IV. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, siendo 1 la razón unidad.

DEMOSTRACIÓN.—I. $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{y}$, $\overrightarrow{OZ} \in \mathbf{x} + \mathbf{y}$ (fig. 38), $\overrightarrow{OX'} \in r\mathbf{x}$, $\overrightarrow{OY'} \in r\mathbf{y}$, $\overrightarrow{OZ'} \in r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \Rightarrow \frac{[\overrightarrow{OX'}]}{u} = |r\mathbf{x}|$
 $= |r| \frac{[\overrightarrow{OX}]}{u}$, $\frac{[\overrightarrow{OZ'}]}{u} = |r(\mathbf{x} + \mathbf{y})| = |r| |\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |r| \frac{[\overrightarrow{OZ}]}{u}$, $\frac{[\overrightarrow{OY'}]}{u} = |r\mathbf{y}| = |r| \frac{[\overrightarrow{OY}]}{u}$
 $\Rightarrow \frac{[\overrightarrow{OX'}]}{[\overrightarrow{OX}]} = |r|$, $\frac{[\overrightarrow{OZ'}]}{[\overrightarrow{OZ}]} = |r|$, $\frac{[\overrightarrow{OY'}]}{[\overrightarrow{OY}]} = |r|$
 $\Rightarrow \frac{[\overrightarrow{OX'}]}{[\overrightarrow{OX}]} = \frac{[\overrightarrow{OZ'}]}{[\overrightarrow{OZ}]} = \frac{[\overrightarrow{OY'}]}{[\overrightarrow{OY}]} \Rightarrow XZ \parallel X'Z'$, $YZ \parallel Y'Z' \Rightarrow OX'Z'Y'$
 es un paralelogramo $\Rightarrow [\overrightarrow{OZ'}] = [\overrightarrow{OX'}] + [\overrightarrow{OY'}] \Leftrightarrow r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{y}$.

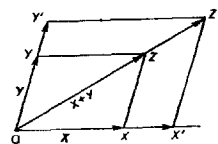


Fig. 38.

II. Es preciso distinguir los siguientes casos: a) $r > 0$, $s > 0$. b) $r > 0$, $s < 0$, $r + s > 0$. c) $r > 0$, $s < 0$, $r + s < 0$. d) $r < 0$, $s < 0$. Basta observar que $|r + s| = r + s$ en a) y b) y $|r + s| = -(r + s)$ en c) y d) y $|r| = r$ en a), b) y c) y $|r| = -r$ en d) y $|s| = s$ en a) y $|s| = -s$ en b), c) y d).

III. a) $r > 0$, $s > 0$. b) $r > 0$, $s < 0$. c) $r < 0$, $s < 0$. Demostraremos, por ejemplo, el b), $|(rs)\mathbf{x}| = |rs| |\mathbf{x}| = (|r| |s|) |\mathbf{x}| = |r| (|s| |\mathbf{x}|) = |r| |s\mathbf{x}| = |r(s\mathbf{x})|$. Además, $(rs)\mathbf{x} \parallel \mathbf{x} \parallel s\mathbf{x} \parallel r(s\mathbf{x})$. Finalmente, por ser $rs < 0$, será $(rs)\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}$, por ser $s < 0$ será $s\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}$ y por ser $r > 0$ será $r(s\mathbf{x}) \uparrow s\mathbf{x}$, luego $r(s\mathbf{x}) \downarrow \mathbf{x}$ y $(rs)\mathbf{x} \uparrow r(s\mathbf{x})$.

IV. Es inmediata.

Del teorema 5, núm. 2, y del teorema anterior, resulta, en virtud de la definición 3 del número 1, el siguiente:

25. TEOREMA.—*El conjunto de todos los vectores libres del espacio es un espacio vectorial sobre el cuerpo K de las razones de segmentos.*

26. Sea $O A_1 A_2 A_3$ un tetraedro y sean $\mathbf{a}_1 = [\overrightarrow{OA_1}]$, $\mathbf{a}_2 = [\overrightarrow{OA_2}]$, $\mathbf{a}_3 = [\overrightarrow{OA_3}]$. Los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ se llaman vectores libres no coplanarios. Sea $\mathbf{x}$ un vector libre arbitrario. Existen tres razones x_1, x_2, x_3 , unívocamente determinadas por $\mathbf{x}$ y por $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ tales que:

$$(20) \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$ y $XX'_1X_1 \parallel OA_2A_3$, $XX'_2X_2 \parallel OA_3A_1$, $XX'_3X_3 \parallel OA_1A_2$ (fig. 39). Los vectores $\overrightarrow{OX}_1$, $\overrightarrow{OX}_2$ y $\overrightarrow{OX}_3$ se llaman las proyecciones de $\overrightarrow{OX}$ sobre los ejes OA_1 , OA_2 y OA_3 , respectivamente. Por ser la figura formada un paralelepípedo, se verifica:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{OX}] &= [\overrightarrow{OX}_1] + [\overrightarrow{OX}_2] + [\overrightarrow{OX}_3], \\ \mathbf{x} &= [\overrightarrow{OX}] = [\overrightarrow{OX}_1] + [\overrightarrow{OX}_2] + [\overrightarrow{OX}_3], \end{aligned}$$

luego

$$(21) \quad \mathbf{x} = [\overrightarrow{OX}_1] + [\overrightarrow{OX}_2] + [\overrightarrow{OX}_3].$$

Ahora bien, si $x_1 = \frac{[\overrightarrow{OX}_1]}{[\overrightarrow{OA_1}]}$ cuando

$[\overrightarrow{OA_1}] \uparrow [\overrightarrow{OX}_1]$, y $x_1 = -\frac{[\overrightarrow{OX}_1]}{[\overrightarrow{OA_1}]}$ cuando

$[\overrightarrow{OA_1}] \downarrow [\overrightarrow{OX}_1]$, se verifica que:

$$a) \quad |x_1 \mathbf{a}_1| = |x_1| |\mathbf{a}_1| = \frac{[\overrightarrow{OX}_1]}{[\overrightarrow{OA_1}]} \frac{[\overrightarrow{OA_1}]}{u} = \frac{[\overrightarrow{OX}_1]}{u} = |[\overrightarrow{OX}_1]|.$$

$$b) \quad x_1 \mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \parallel [\overrightarrow{OX}_1] \Rightarrow x_1 \mathbf{a}_1 \parallel [\overrightarrow{OX}_1].$$

c) Si $[\overrightarrow{OA_1}] \uparrow [\overrightarrow{OX}_1]$ es $x_1 > 0$, luego $x_1 \mathbf{a}_1 \uparrow [\overrightarrow{OX}_1]$. Si $[\overrightarrow{OA_1}] \downarrow [\overrightarrow{OX}_1]$ es $x_1 < 0$, luego $[\overrightarrow{OA_1}] \downarrow x_1 [\overrightarrow{OA_1}]$ y, por tanto, $x_1 [\overrightarrow{OA_1}] \uparrow [\overrightarrow{OX}_1]$.

De a), b) y c) se deduce, por el teorema 23, que

$$[\overrightarrow{OX}_1] = x_1 \mathbf{a}_1.$$

Análogamente se prueba que $[\overrightarrow{OX}_2] = x_2 \mathbf{a}_2$, $[\overrightarrow{OX}_3] = x_3 \mathbf{a}_3$ y teniendo en cuenta (21) resulta (20).

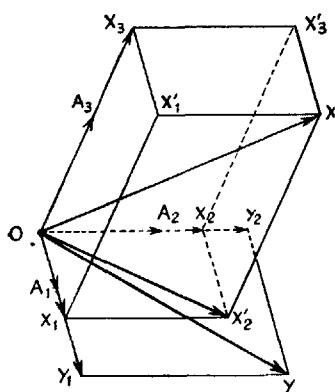


Fig. 39.

Para probar la unicidad de las tres razones x_1, x_2, x_3 , vamos a emplear la proposición 28 del siguiente número. Supongamos que

$$(22) \quad \mathbf{x} = y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + y_3 \mathbf{a}_3.$$

De (20) y (22) se deduce:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + y_3 \mathbf{a}_3,$$

de donde, sumando a ambos miembros $-(y_1 \mathbf{a}_1)$, $-(y_2 \mathbf{a}_2)$ y $-(y_3 \mathbf{a}_3)$, teniendo en cuenta la asociatividad y conmutatividad de la adición de vectores, las propiedades c) y d) de 28 y II, 24, resulta:

$$(23) \quad (x_1 - y_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 - y_2) \mathbf{a}_2 + (x_3 - y_3) \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

Si alguna de las razones $x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$, por ejemplo, $x_3 - y_3$, fuese distinta de cero, existiría la razón inversa $(x_3 - y_3)^{-1}$ y multiplicando por ella los dos miembros de (23) se obtendría, recordando III, 24, que

$$\frac{x_1 - y_1}{x_3 - y_3} \mathbf{a}_1 + \frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$

de donde, en virtud de d) 28,

$$(24) \quad \mathbf{a}_3 = \left(-\frac{x_1 - y_1}{x_3 - y_3} \right) \mathbf{a}_1 + \left(-\frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} \right) \mathbf{a}_2.$$

Si

$$\overrightarrow{OY_1} \in \left(-\frac{x_1 - y_1}{x_3 - y_3} \right) \mathbf{a}_1, \quad \overrightarrow{OY_2} \in \left(-\frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} \right) \mathbf{a}_2,$$

el vector $\overrightarrow{OY_1}$ (fig. 39) pertenecería a la recta OA_1 y el $\overrightarrow{OY_2}$ pertenecería a la recta OA_2 , luego el vector suma, $[\overrightarrow{OY_1}] + [\overrightarrow{OY_2}] = \mathbf{a}_3$, pertenecería al plano OA_1A_2 , en contradicción con la hipótesis de ser los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ no coplanarios. Por tanto, la hipótesis $x_3 - y_3 \neq 0$ es falsa, luego $x_3 - y_3 = 0$. Análogamente, $x_1 - y_1 = 0$ y $x_2 - y_2 = 0$.

DEFINICIÓN 18.—Al conjunto de tres vectores libres no coplanarios $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ se le llama una *base* del espacio vectorial de los vectores libres. Las tres razones (x_1, x_2, x_3) unívocamente determinadas por el vector libre $\mathbf{x}$ y la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ se llaman *coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$* .

Obsérvese que (x_1, x_2, x_3) es un elemento de $K \times K \times K$, siendo K el cuerpo de las razones de segmentos.

27. Existe una biyección Γ del espacio vectorial V de los vectores libres sobre $K \times K \times K$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ una base de V , la construcción indicada en 26 permite hacer corresponder a cada vector libre $\mathbf{x}$ un elemento (x_1, x_2, x_3) de $K \times K \times K$ según el siguiente esquema:

$$(25) \quad \mathbf{x} \rightarrow \overrightarrow{OX} \rightarrow \{\overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OX_2}, \overrightarrow{OX_3}\} \rightarrow \{[\overrightarrow{OX_1}], [\overrightarrow{OX_2}], [\overrightarrow{OX_3}]\} \\ \rightarrow \{x_1 a_1, x_2 a_2, x_3 a_3\} \rightarrow (x_1, x_2, x_3),$$

y la correspondencia (25) es unívoca.

Recíprocamente, dado $(x_1, x_2, x_3) \in K \times K \times K$, se puede obtener el vector libre homólogo en la correspondencia:

$$(26) \quad (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \{x_1 a_1, x_2 a_2, x_3 a_3\} \rightarrow \{\overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OX_2}, \overrightarrow{OX_3}\} \rightarrow \overrightarrow{OX} \rightarrow \mathbf{x} = [\overrightarrow{OX}],$$

en donde

$$\overrightarrow{OX_1} \in x_1 a_1, \overrightarrow{OX_2} \in x_2 a_2, \overrightarrow{OX_3} \in x_3 a_3$$

y X es el punto de intersección de los planos $X_1 X'_1 X'_2$, $X_2 X'_2 X'_3$, $X_3 X'_3 X'_1$ paralelos a $O A_2 A_3$, $O A_3 A_1$ y $O A_1 A_2$, respectivamente.

De (26) se deduce que la correspondencia entre (x_1, x_2, x_3) y $\mathbf{x}$ definida en (26) es la inversa de la correspondencia Γ definida en (25) y, por consiguiente, Γ es una biyección.

EJERCICIOS:

275. Dado el vector libre $\mathbf{x}$, construir (x_1, x_2, x_3) respecto de una base dada (a_1, a_2, a_3) , en donde los vectores a_1 , a_2 y a_3 son perpendiculares dos a dos.

276. Resolver el mismo problema anterior en el caso en que a_1 , a_2 y a_3 no sean ortogonales entre sí.

277. Dado un vector $\mathbf{x}$ mediante sus proyecciones OX y OX' en perspectiva caballera, construir el vector $\mathbf{y} = \frac{[\overrightarrow{OA}]}{[\overrightarrow{OU}]} \mathbf{x}$, hallando sus proyecciones y su verdadera magnitud.

5. Espacio vectorial. Dependencia lineal.—Hemos visto en 1 y en 4 dos conjuntos distintos a los que se ha llamado espacios vectoriales porque en los dos existían dos operaciones regidas por las mismas leyes. Además de estos conjuntos existen otros muchos con dos operaciones regidas por

las leyes vistas para estos dos. Por ello supone una economía estudiar todos ellos simultáneamente. Con este fin vamos a dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 19.—Sea K un cuerpo y V un grupo aditivo abeliano. A los elementos de K los representaremos por letras minúsculas y a los de V por letras negritas. Sea la aplicación:

$$(27) \quad K \times V \rightarrow V,$$

llamada *multiplicación*, tal que a cada par $(a, \mathbf{x})$ le hace corresponder un único elemento de V representado por $a \mathbf{x}$, y llamado producto de a por $\mathbf{x}$, tal que se verifiquen las siguientes propiedades:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}, \text{ para todo } a \in K \text{ y todo par } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \\ \text{II. } (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}, \text{ para todo par } a, b \in K \text{ y todo } \mathbf{x} \in V. \\ \text{III. } (ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x}), \text{ para todo par } a, b \in K \text{ y todo } \mathbf{x} \in V. \\ \text{IV. } 1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \text{ para el elemento unidad } 1 \text{ de } K \text{ y todo } \mathbf{x} \text{ de } V. \end{array} \right.$$

A un grupo abeliano juntamente con una aplicación (27) que cumpla las propiedades (28) se le llama *espacio vectorial* sobre el cuerpo K y a sus elementos se les llama *vectores*. Al elemento cero de V lo representamos por $\mathbf{0}$ y al opuesto al elemento $\mathbf{x}$ por $-\mathbf{x}$. Al elemento cero de K lo representamos por 0 , al opuesto al elemento a por $-a$ y al inverso de $a \neq 0$ por $\frac{1}{a}$.

28. a) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{x} \in V$. b) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$, para todo $a \in K$. c) $a(-\mathbf{x}) = -(a\mathbf{x})$, para todo $a \in K$ y todo $\mathbf{x} \in V$. d) $(-a)\mathbf{x} = -(a\mathbf{x})$, para todo $a \in K$ y todo $\mathbf{x} \in V$.

DEMOSTRACIÓN.—a) Si a es cualquier elemento de K , de $a + 0 = a$ se deduce: $(a + 0)\mathbf{x} = a\mathbf{x}$ y, por II, $a\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = a\mathbf{x}$, de donde, sumando a ambos miembros el opuesto al elemento $a\mathbf{x}$: $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) Si $\mathbf{x}$ es cualquier elemento de V , de $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ se deduce $a(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = a\mathbf{x}$ y, por I, $a\mathbf{x} + a\mathbf{0} = a\mathbf{x}$, de donde $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

c) De $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$ se deduce $a\mathbf{0} = a\mathbf{x} + a(-\mathbf{x})$, y por a) $\mathbf{0} = a\mathbf{x} + a(-\mathbf{x})$, que prueba que $a(-\mathbf{x}) = -(a\mathbf{x})$.

d) De $\mathbf{0} = a + (-a)$ se deduce $0\mathbf{x} = [a + (-a)]\mathbf{x}$, y por II y b), $\mathbf{0} = a\mathbf{x} + (-a)\mathbf{x}$, que prueba que $(-a)\mathbf{x} = -(a\mathbf{x})$.

Al elemento $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ se le representa por $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ y se le llama *diferencia* entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

En lo que sigue supondremos que el cuerpo K es fijo.

DEFINICIÓN 20.—Un conjunto $H \subset V$ se dice que es un *conjunto de vectores linealmente dependientes*, o que sus vectores son *linealmente dependientes* cuando existen elementos $a_1, \dots, a_n$ de K , no todos nulos, tales que

$$(29) \quad a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}; \quad \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in H.$$

DEFINICIÓN 21.—El vector $\mathbf{x}$ se dice que *depende linealmente del conjunto de vectores H* cuando existen elementos $a_1, \dots, a_m \in K$ tales que

$$(30) \quad \mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_m \mathbf{x}_m; \quad \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in H.$$

EJERCICIOS:

278. Demostrar que si $\mathbf{0} \in H$, H es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

279. Probar que el vector cero depende linealmente de cualquier conjunto H de vectores.

280. Sea V el espacio vectorial $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, siendo $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Comprobar que los vectores $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, -1)$, $\mathbf{c} = (4, 5)$ son linealmente dependientes.

281. Comprobar que el vector $(4, -2)$ depende linealmente de los $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ del ejercicio anterior.

29. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ son linealmente dependientes $\iff$ uno de los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ depende linealmente de los restantes.

DEMOSTRACIÓN.—a) Demostración de $\implies$. Sea $a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, como uno, por lo menos, de los elementos a_i ha de ser distinto de cero, supongamos que sea $a_1 \neq 0$, en cuyo caso existirá el elemento $\frac{1}{a_1}$ y, multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por él se obtiene:

$$\frac{1}{a_1} (a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n) = \frac{1}{a_1} \mathbf{0}$$

y teniendo en cuenta (28) I y 28 b),

$$\frac{1}{a_1} (a_1 \mathbf{x}_1) + \dots + \frac{1}{a_1} (a_n \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$$

y por (28) III,

$$\frac{a_1}{a_1} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{a_n}{a_1} \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

pero $\frac{1}{a_1} a_1 = 1$, y recordando IV (28),

$$\mathbf{x}_1 + \frac{a_2}{a_1} \mathbf{x}_2 + \dots + \frac{a_n}{a_1} \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

de donde, por ser V un grupo aditivo,

$$\mathbf{x}_1 = - \left(\frac{a_2}{a_1} \mathbf{x}_2 \right) - \dots - \left(\frac{a_n}{a_1} \mathbf{x}_n \right),$$

y por 28 d),

$$\mathbf{x}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) \mathbf{x}_2 + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_1} \right) \mathbf{x}_n.$$

b) Demostración de $\Leftarrow$. Si $\mathbf{x}_1 = b_2 \mathbf{x}_2 + \dots + b_n \mathbf{x}_n$, será

$$-\mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + \dots + b_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

y como $-\mathbf{x}_1 = (-1) \mathbf{x}_1$, en virtud de 28, d), será

$$(-1) \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + \dots + b_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

y como $-1 \neq 0$, los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes.

DEFINICIÓN 22.—El conjunto de vectores H *depende linealmente* del conjunto de vectores H' cuando todos los vectores de H dependen linealmente del conjunto H' . Un conjunto de vectores se dice que es un *conjunto de vectores linealmente independientes* cuando no es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

30. *La dependencia lineal es reflexiva y transitiva.*

DEMOSTRACIÓN.— H depende linealmente de H' y H' depende linealmente de H'' implica que, para todo $\mathbf{x}$ de H , se verifica

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{x}'_i, \quad \mathbf{x}'_i \in H'$$

y

$$\mathbf{x}'_i = \sum_{j=1}^m y_{ij} \mathbf{x}''_j, \quad \mathbf{x}''_j \in H'',$$

de donde

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_{ij} \mathbf{x}''_j,$$

que prueba que $\mathbf{x}$ depende linealmente de H'' . De $\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$ se deduce que todo conjunto de vectores H depende linealmente de sí mismo.

DEFINICIÓN 23.—Se llama *variedad lineal engendrada por el conjunto de vectores* $H \subset V$, y se representa por $L(H)$, al conjunto de todos los vectores de V que dependen linealmente de H . H se llama *sistema de generadores de* $L(H)$. Un subconjunto H de V se llama *variedad lineal* cuando $L(H) = H$.

31. *Las variedades lineales son espacios vectoriales respecto de las operaciones de V .*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $L(H)$ la variedad lineal engendrada por H .

a) $L(H)$ es un subgrupo de V . En efecto, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L(H)$ será:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m'} b_i \mathbf{y}_i; \quad \mathbf{x}_i \in H, \quad \mathbf{y}_j \in H \quad i = 1, \dots, m', \quad j = 1, \dots, m'.$$

Poniendo

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{z}_{i+m} = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, m',$$

y

$$c_i = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad c_{i+m} = 0, \quad i = 1, \dots, m'; \quad d_i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad d_{m+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m',$$

resulta

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+m'} c_i \mathbf{z}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m+m'} d_i \mathbf{z}_i.$$

de donde

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m+m'} (c_i - d_i) \mathbf{z}_i, \quad \mathbf{z}_i \in H, \quad i = 1, \dots, m+m',$$

luego $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in L(H)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbf{x} \in L(H), \quad a \in K &\implies \mathbf{x} = \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i \in H, \quad i = 1, \dots, r \implies a \mathbf{x} \\ &= a \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^r (a a_i) \mathbf{x}_i \in L(H). \end{aligned}$$

c) Las propiedades (28), por verificarse en V , se verifican, «a fortiori», en $L(H)$.

Por consiguiente: *Las variedades lineales son subespacios vectoriales de V .*

EJERCICIOS:

282. ¿Existe alguna variedad lineal formada por un único vector?

32. *La variedad lineal engendrada por una variedad lineal es ella misma:*

$$(31) \quad L(L(H)) = L(H).$$

DEMOSTRACIÓN.—De 31 se deduce que $L(L(H))$ depende linealmente de H , luego: $L(L(H)) \subset L(H)$. Pero como por la propiedad reflexiva de la dependencia lineal es $L(H) \subset L(L(H))$, resulta (31).

33. *L es una aplicación de $R(V)$ en sí mismo que posee las siguientes propiedades:*

- a) $H \subset L(H)$.
- b) $H \subset H' \implies L(H) \subset L(H')$
- c) $L(H \cap H') \subset L(H) \cap L(H') \subset L(H) \cup L(H') \subset L(H \cup H')$.
- d) H y H' son variedades lineales $\implies L(H \cap H') = L(H) \cap L(H')$.

DEMOSTRACIÓN.—a) Es consecuencia de la reflexividad (31) de la dependencia lineal.

b) $H \subset H' \implies H$ depende linealmente de H' y como $L(H)$ depende linealmente de H , resulta, por la transitividad, que $L(H)$ depende linealmente de H' que implica $L(H) \subset L(H')$.

c) De a) y de

$$H \cap H' \subset H \subset H \cup H', \quad H \cap H' \subset H' \subset H \cup H'$$

se deduce

$$L(H \cap H') \subset L(H) \subset L(H \cup H') \quad L(H \cap H') \subset L(H') \subset L(H \cup H'),$$

de donde

$$L(H \cap H') \subset L(H) \cap L(H'), \quad L(H) \cup L(H') \subset L(H \cup H').$$

d) H y H' son variedades lineales $\Leftrightarrow L(H) = H$, $L(H') = H'$, luego:

$$L(H \cap H') \subset H \cap H'$$

y como, en virtud de a), es

$$H \cap H' \subset L(H \cap H'),$$

resulta la igualdad.

EJERCICIOS:

283. Sea $H = \{a = (1, 0, 0), b = (1, 1, 0)\}$, $H' = \{c = (0, 0, 1), d = (0, 1, 1)\}$. Comprobar que $L(H \cap H') \neq L(H) \cap L(H')$.

284. Comprobar que, si H y H' tienen el significado del ejercicio anterior, $L(H) \cup L(H') \neq L(H \cup H')$.

DEFINICIÓN 24.—Un espacio vectorial (variedad lineal) se llama de *tipo finito* cuando posee un sistema finito de generadores. Un sistema de generadores se llama una *base* cuando son linealmente independientes.

34. *Todo espacio vectorial de tipo finito posee una base.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea V un espacio vectorial de tipo finito y sea $H = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema de generadores de V . $u_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Si $u_1, \dots, u_n$ son linealmente independientes forman una base y el teorema está demostrado. En caso contrario existirá una relación de la forma:

$$(32) \quad a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0,$$

y no todas las a_i serán nulas. Si, por ejemplo, es $a_n \neq 0$, multiplicando (32) por $\frac{1}{a_n}$, se obtiene:

$$(33) \quad u_n = \left(-\frac{a_1}{a_n}\right) u_1 + \dots + \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) u_{n-1}.$$

Si x es un vector arbitrario de V , será:

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n,$$

y, en virtud de (33), será:

$$x = \left(x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_n\right) u_1 + \dots + \left(x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n\right) u_{n-1},$$

que prueba que $H_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ es también un sistema de generadores de V . Supongamos demostrado que $H_t = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-t}\}$ es un sistema de generadores de V . Si fuese una base estaría probado el teorema; en caso contrario, procediendo del mismo modo obtendríamos otro sistema de generadores con un vector menos. Por consiguiente, repitiendo el razonamiento como máximo $n - 1$ veces se obtendría una base.

35. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y $\mathbf{x}$ un vector arbitrario de V , los elementos $x_1, \dots, x_n$, tales que

$$(34) \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n,$$

están unívocamente determinados por $\mathbf{x}$ y por la base B .

DEMOSTRACIÓN.—Si fuese

$$(35) \quad \mathbf{x} = y_1 \mathbf{u}_1 + \dots + y_n \mathbf{u}_n,$$

de (34) y (35) resultaría:

$$(x_1 - y_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (x_n - y_n) \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

y por ser $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ linealmente independientes, sería:

$$x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

36. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y si $V' = K \times \dots \times K$, existe una biyección b entre V y V' definida por $b(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)$, siendo las x_i los elementos de K determinados por (34), y esta biyección es tal que:

$$\text{I. } b(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}) + b(\mathbf{y}).$$

$$\text{II. } b(a \mathbf{x}) = a [b(\mathbf{x})].$$

DEMOSTRACIÓN.—En **35** se ha probado que b es una aplicación. Supongamos que

$$b(\mathbf{x}) = b(\mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n),$$

sería:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{y} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n,$$

EJERCICIOS:

287. Averiguar si son iguales las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} & 7 \\ 0 & 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{6} & \frac{\sqrt{5}-3}{2}, (3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) \\ 1 - \frac{105-90}{15}, \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

288. Multiplicar la matriz $(2, -3, -2, 3)$ por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

289. ¿Se puede multiplicar la matriz $(1, 3, -4, 2)$ por la matriz $\begin{pmatrix} 1, 2, 4, -5 \\ -3, 2, 6, 8 \end{pmatrix}$?

Multiplicar $(\sin a, \cos a)$ por $\begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & -\sin a \end{pmatrix}$

38. De la multiplicación de matrices y de la igualdad de matrices se deduce que el sistema (38) se puede escribir en la siguiente forma matricial:

$$(41) \quad (x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

por lo que a la ecuación (41) se le llama *ecuación matricial* de la variedad lineal L engendrada por los vectores

$$\mathbf{a}_1 = a_{11} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{1n} \mathbf{u}_n, \dots, \mathbf{a}_r = a_{r1} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{rn} \mathbf{u}_n.$$

(Obsérvese que la primera fila de la última matriz de (41) está formada por las coordenadas del vector $\mathbf{a}_1$, la segunda por las coordenadas de $\mathbf{a}_2$, etc., la última fila por las coordenadas de $\mathbf{a}_r$.)

se puede suponer que se ha prescindido, a partir de la igualdad i -ésima, de todos los vectores $\mathbf{v}_i$ cuyos coeficientes sean cero en todas ellas, por lo que

se puede admitir que $a_{ii}^{i-1} \neq 0$. Multiplicando la igualdad i -ésima por $-\frac{a_{ji}^{i-1}}{a_{ii}^{i-1}}$

y sumando a la igualdad j -ésima, $j = i + 1, \dots, n$, se obtendrá otro sistema análogo al (46) sin más que hacer en él i igual a $i + 1$, lo que prueba que el proceso se puede continuar mientras queden en el segundo miembro vectores distintos del vector cero. Ahora bien, obsérvese que en (46) existen $n - i + 1$ igualdades en cuyos segundos miembros figuran como máximo $m - i + 1$ vectores distintos del vector cero; luego, repitiendo el proceso como máximo m veces se obtendrán $n - m$ igualdades cuyo segundo miembro será cero. La última de estas igualdades será:

$$(47) \quad \mathbf{u}_n + a_{n1}''' \mathbf{u}_1 + \dots + a_{nm}''' \mathbf{u}_m = \mathbf{0},$$

que prueba que los vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son linealmente dependientes, ya que el coeficiente de $\mathbf{u}_n$ en (47) es $1 \neq 0$, lo que está en contradicción con la hipótesis de ser estos vectores linealmente independientes.

41. *Todas las bases de un espacio vectorial de tipo finito constan del mismo número de vectores.*

DEFINICIÓN 26.—Al número de vectores de una base de un espacio vectorial se le llama *dimensión del espacio vectorial*, y lo designaremos por $\dim. (V)$. Como las variedades lineales son espacios vectoriales, al número de vectores de una base de una variedad lineal se le llama *dimensión de la variedad lineal*.

42. COROLARIO DE LA PROLONGACIÓN DE UNA BASE.—*Dada una base $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ de una variedad lineal L de un espacio vectorial V de dimensión finita n , existe una base $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de V en la que figuran todos los vectores de la base B_1 de L .*

DEMOSTRACIÓN.—Si $L = V$ la base B_1 será base de V y el corolario está probado. Si $L \neq V$, como $L \subset V$, existirá un vector $\mathbf{u}_{r+1}$, tal que $\mathbf{u}_{r+1} \notin L$. Los vectores $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}\}$ son linealmente independientes, pues en caso contrario existiría una relación de la forma:

$$(48) \quad a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_r \mathbf{u}_r + a_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{0},$$

en la que no serían nulos todos los números a_i , $i = 1, \dots, r + 1$. Si a_{r+1} fuese cero la relación (48) establecería que los vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ serían linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis de formar una base de L . Si

$a_{r+1} \neq 0$, el vector $\mathbf{u}_{r+1}$ dependería linealmente de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$, luego pertenecería a L . Por consiguiente, si $L_1 = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1})$, se verifica que $B_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}\}$ es una base de L_1 . Si $L_1 = V$ se acabó la demostración. Si $L_1 \neq V$ existirá un vector $\mathbf{u}_{r+2}$ tal que $\mathbf{u}_{r+2} \notin L_1$. Así siguiendo, se llegará a un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_n\}$ linealmente independientes, y si $L' = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, será $L' = V$, ya que, en caso contrario, existiría otro vector $\mathbf{u}_{n+1} \notin L'$ y serían $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}\}$ linealmente independientes en contradicción con el teorema de la base.

Del corolario anterior se deduce inmediatamente que:

43. Si L es una variedad lineal de V se verifica que $\dim. (L) \leq \dim. (V)$ y $\dim. L = \dim. V \iff L = V$.

EJERCICIOS:

293. Sea $L = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$, $\mathbf{a}_3 = 5\mathbf{u}_1 - 10\mathbf{u}_2 - 8\mathbf{u}_3$, una variedad lineal del espacio vectorial tridimensional V de base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. a) Hallar una base de L . b) Prolongarla a una base de V .

294. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base del espacio vectorial V , probar que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2$ es también una base de V .

295. Hallar las relaciones entre las coordenadas (x_1, x_2) y las (x_1^*, x_2^*) de un vector $\mathbf{x}$ respecto de las dos bases del ejercicio anterior.

44. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $B^* = \{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*\}$ son dos bases de un espacio vectorial V y si $(x_1, \dots, x_n)$ y $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ son las coordenadas de un mismo vector $\mathbf{x}$ respecto de B y B^* , respectivamente, se verifica que:

$$(49) \quad (x_1^*, \dots, x_n^*) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (x_1, \dots, x_n) = (x_1^*, \dots, x_n^*) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sean

$$(50) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_{11} \mathbf{u}_1^* + \dots + a_{1n} \mathbf{u}_n^* \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{u}_n = a_{n1} \mathbf{u}_1^* + \dots + a_{nn} \mathbf{u}_n^* \end{cases} \quad (51) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1^* = b_{11} \mathbf{u}_1 + \dots + b_{1n} \mathbf{u}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{u}_n^* = b_{n1} \mathbf{u}_1 + \dots + b_{nn} \mathbf{u}_n \end{cases}$$

De

$$(52) \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n = x_1^* \mathbf{u}_1^* + \dots + x_n^* \mathbf{u}_n^*,$$

$u_1, \dots, u_n$ dependen linealmente de los $v_1, \dots, v_n$, se verificará, por la transitividad de la dependencia lineal, que V depende linealmente de $\{v_1, \dots, v_n\}$, luego $V \subset L(v_1, \dots, v_n) \subset V$, que prueba que $\{v_1, \dots, v_n\}$ son un sistema de generadores de V y, por el teorema de la base, $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes, luego forman una base.

6. Homomorfismos entre espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 27.—Se llama *homomorfismo de V en V'* , siendo V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, K , a toda aplicación $f: V \rightarrow V'$ tal que los diagramas siguientes sean conmutativos:

$$(56) \quad \begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{+} & V \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V' \times V' & \xrightarrow{+} & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K \times V & \longrightarrow & V \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ K \times V' & \longrightarrow & V' \end{array}$$

La conmutatividad de estos diagramas equivale a que, para todo par $(x, y) \in V \times V$ y todo $a \in K$ se verifique que:

$$(57) \quad \begin{cases} \text{I. } f(x + y) = f(x) + f(y). \\ \text{II. } f(ax) = af(x). \end{cases}$$

46. CONSECUENCIAS.—Sea f un homomorfismo de V en V' . a) $f(0) = 0$.

b) Los vectores $x_1, \dots, x_m$ son linealmente dependientes $\implies$ Los vectores $f(x_1), \dots, f(x_m)$ son linealmente dependientes.

c) Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V y $\{a'_1, \dots, a'_n\}$ n vectores arbitrarios de V' , existe un único homomorfismo f de V en V' tal que $f(u_i) = a'_i$, $i = 1, \dots, n$.

DEMOSTRACIÓN.—a) De $x + 0 = x$ y de (57) I se deduce $f(x + 0) = f(x)$, $f(x) + f(0) = f(x)$, de donde, por ser V' un grupo, $f(0) = 0$.

b) De $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0$ y no todas las a_i nulas se deduce que $f(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) = a_1 f(x_1) + \dots + a_m f(x_m) = f(0) = 0$, que prueba que $f(x_1), \dots, f(x_m)$ son linealmente dependientes.

c) Supongamos que exista el homomorfismo f tal que $f(u_i) = a'_i$, $i = 1, \dots, n$. Si $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ es un vector arbitrario, se verificará:

$$(58) \quad f(x) = f(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 a'_1 + \dots + x_n a'_n,$$

luego el homomorfismo, si existe, es único.

Recíprocamente, tomemos (58) como definición de una aplicación f de V en V' y veamos que es un homomorfismo que cumple las condiciones deseadas. 1) Si $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$, será:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f((x_1 + y_1)u_1 + \dots + (x_n + y_n)u_n) = (x_1 + y_1)a'_1 + \dots + (x_n + y_n)a'_n \\ &= (x_1 a'_1 + \dots + x_n a'_n) + (y_1 a'_1 + \dots + y_n a'_n) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} f(ax) &= f((ax_1)u_1 + \dots + (ax_n)u_n) = (ax_1)a'_1 + \dots + (ax_n)a'_n \\ &= a(x_1 a'_1 + \dots + x_n a'_n) = af(x). \end{aligned}$$

Finalmente, se verifica que $f(u_i) = a'_i$.

EJERCICIOS:

297. Demostrar que $f(-x) = -f(x)$, siendo f un homomorfismo.

298. Si los vectores $a_1, \dots, a_n$ son linealmente independientes y f es un homomorfismo, ¿son linealmente independientes los vectores $f(a_1), \dots, f(a_n)$?

299. Sea f el homomorfismo de V en V' definido por las siguientes condiciones:

$$f(u_1) = 4u'_1 - 3u'_2, \quad f(u_2) = u'_1 + 5u'_2,$$

siendo $B = \{u_1, u_2\}$ una base de V y $B' = \{u'_1, u'_2\}$ una base de V' . Calcular (x'_1, x'_2) en función de (x_1, x_2) , siendo $f(x_1 u_1 + x_2 u_2) = x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2$.

300. Resolver el mismo problema del ejercicio anterior en el siguiente caso:

$$f(u_1) = u'_1 + u'_2 - u'_3, \quad f(u_2) = u'_1 - 4u'_3,$$

siendo $B = \{u_1, u_2\}$ una base de V y $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ una base de V' .

301. Hallar las ecuaciones (véase el ejercicio 299) del homomorfismo f tal que

$$f(u_1) = 2u'_1 - u'_2 + u'_3, \quad f(u_2) = u'_1 + 3u'_2 - 2u'_3, \quad f(u_3) = -7u'_2 + 5u'_3,$$

siendo $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V y $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ una base de V' .

302. ¿Es la correspondencia recíproca del homomorfismo f del ejercicio 299 un homomorfismo?

303. ¿Es la correspondencia recíproca de f en el ejercicio 300 un homomorfismo?

304. ¿Es la correspondencia recíproca de la correspondencia f del ejercicio 301 un homomorfismo?

DEFINICIÓN 28.—Se llama *imagen del homomorfismo* $f: V \rightarrow V'$, a la imagen de la aplicación f . Se llama *núcleo* del homomorfismo f , y se designa

por $\ker(f)$, al conjunto de todos los vectores $\mathbf{x}$ de V tales que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Por consiguiente:

$$(59) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' \in \operatorname{im}(f) &\Leftrightarrow \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in V. \\ \mathbf{x} \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \ker(f) = f^{-1}(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

47. CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN 28.—a) *im. (f) es una variedad lineal de V' .* b) *ker (f) es una variedad lineal de V .*

DEMOSTRACIÓN.—a) $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \operatorname{im}(f) \Leftrightarrow \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \mathbf{y}' = f(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$
 $\Rightarrow \mathbf{x}' - \mathbf{y}' = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in \operatorname{im}(f)$. Si $\mathbf{x}' \in \operatorname{im}(f)$ y $a \in K$,
 $a\mathbf{x}' = af(\mathbf{x}) = f(a\mathbf{x}) \in \operatorname{im}(f)$.

b) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$
 $\Rightarrow f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(f)$. Si $\mathbf{x} \in \ker(f)$, $a \in K \Rightarrow f(\mathbf{x})$
 $= \mathbf{0}, af(\mathbf{x}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}, f(a\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, luego $a\mathbf{x} \in \ker(f)$.

EJERCICIOS:

305. Hallar $\operatorname{im}(f)$ y $\ker(f)$ para el homomorfismo f del ejercicio 299.
 306. Hallar $\operatorname{im}(f)$ y $\ker(f)$ para el homomorfismo del ejercicio 300.
 307. Hallar $\operatorname{im}(f)$ y $\ker(f)$ para el homomorfismo del ejercicio 301.
 308. Observar qué relación existe entre $\dim(V)$, $\dim(\operatorname{im}(f))$ y $\dim(\ker(f))$ en los ejemplos de los ejercicios 305, 306 y 307.

DEFINICIÓN 29.—Cuando $\operatorname{im}(f) = V'$ el homomorfismo f se llama *epimorfismo*. Cuando $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, el homomorfismo f se llama *inyectivo*. Un homomorfismo que es epimorfismo e inyectivo se llama *isomorfismo* u *homomorfismo biyectivo*.

EJERCICIOS:

309. ¿Qué clase de homomorfismos son los de los ejercicios 299, 300 y 301?
 310. Clasificar, de acuerdo con la def. 29, el siguiente homomorfismo $f: f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}'_1 - 4\mathbf{u}'_2$,
 $f(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2$, $f(\mathbf{u}_3) = 4\mathbf{u}'_1 + 7\mathbf{u}'_2$, siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y
 $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ una base de V' .

7. Homomorfismo natural. Primer teorema de isomorfía.—Sea L una variedad lineal del espacio vectorial V .

DEFINICIÓN 30.—Se llama *relación definida por L en V* , y la representamos por la misma letra L , a la siguiente relación:

$$(60) \quad \mathbf{x} L \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in L.$$

48. La relación L definida en (60) es una relación de igualdad.

DEMOSTRACIÓN.—a) $0 \in L \iff x - x \in L \iff x L x$.

b) $x L y \iff x - y \in L \implies y - x \in L \iff y L x$.

c) $x L y$ e $y L z \iff x - y \in L$ e $y - z \in L \implies (x - y) + (y - z) = x - z \in L \iff x L z$.

49. La relación de igualdad L es permutable con las operaciones del espacio vectorial.

DEMOSTRACIÓN.—a) Si x es un vector arbitrario de V e $y L z$ se verifica que $(y + x) L (z + x)$. En efecto, $y L z \iff y - z \in L \implies (y + x) - (z + x) \in L \iff (y + x) L (z + x)$.

b) $x L y$ y $z L t \implies (x + z) L (y + t)$. Ya que, en virtud de a) es $(x + z) L (y + z)$ e $(y + z) L (y + t)$.

c) Si a es un número arbitrario de K y $x L y$ se verifica que $a x L a y$, ya que $x - y \in L \implies a(x - y) = ax - ay \in L$.

50. El conjunto cociente V/L es un espacio vectorial, llamado espacio vectorial cociente de V módulo L .

DEMOSTRACIÓN.—En V/L se definen la adición y la multiplicación por elementos de K del siguiente modo:

DEFINICIÓN DE ADICIÓN EN V/L : $(x + L) + (y + L) = x + y + L$.

DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN EN V/L : $a(x + L) = ax + L$.

En donde $x + L$ es la clase que contiene a x y a es un elemento arbitrario de K .

La uniformidad es consecuencia inmediata de **49** y las restantes propiedades de espacio vectorial son triviales.

EJERCICIOS:

311. Terminar la demostración del teorema **50**.

312. Si $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de V y $L = L(u_1, u_2)$, comprobar que $u_3 + L$ es una base de V/L .

313. Si $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de V y $L = L(a, b)$, siendo $a = 4u_1 - u_2 + u_3$, $b = u_1 + 3u_2 - u_3$. Hallar una base de V/L .

314. ¿Qué relación existe entre $\dim(L)$, $\dim V$ y $\dim(V/L)$ en los ejercicios 312 y 313?

51. Si L es una variedad lineal del espacio vectorial V de dimensión finita, se verifica que

$$(61) \quad \dim(V) = \dim(L) + \dim(V/L).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ una base de L , en virtud de **42**, se puede prolongar la base B a una base $B^* = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ de V . Vamos a probar que $B' = \{u_{r+1} + L, \dots, u_n + L\}$ es una base de V/L .

a) B' es un sistema de generadores de V/L . En efecto, sea $x + L$ un vector arbitrario de V/L ,

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_r u_r + \dots + x_n u_n.$$

De $x_1 u_1 + \dots + x_r u_r \in L$ se deduce que

$$(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) - (x_{r+1} u_{r+1} + \dots + x_n u_n) \in L;$$

que implica que

$$x + L = (x_{r+1} u_{r+1} + \dots + x_n u_n) + L = x_{r+1} (u_{r+1} + L) + \dots + x_n (u_n + L).$$

b) Los vectores de B' son linealmente independientes. En efecto, de

$$\lambda_{r+1} (u_{r+1} + L) + \dots + \lambda_n (u_n + L) = 0$$

se deduce que

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n \in L,$$

o bien:

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r,$$

y, por ser los vectores $u_1, \dots, u_n$ linealmente independientes, será $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Por ser B , B^* y B' bases de L , V y V/L , respectivamente, se verifica que

$$\dim(L) = r, \dim(V) = n, \dim(V/L) = n - r,$$

de donde resulta (61).

52. Si L es una variedad lineal del espacio vectorial V , la correspondencia

$$(62) \quad V \xrightarrow{n} V/L, \quad n(x) = x + L,$$

que hace corresponder a cada vector $\mathbf{x}$ de V la clase $\mathbf{x} + L$ que lo contiene, es un epimorfismo, que llamaremos *natural*.

DEMOSTRACIÓN.—Como cada vector pertenece a una única clase, n es una aplicación. Es un homomorfismo:

- a) $n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + L = (\mathbf{x} + L) + (\mathbf{y} + L) = n(\mathbf{x}) + n(\mathbf{y}).$
 b) $n(a\mathbf{x}) = a\mathbf{x} + L = a(\mathbf{x} + L) = a n(\mathbf{x}).$

El homomorfismo es epimorfismo, ya que dada la clase $\mathbf{x} + L$ se verifica que $n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + L$.

Sea

$$(63) \quad V \xrightarrow{f} V'$$

un homomorfismo del espacio vectorial V en el espacio vectorial V' , ambos sobre el mismo cuerpo K . Por ser f una aplicación define en V una relación de igualdad:

$$(64) \quad \mathbf{x} f y \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = f(y).$$

Sea V/f el conjunto cociente de V respecto de la relación de igualdad f . Se verifica que la relación de igualdad f es igual a la relación de igualdad definida en V por la variedad lineal $\ker(f)$. En efecto, sea R la relación de igualdad definida por $\ker(f)$. Se verifica:

- a) $\mathbf{x} f y \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = f(y) \Rightarrow f(\mathbf{x}) - f(y) = 0 \Rightarrow f(\mathbf{x} - y) = 0$
 $\Leftrightarrow \mathbf{x} - y \in \ker(f) \Leftrightarrow \mathbf{x} R y.$
 b) $\mathbf{x} R y \Leftrightarrow \mathbf{x} - y \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\mathbf{x} - y) = 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) - f(y) = 0$
 $\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(y) \Leftrightarrow \mathbf{x} f y.$

53. PRIMER TEOREMA DE ISOMORFIA.—Sea (63) un homomorfismo arbitrario del espacio vectorial V en el espacio vectorial V' , ambos definidos sobre el mismo cuerpo K . Se verifica que el diagrama:

$$(65) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ n \downarrow & & \uparrow i \\ & b & \\ V/f & \longrightarrow & \text{im}(f) \end{array}$$

es conmutativo, en donde n es el epimorfismo natural, b es un isomorfismo e i es la inmersión definida por $i(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'$ para todo $\mathbf{x}' \in \text{im}(f)$.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que el teorema es verdad. Sea $\mathbf{x}$ un vector arbitrario de V , se verificará que

$$(66) \quad f(\mathbf{x}) = i b n(\mathbf{x}),$$

pero

$$(67) \quad n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \ker(f),$$

luego

$$i b n(\mathbf{x}) = i b (\mathbf{x} + \ker(f)) = b(\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\mathbf{x}).$$

Por consiguiente, si se verifica (65) debe ser

$$(68) \quad b(\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\mathbf{x}).$$

Definiendo b mediante (68) vamos a probar que es un isomorfismo.

a) b es una aplicación. En efecto, está definido en todo el espacio V/f . Sea $\mathbf{x} + \ker(f) = \mathbf{x}' + \ker(f)$. Esto implica que $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \ker(f)$, de donde

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}') = 0, f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$$

y, en virtud de (65),

$$b(\mathbf{x} + \ker(f)) = b(\mathbf{x}' + \ker(f)).$$

b) b es un homomorfismo. En efecto:

$$\begin{aligned} b[(\mathbf{x} + \ker(f)) + (\mathbf{y} + \ker(f))] &= b[\mathbf{x} + \mathbf{y} + \ker(f)] = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ &= b[\mathbf{x} + \ker(f)] + b[\mathbf{y} + \ker(f)], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b[a(\mathbf{x} + \ker(f))] &= b(a\mathbf{x} + \ker(f)) = f(a\mathbf{x}) = a f(\mathbf{x}) \\ &= a[b(\mathbf{x} + \ker(f))]. \end{aligned}$$

c) b es epimorfismo. Sea $\mathbf{x}' \in \text{im}(f)$. Esto implica que existe un vector $\mathbf{x}$ de V tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$; por consiguiente,

$$b(\mathbf{x} + \ker(f)) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'.$$

d) b es *inyectivo*. En efecto,

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x} + \ker(f)) = b(\mathbf{y} + \ker(f)) &\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(f) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} + \ker(f) = \mathbf{y} + \ker(f). \end{aligned}$$

De (68) se deduce que

$$i b n(\mathbf{x}) = i b(\mathbf{x} + \ker(f)) = i f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

luego el diagrama (65) es conmutativo.

DEFINICIÓN 31.—Dos espacios vectoriales se llaman *isomorfos* cuando existe entre ellos un isomorfismo. Si V y V' son isomorfos se escribe:

$$V \approx V'.$$

54. COROLARIO.—Si (63) es un homomorfismo arbitrario, se verifica:

$$(69) \quad V/\ker(f) \approx \text{im}(f).$$

EJERCICIOS:

315. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V y $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ una base de V' . Sea f el homomorfismo de V en V' definido por:

$$f(\mathbf{u}_1) = 3\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2, \quad f(\mathbf{u}_3) = 0, \quad f(\mathbf{u}_4) = 0.$$

Escribir las ecuaciones de n , b , i y f .

316. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V , $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ una base de V' y sea f el homomorfismo de V en V' definido por:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2, \quad f(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2, \quad f(\mathbf{u}_3) = 3\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2, \quad f(\mathbf{u}_4) = \mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2.$$

Escribir las ecuaciones de n , b , i y f .

317. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de V , $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ una base de V' y sea f el homomorfismo de V en V' definido por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3, \quad f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_3, \quad f(\mathbf{u}_3) = 3\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2, \\ f(\mathbf{u}_4) &= 4\mathbf{u}'_1 - 7\mathbf{u}'_2 + 5\mathbf{u}'_3. \end{aligned}$$

Escribir las ecuaciones de n , b , i y f .

55. Si n es el epimorfismo natural:

$$V \xrightarrow{n} V/L,$$

se verifica que $\ker(n) = L$, luego la igualdad (61) se puede escribir del siguiente modo:

$$(70) \quad \dim V = \dim(\ker(n)) + \dim(\operatorname{im}(n)).$$

56. $V \approx V' \iff \dim V = \dim V'$.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\implies$. Sea $f; V \rightarrow V'$ el isomorfismo de V sobre V' . Por ser f isomorfismo es epimorfismo, esto es, $\operatorname{im}(f) = V'$, pero si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V , se verifica que $f(u_1), \dots, f(u_n)$ es un sistema de generadores de V' , luego $\dim V' \leq \dim V$. Pero como f^{-1} es un epimorfismo de V' en V , el mismo razonamiento prueba que $\dim V \leq \dim V'$.

b) $\impliedby$. Sean $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ bases de V y V' , respectivamente. Consideremos el homomorfismo: $f(u_1) = u'_1, \dots, f(u_n) = u'_n$. Este homomorfismo es epimorfismo. Además es inyectivo, pues si $f(x) = f(y)$, sería $f(x - y) = 0$, o bien

$$(x_1 - y_1)u'_1 + \dots + (x_n - y_n)u'_n = 0,$$

y, por ser B' una base, resulta $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$.

57. Si $V \xrightarrow{f} V'$ es un homomorfismo arbitrario, se verifica que

$$(71) \quad \dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)).$$

DEMOSTRACIÓN.—Del primer teorema de isomorfía se deduce que

$$\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V/\ker(f)),$$

y, en virtud de **55**,

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(V/\ker(f)),$$

y de estas dos relaciones resulta (63), ya que $\ker(n) = \ker(f)$.

8. Operaciones con homomorfismos. A) $\text{Hom}(V, V')$.—Se representa por $\text{Hom}(V, V')$ al conjunto formado por todos los homomorfismos de V en V' , siendo V y V' espacios vectoriales arbitrarios definidos sobre el mismo cuerpo.

DEFINICIÓN 32.—*Adición en $\text{Hom}(V, V')$.* Sean f, g dos homomorfismos arbitrarios de V en V' , se llama *suma*, y se representa por $f + g$ a la siguiente aplicación de V en V' :

$$(72) \quad (f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Se llama *producto del número a de K por el homomorfismo f de $\text{Hom}(V, V')$* , y se representa por $a f$, a la aplicación de V en V' :

$$(73) \quad a f(\mathbf{x}) = a[f(\mathbf{x})]$$

EJERCICIOS:

318. Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, bases de V y V' . Sean f y g homomorfismos de $\text{Hom}(V, V')$, definidos del siguiente modo: $f(\mathbf{u}_1) = 8\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2$, $f(\mathbf{u}_2) = 4\mathbf{u}'_1 + 3\mathbf{u}'_2$; $g(\mathbf{u}_1) = -5\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$, $g(\mathbf{u}_2) = 4\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$. Calcular las ecuaciones de $f + g$ y de $6f$.

58. El conjunto $\text{Hom}(V, V')$, respecto de las definiciones (72) y (73), es un espacio vectorial.

DEMOSTRACIÓN.—a) La suma de dos homomorfismos es otro homomorfismo. En efecto:

$$\begin{aligned} (f + g)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + (f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})) \\ &= (f + g)(\mathbf{x}) + (f + g)(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(a\mathbf{x}) &= f(a\mathbf{x}) + g(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x}) + ag(\mathbf{x}) = a[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \\ &= a[(f + g)(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

b) El producto de un elemento a de K por un homomorfismo es un homomorfismo.

$$\begin{aligned} (af)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= a[f(\mathbf{x} + \mathbf{y})] = a[f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})] = a[f(\mathbf{x})] + a[f(\mathbf{y})] \\ &= af(\mathbf{x}) + af(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (af)(b\mathbf{x}) &= a[f(b\mathbf{x})] = a[bf(\mathbf{x})] = (ab)[f(\mathbf{x})] = (ba)[f(\mathbf{x})] \\ &= b[af(\mathbf{x})] = b[af(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

c) *Asociatividad.*

$$[(f + g) + h](x) = (f + g)(x) + h(x) = [f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)] \\ = f(x) + (g + h)(x) = [f + (g + h)](x).$$

d) *Conmutatividad.*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

e) *Elemento neutro.* Sea 0 la correspondencia de V en V' tal que, para todo $x \in V$ se verifica que $0(x) = 0$. Esta correspondencia es una aplicación. Es un homomorfismo:

$$0(x + y) = 0 = 0 + 0 = 0(x) + 0(y). \\ 0(ax) = 0 = a0 = a[0(x)].$$

El homomorfismo 0 es el elemento neutro de la adición:

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

f) *Elemento opuesto.* Si f es un homomorfismo de V en V' se verifica que $g(x) = -[f(x)]$ es un homomorfismo. Desde luego, $g(x)$ es una aplicación. Además:

$$g(x + y) = -[f(x + y)] = -[f(x) + f(y)] = -[f(x)] + [-f(y)] \\ = g(x) + g(y). \\ g(ax) = -[f(ax)] = -[af(x)] = a[-f(x)] = ag(x).$$

El homomorfismo $g(x)$ es el opuesto al $f(x)$, ya que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + [-f(x)] = 0 = 0(x).$$

Al homomorfismo g se le representa por $-f$:

$$-f(x) = -[f(x)].$$

$$g) \quad a(f + g) = af + ag.$$

$$[a(f + g)](x) = a[(f + g)(x)] = a[f(x) + g(x)] = a[f(x)] + a[g(x)] \\ = af(x) + ag(x) = [af + ag](x).$$

$$h) (a + b)f = af + bf.$$

$$[(a + b)f](\mathbf{x}) = (a + b)[f(\mathbf{x})] = a[f(\mathbf{x})] + b[f(\mathbf{x})] = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{x}) \\ = (af + bf)(\mathbf{x}).$$

$$i) (a b)f = a(bf).$$

$$[(a b)f](\mathbf{x}) = (a b)[f(\mathbf{x})] = a[b(f(\mathbf{x}))] = a[bf(\mathbf{x})] = a(bf)(\mathbf{x}).$$

$$j) 1.f = f.$$

$$(1.f)\mathbf{x} = 1[f(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}).$$

$$59. \dim(\text{Hom}(V, V')) = \dim(V) \cdot \dim(V').$$

DEMOSTRACIÓN.—Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_m\}$ bases de V y V' , respectivamente. Consideremos los homomorfismos f_{ij} definidos del siguiente modo:

$$(74) \quad f_{ij}(\mathbf{u}_1) = 0, \dots, f_{ij}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}'_j, \dots, f_{ij}(\mathbf{u}_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Sea f un homomorfismo arbitrario:

$$(75) \quad f(\mathbf{u}_i) = x_{i1}\mathbf{u}'_1 + \dots + x_{im}\mathbf{u}'_m, \quad i = 1, \dots, n.$$

De (74) y (75) se deduce:

$$f(\mathbf{u}_i) = (x_{i1}f_{11} + \dots + x_{i1}f_{i1} + \dots + x_{in1}f_{n1})(\mathbf{u}_i) + \dots + (x_{1m}f_{1m} + \dots + x_{im}f_{im} \\ + \dots + x_{nm}f_{nm})(\mathbf{u}_i) = [(x_{i1}f_{11} + \dots + x_{i1}f_{i1} + \dots + x_{in1}f_{n1}) + \dots + (x_{1m}f_{1m} + \dots \\ + x_{im}f_{im} + \dots + x_{nm}f_{nm})](\mathbf{u}_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

de donde

$$(76) \quad f = (x_{11}f_{11} + \dots + x_{i1}f_{i1} + \dots + x_{n1}f_{n1}) + \dots \\ + (x_{1m}f_{1m} + \dots + x_{im}f_{im} + \dots + x_{nm}f_{nm}).$$

La expresión (76) prueba que el conjunto

$$\{f_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

es un sistema de generadores de $\text{Hom}(V, V')$.

El sistema de generadores

$$\{f_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

es una base de $\text{Hom}(V, V)$. En efecto, supongamos que existiese una combinación lineal de la forma:

$$(77) \quad (a_{11}f_{11} + \dots + a_{i1}f_{i1} + \dots + a_{n1}f_{n1}) + \dots \\ + (a_{1m}f_{m1} + \dots + a_{im}f_{im} + \dots + a_{nm}f_{nm}) = 0,$$

en donde el cero del último miembro es el homomorfismo cero. Aplicando (77) a u_i , resultaría:

$$a_{i1}u'_1 + \dots + a_{im}u'_m = 0,$$

de donde $a_{i1} = \dots = a_{im} = 0$, $i = 1, \dots, n$, luego los homomorfismos

$$\{f_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

son linealmente independientes, luego forman una base de $\text{Hom}(V, V)$. Su número es $n \times m$.

B) MULTIPLICACIÓN DE HOMOMORFISMOS.—Siendo los homomorfismos aplicaciones, se puede definir el producto de homomorfismos como producto de aplicaciones:

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \xrightarrow{f} V', \quad V' \xrightarrow{g} V'', \\ V \xrightarrow{g \circ f} V'', \quad g \circ f(x) = g[f(x)]. \end{array} \right.$$

EJERCICIO:

319. Sea $B = \{u_1, u_2\}$ una base de V , $B' = \{u'_1, u'_2\}$ una base de V' , $B'' = \{u''_1, u''_2\}$ una base de V'' . Sean f y g los homomorfismos definidos por $f(u_1) = 6u'_1 - 5u'_2$, $f(u_2) = 2u'_1 + u'_2$; $g(u'_1) = u''_1 + 3u''_2$, $g(u'_2) = 4u''_1 + 7u''_2$. Hallar las ecuaciones del homomorfismo $g \circ f$.

60. La multiplicación de homomorfismos es asociativa. Dado el homomorfismo f de V en V' existen los homomorfismos 1_V de V en V y $1_{V'}$ de V' en V' tales, que $f \circ 1_V = f$, $1_{V'} \circ f = f$. El producto de dos homomorfismos es otro homomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.—Siendo asociativo el producto de aplicaciones lo es el de homomorfismos. La correspondencia 1_v definida por

$$1_v(x) = x, \quad \forall x \in V$$

es un homomorfismo, ya que

$$\begin{aligned} 1_v(x + y) &= x + y = 1_v(x) + 1_v(y) \\ 1_v(ax) &= ax = a[1_v(x)]. \end{aligned}$$

Se verifica que

$$f 1_v(x) = f[1_v(x)] = f(x), \quad \forall x \in V.$$

Análogamente se define $1_{v'}$.

Sea f un homomorfismo de V en V' y g un homomorfismo de V' en V'' .

$$\begin{aligned} g f(x + y) &= g[f(x + y)] = g[f(x) + f(y)] = g[f(x)] + g[f(y)] \\ &= g f(x) + g f(y) \\ g f(ax) &= g[f(ax)] = g[af(x)] = a[g f(x)] = a[g f(x)]. \end{aligned}$$

C) END. (V).—Se llama *endomorfismo* a un homomorfismo de un espacio vectorial en sí mismo. Al conjunto de todos los endomorfismos de V se le representa por End. (V) .

61. *End. (V) es un anillo con elemento unidad.*

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de **58** se verifica que End. (V) es un grupo abeliano. En virtud de **59** la multiplicación es asociativa y posee elemento unidad, 1_v , por la derecha y por la izquierda. Queda únicamente por probar la distributividad.

$$\begin{aligned} [h(f + g)](x) &= h[(f + g)(x)] = h[f(x) + g(x)] = h[f(x)] + h[g(x)] \\ &= hf(x) + hg(x) = (hf + hg)(x), \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 33.—Un anillo que además es espacio vectorial se llama un *álgebra*.

62. *End. (V) es un álgebra con elemento unidad.*

Es consecuencia de **60** y **58**.

EJERCICIOS:

320. Sea f un endomorfismo de $\text{End.}(V)$ y sea $G = \{f^r\}_{r \in \mathbb{Z}^0}$, siendo $\mathbb{Z}^0$ el conjunto de todos los enteros no negativos. Sea $L(f) = L(G)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de G . Probar que $L(f)$ es un álgebra respecto de las operaciones de $\text{End.}(V)$, por lo que se dice que $L(f)$ es una subálgebra de $\text{End.}(V)$.

321. Sea $B = \{u_1, u_2\}$ una base de V . Sean f_i , $i = 1, 2, 3, 4$, los endomorfismos de V definidos por:

$$\begin{aligned} f_1(u_1) &= u_1, & f_1(u_2) &= 0; & f_3(u_1) &= 0, & f_3(u_2) &= u_1; \\ f_2(u_1) &= u_2, & f_2(u_2) &= 0; & f_4(u_1) &= 0, & f_4(u_2) &= u_2. \end{aligned}$$

Demostrar que f_i , $i = 1, 2, 3, 4$, es una base del espacio vectorial $\text{End.}(V)$ y construir la tabla de multiplicar correspondiente a la base.

D) $GL(V)$.—Se llama *automorfismo* de un espacio vectorial sobre sí mismo a un endomorfismo que sea isomorfismo. Al conjunto de todos los automorfismos de un espacio vectorial se le llama *grupo lineal general* del espacio vectorial y se representa por $GL(V)$.

63. $GL(V)$ es un grupo multiplicativo.

DEMOSTRACIÓN.—a) *El producto de dos automorfismos es otro automorfismo.* Se ha visto (60) que el producto de endomorfismos es otro endomorfismo. Sean f y g automorfismos de V . gf es inyectivo. En efecto,

$$gf(x) = gf(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

gf es epimorfismo. En efecto, dado x existe y tal que $f(y) = x$ y existe z tal que $g(z) = y$.

b) Si f es un automorfismo y f^{-1} es la correspondencia inversa, se verifica que f^{-1} es una aplicación y

$$\begin{aligned} f^{-1}(x + y) &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \Leftrightarrow f[f^{-1}(x + y)] = f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)] \\ &\Leftrightarrow x + y = f f^{-1}(x) + f f^{-1}(y) = x + y. \\ f^{-1}(ax) &= a f^{-1}(x) \Leftrightarrow f[f^{-1}(ax)] = f(a f^{-1}(x)) \\ &\Leftrightarrow ax = a f f^{-1}(x) = ax. \end{aligned}$$

c) f^{-1} es inyectivo y suprayectivo.

d) $f f^{-1} = f^{-1} f = 1_v$.

9. Espacio dual de un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 34.—Se llama *espacio dual* de un espacio vectorial V al espacio vectorial de los homomorfismos de V en un espacio V_1 de dimensión uno. Al espacio dual de V lo designaremos por V^* . Por consiguiente,

$$V^* = \text{Hom}(V, V_1).$$

A los vectores de V^* los representaremos por letras negritas con asterisco.

64. Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V y $\{u\}$ una base de V_1 , se verifica que los vectores:

$$(79) \quad u_i^*(u_1) = 0, \dots, u_i^*(u_i) = u, \dots, u_i^*(u_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

son una base de V^* , llamada *base dual* de la base B de V . El espacio dual de un espacio vectorial tiene la misma dimensión que él.

DEMOSTRACIÓN.—Este teorema es un caso particular de **59**.

A la imagen del vector x mediante el homomorfismo x^* de V^* la representamos por $x^* x$, en lugar de $x^*(x)$.

Entre los vectores de V y los de V^* se puede definir una relación, llamada *ortogonalidad*, del siguiente modo: el vector x^* de V^* se llama *ortogonal* al vector x de V cuando:

$$(80) \quad x^* x = 0.$$

Por consiguiente: x^* ortogonal a $x \iff x \in \ker(x^*)$. Como el núcleo de un homomorfismo es una variedad lineal, resulta que: *El conjunto de todos los vectores de V^* ortogonales a un vector dado x es una variedad lineal*, que representamos por $\omega(x)$.

Recordando que los vectores de V^* son homomorfismos de V en V_1 , así como las operaciones con homomorfismos, resultan las siguientes relaciones:

$$(81) \quad \begin{cases} \text{I. } x^*(x+y) = x^* x + x^* y, & \text{II. } x^*(ax) = a(x^* x) \\ \text{III. } (x^* + y^*) x = x^* x + y^* x. & \text{IV. } (ax^*) x = a(x^* x). \end{cases}$$

65. Si E es un conjunto de vectores de V y $L(E)$ la variedad lineal engendrada por E , se verifica que

$$(82) \quad \omega(E) = \omega(L(E)), \quad \omega(E) = \{x^* \mid x^* x = 0, \forall x \in E\}$$

es una variedad lineal de V^* .

DEMOSTRACIÓN.—a) Es evidente que $\omega(L(E)) \subset \omega(E)$. Sea $\mathbf{x}^* \in \omega(E)$ y sea $\mathbf{x}$ un vector arbitrario de $L(E)$, será:

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_s \mathbf{x}_s; \quad \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s \in E,$$

luego

$$\mathbf{x}^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* (a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_s \mathbf{x}_s) = a_1 (\mathbf{x}^* \mathbf{x}_1) + \dots + a_s (\mathbf{x}^* \mathbf{x}_s) = 0.$$

b) $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \omega(E) \implies \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 0, \mathbf{y}^* \mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x}^* \mathbf{x} - \mathbf{y}^* \mathbf{x} = 0 \implies (\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*) \mathbf{x} = 0$, para todo $\mathbf{x} \in E$, luego $\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^* \in \omega(E)$.

c) $\mathbf{x}^* \in \omega(E) \implies \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 0 \implies a(\mathbf{x}^* \mathbf{x}) = 0 \implies (a \mathbf{x}^*) \mathbf{x} = 0$, $\forall a \in K$ y $\forall \mathbf{x} \in E \implies a \mathbf{x}^* \in \omega(E)$.

El vector $\mathbf{x}$ de V se llama *ortogonal* al vector $\mathbf{x}^*$ de V^* cuando $\mathbf{x}^* \mathbf{x} = 0$. Si E^* es un conjunto de vectores de V^* y $L(E^*)$ es la variedad lineal engendrada por E^* , y si $\omega(E^*)$ y $\omega(L(E^*))$ representan los conjuntos de todos los vectores de V ortogonales a todos los vectores de E^* y de $L(E^*)$, respectivamente, se verifica que

$$(83) \quad \omega(E^*) = \omega(L(E^*))$$

es una variedad lineal de V . La demostración es totalmente análoga a la anterior.

La variedad $\omega(L)$ formada por todos los vectores de V^* ortogonales a todos los vectores la variedad lineal L , se llama *variedad ortogonal* a la variedad L . Análogamente, $\omega(L^*)$ es la variedad de V ortogonal a la variedad L^* de V^* .

EJERCICIOS:

322. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*\}$ la base dual de V^* . Hallar $\omega\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, siendo $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$.

323. Comprobar, con los datos del ejercicio anterior, que $\omega\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} = \omega(L\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\})$.

324. Con los datos del ejercicio 322, probar que $\mathbf{x} \in L\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \iff (-2\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^* - 3\mathbf{u}_3^*) \mathbf{x} = 0$.

325. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{u}_4^*\}$ la base dual, calcular $\omega(L)$, siendo L la variedad lineal:

$$(84) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda - 2\mu \\ x_2 = 3\lambda + \mu \\ x_3 = 2\lambda + 5\mu \\ x_4 = -\lambda + \mu \end{cases}$$

obtener las ecuaciones explícitas de la variedad lineal $\omega(L)$ dada por sus ecuaciones implícitas basta resolver el sistema (87). Más adelante nos ocuparemos de este problema.

68. Si L es una variedad lineal arbitraria de V , se verifica $L \subset \omega(\omega(L))$. En efecto, $\mathbf{x} \in L \implies \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \forall \mathbf{x}^* \in \omega(L)$, luego $\mathbf{x} \in \omega(\omega(L))$. Se podría demostrar ahora que $L = \omega(\omega(L))$, pero dejamos esta demostración para otro lugar.

10. Producto tensorial de vectores. Tensores.—Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales con el mismo cuerpo base K . Sea $V_1 \times V_2$ el conjunto producto de los conjuntos V_1 y V_2 . A los vectores de V_1 los representaremos por la letra $\mathbf{x}$ y a los de V_2 por la letra $\mathbf{y}$. Representamos por $\mathbf{V}$ el conjunto de todas las expresiones de la siguiente forma:

$$(88) \quad a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n), \quad a_i \in K, (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in V_1 \times V_2, i = 1, \dots, n.$$

En $\mathbf{V}$ se define una adición del siguiente modo:

$$(89) \quad \begin{aligned} & [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)] + [b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_m(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m)] \\ &= [b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_m(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m)] + [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)] \\ &= a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_m(\mathbf{x}'_m, \mathbf{y}'_m). \end{aligned}$$

Además, se verifica que

$$(90) \quad \begin{aligned} & [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)] + [0(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + 0(\mathbf{x}'_p, \mathbf{y}'_p)] \\ &= [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)]. \end{aligned}$$

Se define también una multiplicación por números de K del siguiente modo

$$(91) \quad k[a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)] = (k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_n)(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$$

verificándose:

$$(92) \quad (a + b)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$(93) \quad 1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

69. El conjunto $\mathbf{V}$ con las operaciones de adición y multiplicación por números definidas por (89), (90), (91), (92) y (93) es un espacio vectorial sobre K .

DEMOSTRACIÓN.—a) *Asociatividad.*

$$\begin{aligned}
 & [[a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + [b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)]] \\
 & \quad + [c_1(\mathbf{x}''_1, \mathbf{y}''_1) + \dots + c_p(\mathbf{x}''_p, \mathbf{y}''_p)] \\
 \stackrel{(89)}{=} & [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)] \\
 & \quad + [c_1(\mathbf{x}''_1, \mathbf{y}''_1) + \dots + c_p(\mathbf{x}''_p, \mathbf{y}''_p)] \\
 \stackrel{(89)}{=} & a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n) \\
 & \quad + c_1(\mathbf{x}''_1, \mathbf{y}''_1) + \dots + c_p(\mathbf{x}''_p, \mathbf{y}''_p) \\
 \stackrel{(89)}{=} & [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + [b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)] \\
 & \quad + [c_1(\mathbf{x}''_1, \mathbf{y}''_1) + \dots + c_p(\mathbf{x}''_p, \mathbf{y}''_p)] \\
 \stackrel{(89)}{=} & [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + [[b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)] \\
 & \quad + [c_1(\mathbf{x}''_1, \mathbf{y}''_1) + \dots + c_p(\mathbf{x}''_p, \mathbf{y}''_p)]]].
 \end{aligned}$$

b) *Conmutatividad.* Está postulada en (89).

c) *Elemento neutro.* Está postulado en (90).

d) $k [(a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)) + (b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n))]$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{(89)}{=} & k [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)]. \\
 \stackrel{(91)}{=} & (k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + (k b_1)(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + (k b_n)(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n). \\
 \stackrel{(89)}{=} & [(k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + [(k b_1)(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)]. \\
 \stackrel{(91)}{=} & k [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + k [b_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1) + \dots + b_n(\mathbf{x}'_n, \mathbf{y}'_n)].
 \end{aligned}$$

e) $(k + h) [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] \stackrel{(91)}{=} [(k + h) a_1](\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots$
 $+ [(k + h) a_m](\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = (k a_1 + h a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_m + h a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{(92)}{=} & [(k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (h a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)] + \dots + [(k a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + (h a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]. \\
 \stackrel{(a)}{=} & (k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (h a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + (h a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m). \\
 \stackrel{(a)(b)}{=} & [(k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + [(h a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (h a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]. \\
 \stackrel{(91)}{=} & k [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + h [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)].
 \end{aligned}$$

f) $(h k) [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{(91)}{=} & [(h k) a_1](\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + [(h k) a_m](\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = [h (k a_1)](\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots \\
 & + [h (k a_m)](\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m). \stackrel{(91)}{=} h [(k a_1)(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (k a_m)(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]. \\
 \stackrel{(91)}{=} & h [k [a_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]].
 \end{aligned}$$

$$g') \quad 1 [a_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]$$

$$\overline{(91)} \quad (1 \cdot a_1) (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (1 \cdot a_m) (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = a_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m).$$

h) *Elemento opuesto.* Dado el elemento de $\mathbf{V}$:

$$a_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m).$$

se verifica que:

$$\begin{aligned} & [a_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)] + [(-a_1) (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (-a_m) (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]. \\ \overline{(89)} \quad & a_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + a_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + (-a_1) (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + (-a_m) (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m). \\ \overline{(a) (b)} \quad & [a_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (-a_1) (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)] + \dots + [a_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) + (-a_m) (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)]. \\ \overline{(e)} \quad & [a_1 + (-a_1)] (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + [a_m + (-a_m)] (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m) = 0 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \dots + 0 (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m). \end{aligned}$$

Sea H el conjunto de todos los elementos del espacio vectorial $\mathbf{V}$ de las siguientes formas:

$$(94) \quad (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).$$

$$(95) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2).$$

$$(96) \quad (a \mathbf{x}, \mathbf{y}) = a (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, a \mathbf{y}) = a (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

y sea $L = L(H)$ la variedad lineal de $\mathbf{V}$ engendrada por H .

DEFINICIÓN 35.—Se llama *producto tensorial* del espacio vectorial V_1 por el espacio vectorial V_2 , y se representa por $V_1 \otimes V_2$, al espacio vectorial cociente de $\mathbf{V}$ módulo L :

$$V_1 \otimes V_2 = \mathbf{V}/L.$$

A la clase $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + L$ se le representa por $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, y se llama *producto tensorial* del vector $\mathbf{x}$ de V_1 por el vector $\mathbf{y}$ de V_2 .

EJERCICIOS:

327. Demostrar: a) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}$. b) $\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_1 + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_2$. c) $(a \mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} = a (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes (a \mathbf{y})$. d) $0 \otimes \mathbf{y} = 0$, siendo el 0 del último miembro el vector cero de $V_1 \otimes V_2$.

328. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de V , hallar un sistema de generadores de $V \otimes V$ formado por cuatro vectores.

329. Si V es el espacio vectorial del ejercicio anterior, y si $a_{11}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + a_{12}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + a_{21}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) + a_{22}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2)$ es un tensor de $V \otimes V$, cuyas coordenadas respecto de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de V son a_{ij} , calcular las coordenadas de este tensor respecto de la base $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, siendo $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$.

DEFINICIÓN 36.—Una aplicación f de $V_1 \times V_2$ en K se llama *bilineal* cuando se verifican las siguientes condiciones:

$$(97) \quad f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y).$$

$$(98) \quad f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2).$$

$$(99) \quad f(ax, y) = f(x, ay) = a f(x, y).$$

EJERCICIO:

330. Comprobar que la aplicación $f(x, y) = 3x_1y_1 + 5x_1y_2 - 7x_2y_1 + 4x_2y_2$ es bilineal.

70. Existe una correspondencia biunívoca entre las aplicaciones bilineales de $V_1 \times V_2$ en K y los homomorfismos de $V_1 \otimes V_2$ en K .

DEMOSTRACIÓN.—Sea n el homomorfismo natural:

$$V \xrightarrow{n} V/L(H) = V_1 \otimes V_2$$

y sea N la restricción de n al subconjunto $V_1 \times V_2$ de V .

N es una aplicación bilineal de $V_1 \times V_2$ en $V_1 \otimes V_2$. Por ser N la restricción de una aplicación, es una aplicación. Además, por ser N restricción del homomorfismo n , siendo $L(H)$ el subespacio engendrado por las expresiones (94), (95) y (96), resulta:

$$(100) \quad \begin{aligned} N(x_1 + x_2, y) &= (x_1 + x_2, y) + L \underset{(94)}{=} [(x_1, y) + L] + [(x_2, y) + L] \\ &= N(x_1, y) + N(x_2, y). \end{aligned}$$

$$(101) \quad \begin{aligned} N(x, y_1 + y_2) &= (x, y_1 + y_2) + L \underset{(95)}{=} [(x, y_1) + L] + [(x, y_2) + L] \\ &= N(x, y_1) + N(x, y_2). \end{aligned}$$

$$(102) \quad \begin{aligned} N(ax, y) &= (ax, y) + L \underset{(96)}{=} a(x, y) + L = a[(x, y) + L] \\ &= aN(x, y) = N(x, ay) \end{aligned}$$

a) Sea g un homomorfismo arbitrario de $V_1 \otimes V_2$ en K :

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow N & \nearrow g & \\ V_1 \otimes V_2 & & \end{array}$$

Sea $f = g N$. Se verifica que f es una aplicación bilineal de $V_1 \times V_2$ en K . En efecto, recordando que acabamos de probar que N es una aplicación bilineal, resulta:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= g N(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \stackrel{(100)}{=} g[N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + N(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})] \\ &= g(N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y})) + g(N(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})) = g N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + g N(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) &= g N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \stackrel{(101)}{=} g[N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)] \\ &= g[N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)] + g[N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)] = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2). \end{aligned}$$

$$f(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g N(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{(102)}{=} g[a N(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = a g[N(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = a f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Por consiguiente, a cada homomorfismo g le corresponde una única aplicación bilineal f tal que $f = g N$.

b) Sea f una aplicación bilineal arbitraria y vamos a ver que existe un único homomorfismo g de $V_1 \otimes V_2$ en K tal que $f = g N$.

En efecto, si existe g será:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(N(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = g(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$$

luego definiremos una correspondencia g de $V_1 \otimes V_2$ en K del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 1) \quad g(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \\ 2) \quad g \sum a_i (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i) &= \sum a_i g(\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i). \end{aligned}$$

Veamos que g es un homomorfismo. 1) g es una aplicación. Sea

$$\sum a_i (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i) = \sum b_i (\mathbf{x}'_i \otimes \mathbf{y}'_i),$$

esto es equivalente a que

$$\sum a_i (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) - \sum b_i (\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i) \in L(H),$$

esto es:

$$\begin{aligned} \sum a_i (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) - \sum b_i (\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i) &= \sum c [(x''_1 + x''_2, y'') - (x''_1, y'') - (x''_2, y'')] \\ &+ \sum d [(x^*, y^*_1 + y^*_2) - (x^*, y^*_1) - (x^*, y^*_2)] + \sum e [(a x^{**}, y^{**}) - a (x^{**}, y^{**})], \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que f es una aplicación bilineal:

$$\begin{aligned} g[\sum a_i (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i) - \sum b_i (\mathbf{x}'_i \otimes \mathbf{y}'_i)] &= \sum c [f(x''_1 + x''_2, y'') - f(x''_1, y'') - f(x''_2, y'')] \\ &+ \sum d [f(x^*, y^*_1 + y^*_2) - f(x^*, y^*_1) - f(x^*, y^*_2)] + \sum e [f(a x^{**}, y^{**}) - a f(x^{**}, y^{**})] = 0. \end{aligned}$$

2) g es homomorfismo. Es consecuencia inmediata de la definición 1) y 2) de g .

3) g es único, puesto que si existiese otro h se tendría que verificar la condición 1), esto es, $h(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y como $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ forman un sistema de generadores de $V_1 \otimes V_2$, al coincidir g y h en un sistema de generadores coinciden en todo $V_1 \otimes V_2$.

71. Sea $(V_1 \otimes V_2)^*$ el espacio vectorial dual del espacio $V_1 \otimes V_2$. Se verifica que

$$(103) \quad \dim(V_1 \otimes V_2)^* \geq \dim(V_1) \cdot \dim(V_2).$$

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de 70, para definir un homomorfismo de $V_1 \otimes V_2$ en K basta definir una aplicación bilineal de $V_1 \times V_2$ en K . Consideremos las aplicaciones bilineales:

$$(104) \quad f_{ij}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} \begin{cases} \delta_{ik} = 1, i = k; \delta_{ik} = 0, i \neq k \\ \delta_{jl} = 1, j = l; \delta_{jl} = 0, j \neq l, \end{cases}$$

siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V_1 y $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ una base de V_2 . Sea g_{ij} el homomorfismo de $V_1 \otimes V_2$ en K correspondiente a f_{ij} , esto es, tal que $f_{ij} = g_{ij} N$. Los homomorfismos g_{ij} son linealmente independientes, pues si existiese una relación de la forma:

$$(105) \quad \sum a_{ij} g_{ij} = 0,$$

siendo el cero del segundo miembro (105) el homomorfismo cero, sería:

$$(106) \quad (\sum a_{ij} g_{ij}) N = \sum a_{ij} (g_{ij} N) = \sum a_{ij} f_{ij} = 0,$$

en donde el cero del último miembro sería la aplicación bilineal que transforma todo par $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en el número cero. Aplicando (106) al par $(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_l)$, se obtiene:

$$\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_l) = a_{kl} = 0,$$

y como esto es cierto para cualquier k y cualquier l , $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$, queda probado que los g_{ij} son linealmente independientes. Como su número es igual a $n \times m = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$, queda probado (103).

72.

$$(107) \quad \dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1 \otimes V_2)^* = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sean $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B' = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de V_1 y V_2 , respectivamente. Recordando que el conjunto $\{x \otimes y\}_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}}$ es un sistema de generadores de $V_1 \otimes V_2$, cualquier subconjunto B^* tal que todo vector de $\{x \otimes y\}_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}}$ dependa linealmente de los vectores de B^* será también un sistema de generadores de $V_1 \otimes V_2$. Ahora bien, si

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n, \quad y = y_1 v_1 + \dots + y_m v_m,$$

se verifica que

$$(108) \quad x \otimes y = x_1 y_1 (u_1 \otimes v_1) + \dots + x_n y_m (u_n \otimes v_m)$$

(108) prueba que $B^* = \{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_n \otimes v_m\}$ es un sistema de generadores de $V_1 \otimes V_2$, y como el número de elementos de B^* es nm , resulta que

$$\dim(V_1 \otimes V_2) \leq \dim(V_1) \cdot \dim(V_2),$$

pero como $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1 \otimes V_2)^*$, resulta, teniendo en cuenta (103), que

$$\dim(V_1 \otimes V_2) \geq \dim(V_1) \cdot \dim(V_2),$$

luego queda probado (107).

De 72 se deduce como corolario inmediato:

73. Si $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ son bases de V_1 y V_2 , respectivamente, resulta que

$$(109) \quad B^* = \{u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes v_m, \dots, u_n \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_m\}.$$

es una base de $V_1 \otimes V_2$, llamada *producto tensorial de las bases B_1 y B_2* .

De 73 se deduce que un elemento arbitrario de $V_1 \otimes V_2$ se podrá expresar, de modo único, mediante la base (109) en la forma:

$$(110) \quad a_{11}(u_1 \otimes v_1) + \dots + a_{1m}(u_1 \otimes v_m) + \dots + a_{n1}(u_n \otimes v_1) + \dots + a_{nm}(u_n \otimes v_m)$$

por lo que a los números a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, se les llama *coordenadas* del elemento considerado.

Sean $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $B'_1 = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ dos bases de V_1 y $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ y $B'_2 = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ dos bases de V_2 . Sea B^* la base producto tensorial de B_1 y B_2 y B'^* la base producto tensorial de B'_1 y B'_2 . Sean x_{ij} las coordenadas de un elemento de $V_1 \otimes V_2$ respecto de B^* y y_{ij} las coordenadas del mismo elemento respecto de B'^* . Se desea hallar las relaciones existentes entre las x_{ij} y las y_{ij} .

Sean

$$(111) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_i = a_{i1} \mathbf{u}'_1 + \dots + a_{in} \mathbf{u}'_n, & i = 1, \dots, n \\ \mathbf{v}_j = b_{j1} \mathbf{v}'_1 + \dots + b_{jm} \mathbf{v}'_m, & j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

las relaciones entre las dos bases. De

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} y_{ij} (\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j) &= \sum_{l,k} x_{lk} (\mathbf{u}_l \otimes \mathbf{v}_k) = \sum_{l,k} x_{lk} \left(\left(\sum_i a_{li} \mathbf{u}'_i \right) \otimes \left(\sum_j b_{kj} \mathbf{v}'_j \right) \right) \\ &= \sum_{l,k} \sum_i \sum_j x_{lk} a_{li} b_{kj} (\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j) = \sum_{i,j} \left(\sum_{l,k} x_{lk} a_{li} b_{kj} \right) (\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{v}'_j), \end{aligned}$$

resulta que

$$(112) \quad y_{ij} = \sum_{l,k=1}^{l=n, k=m} x_{lk} a_{li} b_{kj},$$

que son las *fórmulas de cambio de base*.

La definición 35 se extiende a cualquier número finito de espacios vectoriales. Si $V_1, \dots, V_r$ son r espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K , se forma el producto conjuntista $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ de estos espacios y se considera el conjunto $\mathbf{V}$ de todas las formas lineales:

$$a_1 (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) + \dots + a_s (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_r), \quad a_i \in K, (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r), \dots \in V_1 \times \dots \times V_r.$$

El conjunto $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial respecto de las definiciones análogas a las (89), (90), (91), (92) y (93). Se llama H al subespacio vectorial engendrado por todas las formas lineales de uno de los siguientes tipos:

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i + \mathbf{x}'_i, \dots, \mathbf{x}_r) - (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_r) - (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \dots, \mathbf{x}_r) \\ (\mathbf{x}_1, \dots, a \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_r) - a (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_r), \end{cases}$$

DEFINICIÓN 37.—Al espacio $\mathbf{V}/H$ se le llama *producto tensorial* de los espacios $V_1, \dots, V_r$ y se representa por

$$\mathbf{V}/H = V_1 \otimes \dots \otimes V_r,$$

y se escribe

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r) + H = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r.$$

Como $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ es un espacio vectorial, se podrá multiplicar tensorialmente por el espacio vectorial $V_{r+1} \otimes \dots \otimes V_s$. El producto tensorial de estos dos espacios se representa por

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_r) \otimes (V_{r+1} \otimes \dots \otimes V_s).$$

Ahora bien, se puede, por otra parte, efectuar el producto tensorial de los espacios $V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_s$, y se obtiene el espacio:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes V_{r+1} \otimes \dots \otimes V_s.$$

Se verifica que estos dos espacios son isomorfos, por lo que pueden identificarse:

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_r) \otimes (V_{r+1} \otimes \dots \otimes V_s) = V_1 \otimes \dots \otimes V_r \otimes V_{r+1} \otimes \dots \otimes V_s,$$

esto implica que puede escribirse:

$$(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r) \otimes (\mathbf{x}_{r+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r \otimes \mathbf{x}_{r+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_s,$$

lo que puede considerarse como una ley asociativa.

DEFINICIÓN 38.—Dado un espacio vectorial V y su dual V^* , consideremos el espacio vectorial:

$$V^r_s = V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*,$$

a los elementos de V^r_s se les llama *tensores*, r se llama *orden de contravariancia* y s orden de *covariancia*. A las coordenadas de los tensores de V^r_s , las representaremos por

$$x_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$$

de modo que, si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}^*_1, \dots, \mathbf{u}^*_n\}$ es la base dual de V^* , un tensor de orden de contravariancia r y de orden de covariancia s , vendrá dado por una expresión de la forma:

$$(113) \quad \sum x_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} (\mathbf{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{i_r} \otimes \mathbf{u}^*_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}^*_{j_s}),$$

en donde la suma está extendida a todas las combinaciones de orden n r -arias y s -arias.

74. CAMBIO DE BASE.—Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases de V y $B^* = \{\mathbf{u}^*_1, \dots, \mathbf{u}^*_n\}$, $B'^* = \{\mathbf{v}^*_1, \dots, \mathbf{v}^*_n\}$ sean sus respectivas bases duales. Empleando la notación de Einstein, suprimiremos en lo que sigue el signo de sumar, por lo que, si llamamos $y^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}$ a las coordenadas de un tensor respecto de B' y B'^* , y $x^{k_1, \dots, k_r}_{l_1, \dots, l_s}$ a sus coordenadas respecto de B y B^* , y si las relaciones entre las bases son:

$$(114) \quad \mathbf{u}_k = a^i_k \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{u}^*_l = b^j_l \mathbf{v}^*_j,$$

se verificará:

$$\begin{aligned} y^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} (\mathbf{v}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{i_r} \otimes \mathbf{v}^*_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^*_{j_s}) \\ = x^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} (\mathbf{u}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{k_r} \otimes \mathbf{u}^*_{l_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}^*_{l_s}) \\ = x^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} \left[\left(a^{i_1}_{k_1} \mathbf{v}_{i_1} \right) \otimes \dots \otimes \left(a^{i_r}_{k_r} \mathbf{v}_{i_r} \right) \otimes \left(b^{j_1}_{l_1} \mathbf{v}^*_{j_1} \right) \otimes \dots \otimes \left(b^{j_s}_{l_s} \mathbf{v}^*_{j_s} \right) \right] \\ = x^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_r}_{k_r} b^{j_1}_{l_1} \dots b^{j_s}_{l_s} (\mathbf{v}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{i_r} \otimes \mathbf{v}^*_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^*_{j_s}), \end{aligned}$$

de donde, por ser

$$\mathbf{v}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{i_r} \otimes \mathbf{v}^*_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^*_{j_s}$$

una base, se verificará:

$$(115) \quad y^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = x^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_r}_{k_r} b^{j_1}_{l_1} \dots b^{j_s}_{l_s},$$

que son las *fórmulas del cambio de base*.

Obsérvese que la relación entre las a^i_k y la b^l_j viene dada por:

$$\mathbf{u}^*_l \mathbf{u}_k = (b^j_l \mathbf{v}^*_j) (a^i_k \mathbf{v}_i) = b^j_l a^i_k (\mathbf{v}^*_j \mathbf{v}_i) = b^j_l a^i_k \delta^i_j,$$

esto es:

$$(116) \quad b^l_i a^i_k = \delta^l_k: \begin{cases} \delta^l_k = 0, & l \neq k. \\ \delta^l_k = 1, & l = k. \end{cases}$$

EJERCICIOS:

331. Sea δ^{ij} el tensor contravariante de segundo orden de Kronecker. $\delta^{ij} = 1$ cuando $i = j$ y $\delta^{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Si se efectúa el cambio de base:

$$\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, \quad a_1^1 = 2, \quad a_1^2 = -4, \quad a_2^1 = 1, \quad a_2^2 = 3$$

calcular las nuevas coordenadas de δ^{ij} .

332. Sea δ^i_j el tensor mixto de segundo orden de Kronecker, calcular sus coordenadas respecto de la nueva base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dada en el ejercicio anterior.

333. Hallar las coordenadas del tensor covariante de segundo orden de Kronecker, δ_{ij} , respecto de la nueva base dada por las fórmulas del ejercicio 331.

334. Hallar las coordenadas del tensor t_k^{ij} respecto de la nueva base del ejercicio 331, siendo

$$t_k^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \text{ ó } j = k \\ 0, & \text{si } i \neq k, \text{ y } j \neq k. \end{cases}$$

11. Producto exterior de vectores. Multivectores. Determinantes.—

Sea V un espacio vectorial sobre K , de dimensión n . Sea

$$V^r = V \times \dots \times V \quad y \quad V^{\otimes r} = V \otimes \dots \otimes V.$$

Si σ es una permutación de los números $(1, 2, \dots, r)$, representamos por $\sigma(i)$ la imagen de i en la biyección que hace pasar de la permutación $(1, 2, \dots, r)$ a la permutación σ , es decir:

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(r)).$$

Representamos también por la misma letra σ a la aplicación de V^r en V^r definida del siguiente modo:

$$(117) \quad \sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) = (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(r)}).$$

EJERCICIO:

335. Si $\sigma = (3142)$ escribir $\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$.

Sea N la restricción a V^r del homomorfismo natural de V sobre $V^{\otimes r}$.

75. La aplicación $N\sigma$ es una aplicación multilineal (esto es, lineal respecto de cada una de las variables) de V^r en $V^{\otimes r}$.

En efecto,

$$\begin{aligned} N\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i + \mathbf{x}'_i, \dots, \mathbf{x}_r) &= N(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(i)} + \mathbf{x}'_{\sigma(i)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(r)}) \\ &= \mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes (\mathbf{x}_{\sigma(i)} + \mathbf{x}'_{\sigma(i)}) \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)} \\ &= \mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(i)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)} + \mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}'_{\sigma(i)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)} \\ &= N\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_r) + N\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \dots, \mathbf{x}_r). \\ N\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \lambda \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_r) &= N(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \lambda \mathbf{x}_{\sigma(i)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(r)}) \\ &= \mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes (\lambda \mathbf{x}_{\sigma(i)}) \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)} = \lambda [\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(i)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)}] \\ &= \lambda [N\sigma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)] \end{aligned}$$

76. Si σ tiene el significado (117), y N es la restricción del homomorfismo natural, se verifica que existe un homomorfismo, que representaremos también por σ , de $V^{\otimes r}$ en $V^{\otimes r}$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V^r & \xrightarrow{\sigma} & V^r \\ N \downarrow & & \downarrow N \\ V^{\otimes r} & \xrightarrow{\sigma} & V^{\otimes r} \end{array}$$

En efecto, basta definir:

$$(118) \quad \sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(r)}.$$

DEFINICIÓN 39.—Un tensor contravariante x de $V^{\otimes r}$ se llama *hemisimétrico*, *antisimétrico* o *alternado* cuando se verifica que

$$\sigma(x) = i(\sigma) \cdot x,$$

siendo $i(\sigma) = (-1)^\epsilon$, y ϵ el número de inversiones de la permutación σ . Un homomorfismo f de $V^{\otimes r}$ en otro espacio vectorial W sobre K , se llama *alternado* cuando

$$f \sigma = i(\sigma) f.$$

EJERCICIOS:

336. Averiguar si son alternados los siguientes tensores:

- a) $5(u_1 \otimes u_2) - 5(u_2 \otimes u_1)$. b) $2(u_1 \otimes u_2) + 4(u_1 \otimes u_3) - 2(u_2 \otimes u_1) - 4(u_3 \otimes u_1)$.
c) $(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) + (u_2 \otimes u_3 \otimes u_1) + (u_3 \otimes u_1 \otimes u_2) - (u_2 \otimes u_1 \otimes u_3) - (u_1 \otimes u_3 \otimes u_2) - (u_3 \otimes u_2 \otimes u_1)$.

337. Añadir términos al tensor $(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)$ para que resulte un tensor hemisimétrico.

338. Añadir términos al tensor $u_1 \otimes u_1 \otimes u_2$, perteneciente a $V^{\otimes 3}$ siendo $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V , para que resulte un tensor alternado.

339. En las mismas hipótesis del ejercicio anterior, completar el tensor $u_1 \otimes u_2 \otimes u_3$ a un tensor alternado.

340. Idem para el tensor $u_1 \otimes u_1 \otimes u_1$.

DEFINICIÓN 40.—Se llama *alternación* o *antisimetrización* a la aplicación

$$V^{\otimes r} \xrightarrow{A} V^{\otimes r}$$

tal que

$$A(\mathbf{x}) = i(\sigma_1) \sigma_1(\mathbf{x}) + i(\sigma_2) \sigma_2(\mathbf{x}) + \dots + i(\sigma_{r!}) \sigma_{r!}(\mathbf{x}),$$

en donde $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{r!}$ son todas las permutaciones de $(1, 2, \dots, r)$.

77. La aplicación A es un endomorfismo y se verifica que $A(\mathbf{x})$ es hemisimétrico para cualquier $\mathbf{x}$.

DEMOSTRACIÓN.—Según (118) se verifica que σ_i , $i = 1, \dots, r!$ son endomorfismos y A es una combinación lineal de endomorfismos, luego es también un endomorfismo. Las permutaciones σ_i y σ_j se llaman de la misma clase cuando $i(\sigma_i) = i(\sigma_j)$, esto es cuando los números de inversiones de σ_i y de σ_j son de la misma paridad. Como el producto de dos permutaciones de la misma paridad es una permutación par y el producto de dos permutaciones de distinta paridad es una permutación impar, resulta que

$$i(\sigma_i \sigma_j) = i(\sigma_i) + i(\sigma_j);$$

en particular,

$$i(\sigma_i \cdot \sigma_i) = [i(\sigma_i)]^2 = 1.$$

Por consiguiente, si σ es una permutación arbitraria, se verifica que

$$\begin{aligned} \sigma[A(\mathbf{x})] &= i(\sigma_1) [\sigma \sigma_1(\mathbf{x})] + i(\sigma_2) [\sigma \sigma_2(\mathbf{x})] + \dots + i(\sigma_{r!}) [\sigma \sigma_{r!}(\mathbf{x})] \\ &= i(\sigma) \{ i(\sigma \sigma_1) [\sigma \sigma_1(\mathbf{x})] + i(\sigma \sigma_2) [\sigma \sigma_2(\mathbf{x})] + \dots + i(\sigma \sigma_{r!}) [\sigma \sigma_{r!}(\mathbf{x})] \}, \end{aligned}$$

pero el conjunto $\{\sigma \sigma_i\}_{i=1, \dots, r!}$ es igual al conjunto $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, r!}$, luego:

$$\sigma[A(\mathbf{x})] = i(\sigma) A(\mathbf{x}),$$

que prueba que $A(\mathbf{x})$ es hemisimétrico.

78. $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \implies \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r \in \ker(A)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si representamos por (i, j) la transposición que cambia i en j y j en i , como el conjunto $\{(i, j) \sigma_k\}_{k=1, \dots, r!}$ es igual al conjunto $\{\sigma_k\}_{k=1, \dots, r!}$, resulta que a cada permutación de este último se le puede asociar otra que difiere de ella únicamente en la transposición (i, j) y será, por tanto, de distinta clase, luego para todo σ_j se verifica que

$$\sigma_j(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r) = (i, j) \sigma_j(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r)$$

luego los términos de

$$A(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r)$$

son dos a dos opuestos, luego

$$A(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r) = 0,$$

de donde

$$\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r \in \ker(A).$$

79. Si $\mathbf{x}$ es un tensor alternado de $V^{\otimes r}$, se verifica que

$$A(\mathbf{x}) = (r!) \mathbf{x}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{r!} i(\sigma_j) \sigma_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{r!} [i(\sigma_j)]^2 \mathbf{x} = (r!) \mathbf{x}.$$

DEFINICIÓN 41.—Al espacio $V^{\otimes r}/\ker(A)$ se le llama *espacio vectorial de los r -vectores de V* , y lo representamos por $V^{\wedge r}$. A las clases $\mathbf{x} + \ker(A)$, $\mathbf{x} \in V^{\otimes r}$, se les llama *r -vectores de V* . En particular, a $\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r + \ker(A)$ se le representa del siguiente modo:

$$\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r + \ker(A) = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r,$$

y se llama *producto exterior* de $\mathbf{x}_1$ por $\mathbf{x}_2$, ..., por $\mathbf{x}_r$.

EJERCICIOS:

341. Probar que todo multivector de $V^{\wedge 2}$, siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V , es combinación lineal de los bivectores: $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3$.

342. Probar que si σ es una permutación arbitraria de $(1, 2, 3)$, se verifica que

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 - i(\sigma)(\mathbf{x}_{\sigma(1)} \wedge \mathbf{x}_{\sigma(2)} \wedge \mathbf{x}_{\sigma(3)}) = 0.$$

343. Calcular $\dim V^{\wedge 2}$, siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V .

344. Calcular $\dim V^{\wedge 3}$, siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de V .

Los r -vectores de la forma $\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r$ los designaremos con el nombre de monomios.

80. PROPIEDADES DEL PRODUCTO EXTERIOR.

- I. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{y}$.
 II. $(a \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} = a (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mathbf{x} \wedge (a \mathbf{y})$.
 III. Un multivector monomio con un factor cero es cero.
 IV. Si σ es una permutación de los números $(1, 2, \dots, r)$, se verifica que

$$(119) \quad \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r = i(\sigma) [\mathbf{x}_{\sigma(1)} \wedge \mathbf{x}_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{\sigma(r)}].$$

- V. Un multivector monomio con dos factores iguales es cero.
 VI. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de V , $B^* = \{\mathbf{u}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{i_r}\}$, en donde $(i_1, \dots, i_r)$ recorre el conjunto C de todas las combinaciones r -arias de $(1, 2, \dots, n)$, es una base de $V^{\wedge r}$.

$$\text{VII. } r \leq \dim(V) \implies \dim(V^{\wedge r}) = \binom{n}{r}. \quad r > \dim(V) \implies V^{\wedge r} = \{\mathbf{0}\}.$$

DEMOSTRACIÓN.—I. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \wedge \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} + \ker(A) = [\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}] + \ker(A) = [\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y} + \ker(A)] + [\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y} + \ker(A)] = (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{y})$.

II. $(a \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} = (a \mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} + \ker(A) = a (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) + \ker(A) = a [(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) + \ker(A)] = a (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = a [\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \ker(A)] = a (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) + \ker(A) = \mathbf{x} \otimes (a \mathbf{y}) + \ker(A) = \mathbf{x} \wedge (a \mathbf{y})$.

III. $\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{0} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{0} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r + \ker(A) = \mathbf{0} + \ker(A) = \mathbf{0}$.

IV. La igualdad (119) equivale a las siguientes:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r - i(\sigma) [\mathbf{x}_{\sigma(1)} \wedge \mathbf{x}_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{\sigma(r)}] \\ &= \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r - i(\sigma) [\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)}] + \ker(A) \\ &\Leftrightarrow A [\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r - i(\sigma) (\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)})] = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r!} [i(\sigma_j) (\sigma_j(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r)) - i(\sigma_j) i(\sigma) (\sigma_j(\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{\sigma(r)}))] \\ &= \sum_{j=1}^{r!} i(\sigma_j) (\sigma_j(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r)) - \sum_{j=1}^{r!} i(\sigma_j \sigma) (\sigma_j \sigma(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_r)) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ya que el conjunto $\{i(\sigma_j) \sigma_j\}$ coincide con el conjunto de endomorfismos $\{i(\sigma_j \sigma) \sigma_j \sigma\}$.

V. Si en (119) es $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ y σ es la permutación que cambia i por j dejando los restantes índices invariables, será

$$\begin{aligned} i(\sigma) &= -1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{\sigma(i)} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{\sigma(j)} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{\sigma(r)} \\ &= \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_j \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_j \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r, \end{aligned}$$

con lo que (119) proporciona $2(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r) = \mathbf{0}$, de donde $\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r = \mathbf{0}$.

VI. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V y sea $\mathbf{x}$ un r -vector arbitrario, $r \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^p a_i (\mathbf{x}_{i1} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{ir}) = \sum_{i=1}^p a_i \left[(x_{i1}^1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_{i1}^n \mathbf{u}_n) \wedge \dots \wedge (x_{ir}^1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_{ir}^n \mathbf{u}_n) \right] \\ &= \sum_{i=1}^p a_i \sum x_{i1}^{j_1} \dots x_{ir}^{j_r} (\mathbf{u}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{j_r}), \end{aligned}$$

en donde la segunda suma está extendida a todas las variaciones r -arias con repetición de los números $\{1, \dots, n\}$. Teniendo presente II, resulta que todos los términos con dos $\mathbf{u}_{j_i}$ iguales son nulos; luego, si indicamos por $i(j_1, \dots, j_r)$ al índice de la permutación $(j_1, \dots, j_r)$ respecto de la permutación natural de los números que en ella figuran, será, en virtud de IV,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p a_i \sum_C \left(\sum_P i(j_1, \dots, j_r) x_{i1}^{j_1} \dots x_{ir}^{j_r} \right) (\mathbf{u}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{k_r}),$$

en donde $\sum_P$ está extendida a todas las permutaciones de $(k_1 < k_2 < \dots < k_r)$

y $\sum_C$ a todas las combinaciones r -arias de los números $(1, 2, \dots, n)$. Ahora

bien, el último miembro se puede escribir en la siguiente forma:

$$(120) \quad \mathbf{x} = \sum_C \left(\sum_{i=1}^p a_i \left(\sum_P i(j_1, \dots, j_r) x_{i1}^{j_1} \dots x_{ir}^{j_r} \right) \right) (\mathbf{u}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{k_r}),$$

que prueba que $\{\mathbf{u}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{k_r}\}_C$, en donde $(k_1, \dots, k_r)$ recorre el conjunto C de todas las combinaciones r -arias de los números $(1, \dots, n)$ es un sistema de generadores de $V^{\wedge r}$.

Los r -vectores $\{\mathbf{u}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{k_r}\}_C$ son linealmente independientes, ya que

$$\sum_C \lambda_{k_1, \dots, k_r} (\mathbf{u}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{k_r}) = \mathbf{0} \iff \sum_C \lambda_{k_1, \dots, k_r} (\mathbf{u}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{k_r}) \in \ker(A).$$

$$\iff A \left[\sum_C \lambda_{k_1, \dots, k_r} (\mathbf{u}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{k_r}) \right]$$

$$= \sum_C \lambda_{k_1, \dots, k_r} \sum_P i(\sigma) (\mathbf{u}_{\sigma(k_1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{\sigma(k_r)}) = \mathbf{0},$$

en donde P es el conjunto de todas las permutaciones σ de los números $\{k_1, \dots, k_r\}$. Ahora bien, como el conjunto de los tensores $\mathbf{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_{i_r}$ forman una base de $V^{\otimes r}$, de la igualdad anterior resulta que $\lambda_{k_1, \dots, k_r} = 0$ para toda combinación $(k_1, \dots, k_r)$ de C .

Por consiguiente, el conjunto $\{\mathbf{u}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{k_r}\}$ en donde $(k_1, \dots, k_r)$ recorre las combinaciones r -arias de $(1, 2, \dots, n)$, es una base de $V^{\wedge r}$.

VII. De VI se deduce que $\dim(V^{\wedge r}) = \binom{n}{r}$. Si $r > n$ en cada término de los r -vectores monomios, expresados mediante los vectores de la base existirán dos factores iguales, por lo menos, luego, por V , serán nulos.

EJERCICIOS:

345. Sean $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dos bases de V y sea $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. Si $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3$, $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{y} = y'_1\mathbf{v}_1 + y'_2\mathbf{v}_2 + y'_3\mathbf{v}_3$. Calcular la fórmula del cambio de base en $V^{\wedge 2}$.

81. Si V y W son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K , f un homomorfismo de $V^{\otimes r}$ en W y A el endomorfismo de alternación de $V^{\otimes r}$, se verifica que: f es un homomorfismo alternado $\iff f(\ker(A)) = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\implies$. Sea $\mathbf{x}$ un tensor arbitrario de $\ker(A)$ $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Por ser f alternado es $f\sigma = i(\sigma)f$, o bien, $f = i(\sigma)f\sigma$, luego:

$$\mathbf{0} = f[A(\mathbf{x})] = f \left[\sum_{\sigma} i(\sigma) \sigma(\mathbf{x}) \right] = \sum_{\sigma} i(\sigma) f\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma} f(\mathbf{x}) = r! f(\mathbf{x}),$$

de donde $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

b) $\impliedby$. Sea $\mathbf{x}$ un tensor arbitrario de $V^{\otimes r}$. De 80 IV se deduce que:

$$\mathbf{x} - i(\sigma) \sigma(\mathbf{x}) \in \ker(A),$$

de donde, por la hipótesis:

$$f(\mathbf{x}) - i(\sigma)f(\sigma(\mathbf{x})) = 0,$$

que prueba que f es alternado.

MULTIPLICACIÓN EXTERIOR DE MULTIVECTORES.—Consideremos los espacios:

$$V^{\otimes r} = V \otimes \dots \otimes V \quad y \quad V^{\otimes s} = V \otimes \dots \otimes V.$$

Sea n la aplicación bilineal natural correspondiente al producto tensorial de estos dos espacios vectoriales:

$$V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \xrightarrow{n} V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s}$$

sea i el isomorfismo (véase la definición 37):

$$V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s} \xrightarrow{i} V^{\otimes r+s}.$$

Representaremos por A_1 , A_2 y A los endomorfismos de alternación de $V^{\otimes r}$, $V^{\otimes s}$ y $V^{\otimes r+s}$, respectivamente, y por π_1 , π_2 , π , a los homomorfismos naturales:

$$V^{\otimes r} \xrightarrow{\pi_1} V^{\otimes r}/\ker(A_1) = V^{\wedge r}, \quad V^{\otimes s} \xrightarrow{\pi_2} V^{\otimes s}/\ker(A_2) = V^{\wedge s},$$

$$V^{\otimes r+s} \xrightarrow{\pi} V^{\otimes r+s}/\ker(A) = V^{\wedge r+s}.$$

Sea $\varphi = \pi \circ i \circ n$. Se verifica que φ es una aplicación bilineal:

$$V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \xrightarrow{\varphi} V^{\wedge r+s}.$$

Fijado un elemento $\mathbf{y}$ de $V^{\otimes s}$, se obtiene un homomorfismo alternado $\varphi_{\mathbf{y}}$ de $V^{\otimes r}$ en $V^{\wedge(r+s)}$ mediante la siguiente definición:

$$(121) \quad \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in V^{\otimes r}.$$

Análogamente, fijado un elemento $\mathbf{x}$ de $V^{\otimes r}$, se obtiene un homomorfismo alternado $\varphi_{\mathbf{x}}$ de $V^{\otimes s}$ en $V^{\wedge(r+s)}$, mediante la definición:

$$(122) \quad \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in V^{\otimes s}.$$

Sea $\pi_1 + \pi_2$ la aplicación:

$$V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \xrightarrow{\pi_1 + \pi_2} V^{\wedge r} \times V^{\wedge s}$$

definida por

$$(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\pi_1(\mathbf{x}), \pi_2(\mathbf{y})).$$

82. La correspondencia ψ :

$$V^{\wedge r} \times V^{\wedge s} \xrightarrow{\psi} V^{\wedge r+s},$$

definida del siguiente modo:

$$\psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}^* \in V^{\wedge r}, \mathbf{y}^* \in V^{\wedge s},$$

siendo

$$(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*),$$

es una aplicación bilineal.

DEMOSTRACIÓN.—a) ψ es una aplicación. Sea

$$\begin{aligned} (\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{x}', \mathbf{y}') &\Leftrightarrow \pi_1(\mathbf{x}) = \pi_1(\mathbf{x}'), \pi_2(\mathbf{y}) = \pi_2(\mathbf{y}') \\ \Leftrightarrow \pi_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, \pi_2(\mathbf{y} - \mathbf{y}') = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \ker(A_1), \mathbf{y} - \mathbf{y}' \in \ker(A_2), \end{aligned}$$

de donde, por el teorema 81, se deduce:

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0, \quad \varphi_{\mathbf{x}'}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') = 0,$$

o bien, por (121) y (122),

$$\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}') = 0,$$

y por ser φ bilineal:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}), \quad \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

luego

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

b) Siendo φ bilineal lo es ψ .

DEFINICIÓN 42.—Se llama *producto exterior* del r -vector $\mathbf{x}^*$ por el s -vector $\mathbf{y}^*$, y se representa por $\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^*$, a

$$\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^* = \psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*).$$

EJERCICIOS:

346*. Probar que φ es una aplicación bilineal.

347*. Probar que φ_y es una aplicación alternada.

83. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EXTERIOR.—I. Si $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, r + s$, son vectores de V , se verifica que

$$(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r) \wedge (\mathbf{x}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r+s}) = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r \wedge \mathbf{x}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r+s}.$$

II. Si $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{x}'^*$ son r -vectores e $\mathbf{y}^*$ un s -vector, se verifica que

$$(\mathbf{x}^* + \mathbf{x}'^*) \wedge \mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^* + \mathbf{x}'^* \wedge \mathbf{y}^*.$$

III. Si a es un número y $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ son multivectores, se verifica que

$$(a \mathbf{x}^*) \wedge \mathbf{y}^* = a (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^*) = \mathbf{x}^* \wedge (a \mathbf{y}^*).$$

IV. Si $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ y $\mathbf{z}^*$ son multivectores, se verifica que

$$(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{x}^*) \wedge \mathbf{z}^* = \mathbf{x}^* \wedge (\mathbf{y}^* \wedge \mathbf{z}^*).$$

V. Si $\mathbf{x}^*$ es un r -vector e $\mathbf{y}^*$ un s -vector, se verifica que

$$\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^* = (-1)^{rs} (\mathbf{y}^* \wedge \mathbf{x}^*).$$

VI. Los vectores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ son linealmente dependientes

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

VII. A toda variedad lineal r -dimensional L de un espacio vectorial V le corresponde una recta vectorial única de r -vectores.

DEMOSTRACIÓN.—I. Esta propiedad es la definición de producto exterior de multivectores en el caso particular de que ambos factores sean monomios.

II y III. Las propiedades II y III son consecuencia del teorema 82, que establece que la multiplicación exterior es una aplicación bilineal.

IV. Por ser la multiplicación exterior una aplicación bilineal, bastará probar la proposición en el caso en que $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ y $\mathbf{z}^*$ sean monomios. Sea

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r, \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_s, \quad \mathbf{z}^* = \mathbf{z}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_t,$$

se verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^* &= \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r \wedge \mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_s, \\ (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{y}^*) \wedge \mathbf{z}^* &= \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r \wedge \mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_s \wedge \mathbf{z}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_t, \\ \mathbf{y}^* \wedge \mathbf{z}^* &= \mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_s \wedge \mathbf{z}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_t, \\ \mathbf{x}^* \wedge (\mathbf{y}^* \wedge \mathbf{z}^*) &= \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r \wedge \mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_s \wedge \mathbf{z}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_t. \end{aligned}$$

V. Por la misma razón, bastará probarlo en el caso en que ambos multivectores sean monomios. Sea

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_r, \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{x}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r+s}$$

y sea

$$\sigma = (r+1, \dots, r+s, 1, 2, \dots, r).$$

Se verifica que

$$\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = i(\sigma)(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y});$$

pero $i(\sigma) = (-1)^{rs}$, ya que el 1 forma inversión con los s primeros números de σ , lo mismo sucede al 2, etc., hasta el r , y estas son las únicas inversiones, luego el número total de inversiones es rs .

VI $\Rightarrow$. De $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}$, no todas las λ_i nulas, se deduce que una, al menos, por ejemplo λ_r , es distinta de cero, luego

$$\mathbf{x}_r = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_{r-1} \mathbf{x}_{r-1}, \quad a_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_r}, \quad i = 1, \dots, r-1,$$

luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r-1} \wedge \mathbf{x}_r &= \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r-1} \wedge (a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_{r-1} \mathbf{x}_{r-1}) \\ &= a_1 (\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r-1} \wedge \mathbf{x}_1) + \dots + a_{r-1} (\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{r-1} \wedge \mathbf{x}_{r-1}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

por ser la multiplicación exterior de vectores una operación multilineal y en virtud de 81, V.

VII. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ una base de L y consideremos el r -vector: $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_r$. Si $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es otra base, se verificará:

$$\mathbf{v}_i = a_{i1} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{ir} \mathbf{u}_r, \quad i = 1, \dots, r,$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_r &= (a_{11} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{1r} \mathbf{u}_r) \wedge \dots \wedge (a_{r1} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{rr} \mathbf{u}_r) \\ &= \left[\sum_{\sigma} i(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(r)r} \right] \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_r, \end{aligned}$$

lo que prueba que los r -vectores $\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_r$, correspondientes a dos bases distintas de L son proporcionales, siendo el factor de proporcionalidad:

$$(123) \quad \sum_{\sigma} i(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(r)r},$$

EJERCICIOS:

348. Si $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de V , calcular las coordenadas de $x \wedge y$, $x \wedge y \wedge z$ siendo $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, $y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$, $z = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3$.

349. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de V ,

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{u}_i, \mathbf{b} = \sum b_i \mathbf{u}_i, \mathbf{c} = \sum c_i \mathbf{u}_i, \mathbf{d} = \sum d_i \mathbf{u}_i.$$

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$, calcular las coordenadas de $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ mediante las coordenadas de $\mathbf{x}$ y de $\mathbf{y}$.

350. Calcular la recta de multivectores correspondiente a la variedad lineal L de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda - \mu \\ x_2 = 3\lambda - 2\mu \\ x_3 = 2\lambda + 5\mu \\ x_4 = 4\lambda + 3\mu \end{array} \right.$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.—Sea

$$(124) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada de orden n , cuyos elementos pertenecen al cuerpo K . Consideremos un espacio vectorial n -dimensional fijo V y una base fija $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de V . Llamaremos *vectores asociados a la matriz A en V , respecto de la base B* a los vectores:

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{u}_n \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n = a_{n1}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{u}_n \end{array} \right.$$

DEFINICIÓN 43.—Se llama *determinante de la matriz A*, y se representa por $|A|$, a la coordenada del n -vector $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ respecto de la base $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$.

84. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.—I.

$$(126) \quad |A| = \sum_{\sigma} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

en donde σ recorre el conjunto de todas las permutaciones de los números $(1, 2, \dots, n)$.

II. El determinante no depende del espacio vectorial V ni de la base B en él elegida.

III. Se llama matriz transpuesta de una matriz A , y se representa por A' , a la matriz que se obtiene permutando sus filas por sus columnas. El determinante de la matriz transpuesta es igual al determinante de la matriz dada:

$$(127) \quad |A'| = |A|.$$

IV. Al permutar dos filas (columnas) de la matriz de un determinante se obtiene otra matriz cuyo determinante es el número opuesto al determinante de la matriz dada.

V. Si una matriz cuadrada tiene una fila (columna) de ceros, su determinante es nulo.

VI. Una matriz con dos filas (columnas) iguales tiene determinante nulo.

VII. Si se multiplica una fila (columna) de una matriz por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

VIII. Una matriz con dos filas (columnas) proporcionales tiene determinante nulo.

IX. El determinante de una matriz con una fila (columna) binomia es igual a la suma de dos determinantes cuyas matrices tienen las restantes filas (columnas) iguales a las de la matriz dada y la fila binomia viene sustituida en cada matriz por los primeros términos y, respectivamente, por los segundos de la línea binomia.

X. Se llama *menor complementario* de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A al determinante de la matriz que se obtiene al prescindir en la matriz A de los números que figuran en la fila y en la columna a que pertenece el elemento a_{ij} . Al menor complementario del elemento a_{ij} lo representaremos por α_{ij} . Se llama *adjunto* de un elemento a_{ij} de una matriz A , y se representa por A_{ij} al producto: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$. Se verifica que

$$(128) \quad |A| = a_{i_1} A_{i_1} + \dots + a_{i_n} A_{i_n} = a_{1i} A_{1i} + \dots + a_{ni} A_{ni}, \quad i = 1, \dots, n.$$

XI. Empleando las mismas notaciones que en la propiedad anterior, *se verifica que*

$$(129) \quad a_{i_1} A_{j_1} + \dots + a_{i_n} A_{j_n} = a_{1i} A_{1j} + \dots + a_{ni} A_{nj} = 0, \quad i \neq j.$$

XII. Se llama *menor de una matriz A* al determinante de cualquier submatriz cuadrada de la matriz A, entendiéndose por submatriz de una matriz la que resulta de suprimir en la matriz un determinado número de filas y de columnas. Al menor de la matriz A, que es el determinante de la submatriz cuyos elementos están en las filas $i_1, \dots, i_r$ y en las columnas $j_1, \dots, j_r$, lo representaremos por $|i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_r, j_r|$. Se llama *menor complementario* del menor $|i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|$ de una matriz cuadrada A, al determinante de la matriz que se obtiene al suprimir las filas $i_1, \dots, i_r$ y las columnas $j_1, \dots, j_r$ en la matriz A. Al menor complementario del menor $|i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|$ lo representaremos por $|i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|^*$. Se llama *adjunto de un menor* $|i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|$ de una matriz cuadrada A, y lo representaremos por $\text{Adj. } |i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|$ al siguiente número:

$$\text{Adj. } |i_1, j_1; \dots; i_r, j_r| = (-1)^{i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r} |i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|^*.$$

Se verifica que

$$|A| = \sum_{C_{n,r}} |i_1, j_1; \dots; i_r, j_r| \cdot \text{Adj. } |i_1, j_1; \dots; i_r, j_r|,$$

en donde la suma está extendida a todas las combinaciones r -arias $(j_1, \dots, j_r)$ de los números $(1, 2, \dots, n)$ o a las combinaciones r -arias $(i_1, \dots, i_r)$ de dichos números.

DEMOSTRACIÓN.—I. En efecto,

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \sum_{\sigma} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} (u_1 \wedge \dots \wedge u_n).$$

II. Sea V' otro espacio n -dimensional y $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ una base arbitraria de V' . Sea

$$a'_i = a_{i1} u'_1 + \dots + a_{in} u'_n,$$

se verifica que

$$a'_1 \wedge \dots \wedge a'_n = \sum_{\sigma} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} (u'_1 \wedge \dots \wedge u'_n).$$

III. Sea

$$\mathbf{b}_i = a_{1i} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{ni} \mathbf{u}_n,$$

se verifica que

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_n &= \sum_{\tau} i(\tau) a_{\tau(1)1} \dots a_{\tau(n)n} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) \\ &= \sum_{\tau} i(\tau) a_{\tau(1)1} \dots a_{\tau(n)n} (i(\tau)) (\mathbf{u}_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{\tau(n)}) \\ &= \sum_{\tau} i(\tau^{-1}) a_{1\tau^{-1}(1)} \dots a_{n\tau^{-1}(n)} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n), \end{aligned}$$

IV. En virtud de III, basta demostrarlo para las filas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_j \dots \wedge \mathbf{a}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n &= -\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_i \dots \wedge \mathbf{a}_j \dots \wedge \mathbf{a}_n \\ \Leftrightarrow \sum i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) \\ &= -\sum i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n), \end{aligned}$$

de donde

$$\sum i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = -\sum i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

V. $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{0} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$.

VI. Puesto que el producto exterior de varios vectores es nulo cuando dos de los factores son iguales.

VII. En virtud de III es suficiente demostrarlo para las filas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge (t \mathbf{a}_i) \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n &= t [\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n] \Rightarrow \\ \sum i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (t a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} &= t \sum i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

VIII. Es consecuencia de que el producto exterior de vectores linealmente dependientes es nulo.

IX.

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n.$$

X. De las propiedades IV y V de **83** se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n &= \left[(\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i-1}) \wedge \mathbf{a}_i \right] \wedge (\mathbf{a}_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n) \\ &= (-1)^{i-1} \left[\mathbf{a}_i \wedge (\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i-1}) \right] \wedge (\mathbf{a}_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n) \\ &= (-1)^{i-1} \left[\mathbf{a}_i \wedge \left[(\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i-1}) \wedge (\mathbf{a}_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n) \right] \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n &= \alpha_{i1} (\mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) + \alpha_{i2} (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) + \dots \\ &\quad + \alpha_{in} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{n-1}), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n &= (-1)^{i-1} \left[(\alpha_{i1} \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_{in} \mathbf{u}_n) \wedge \left[\alpha_{i1} (\mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_{i2} (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) + \dots + \alpha_{in} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{n-1}) \right] \right] = (-1)^{i-1} \left[\alpha_{i1} \alpha_{i1} (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \right. \\ &\quad \left. \wedge \mathbf{u}_n) + \alpha_{i2} \alpha_{i2} (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) + \dots + \alpha_{in} \alpha_{in} (\mathbf{u}_n \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{n-1}) \right] \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \alpha_{ij} (\mathbf{u}_j \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{j-1} \wedge \mathbf{u}_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \alpha_{ij} (-1)^{j-1} (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{j-1} \wedge \mathbf{u}_j \wedge \mathbf{u}_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left[(-1)^{i+j-2} \alpha_{ij} \right] (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left[(-1)^{i+j} \alpha_{ij} \right] (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \wedge_{ij} \right) (\mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n). \end{aligned}$$

XI. De

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{j-1} \wedge \mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}_{j+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_n = 0,$$

se deduce:

$$\begin{aligned}
 0 &= (-1)^{j-1} a_i \wedge [a_1 \wedge \dots \wedge a_{j-1} \wedge a_{j+1} \wedge \dots \wedge a_n] \\
 &= (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} (u_k \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{k-1} \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} ((-1)^{j+k-2} a_{jk}) (u_1 \wedge \dots \wedge u_{k-1} \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \wedge_{jk} (u_1 \wedge \dots \wedge u_n),
 \end{aligned}$$

XII.

$$\begin{aligned}
 a_1 \wedge \dots \wedge a_n &= (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\dots+(i_r-r)} (a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_r}) \wedge \\
 &\quad (a_1 \wedge \dots \wedge a_{i_1-1} \wedge a_{i_1+1} \wedge \dots \wedge a_n) \\
 &= (-1)^{i_1+\dots+i_r-\frac{r(r+1)}{2}} \sum_{c_{n,r}} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r| |i_1 j_1; \dots; i_r j_r|^* (u_{j_1} \wedge \dots \\
 &\quad \wedge u_{j_r}) (u_1 \wedge \dots \wedge u_{j_1-1} \wedge u_{j_1+1} \wedge \dots \wedge u_n) \\
 &= \sum_{c_{n,r}} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r| \left((-1)^{i_1+\dots+i_r-\frac{r(r+1)}{2}+(j_1+i-2)+\dots+(j_r-1)} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r|^* \right) \\
 &\quad \times (u_1 \wedge \dots \wedge u_n),
 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
 i_1 + \dots + i_r - \frac{r(r+1)}{2} + (j_1 + r - 2) + \dots + (j_r - 1) \\
 = i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r - \frac{r(r+1)}{2} + \frac{(r-1)(r-2)}{2} - 1 \\
 = i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r - 2r,
 \end{aligned}$$

y como $(-1)^{-2r} = +1$, resulta:

$$\begin{aligned}
 a_1 \wedge \dots \wedge a_n \\
 &= \sum_{c_{n,r}} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r| \left((-1)^{i_1+\dots+i_r+j_1+\dots+j_r} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r|^* \right) (u_1 \wedge \dots \wedge u_n) \\
 &= \left(\sum_{c_{n,r}} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r| \text{Adj} |i_1 j_1; \dots; i_r j_r| \right) (u_1 \wedge \dots \wedge u_n).
 \end{aligned}$$

Sea $+$ una operación interna de R . A los elementos de R los designamos

por $x, y, \dots$ y a los de M por $x', y' \dots$. Designamos por I a la biyección dada de M en R y a la biyección de $M \times M$ en $R \times R$:

$$I(x', y') = (I(x'), I(y')).$$

Se define la operación $+$ en M de modo que el diagrama

$$(134) \quad \begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{I} & R \times R \\ + \downarrow & & \downarrow + \\ M & \xleftarrow{I^{-1}} & R \end{array}$$

sea conmutativo. Por consiguiente, será:

$$x' + y' = I^{-1}(I(x') + I(y')).$$

Si $\circ$ es una operación externa de R , esto es, una aplicación de $K \times R$ en R , siendo K un sistema algebraico, se designa por I la aplicación de $K \times M$ en $K \times R$ definida del siguiente modo:

$$I(a, x') = (a, I(x')). \quad a \in K.$$

Se define la operación externa $\circ$ en M de modo que sea conmutativo el siguiente diagrama:

$$(135) \quad \begin{array}{ccc} K \times M & \xrightarrow{I} & K \times R \\ \circ \downarrow & & \downarrow \circ \\ M & \xleftarrow{I^{-1}} & R \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN.—a) Supongamos que R sea un anillo con la adición $+$ y la multiplicación $\cdot$. La adición definida en M por (134) es uniforme. En efecto, si $x' + y' = z'$ y $x' + y' = t'$, será

$$z' = I^{-1}(I(x') + I(y')), \quad t' = I^{-1}(I(x') + I(y')),$$

de donde

$$I(z') = I(x') + I(y') = I(t') \quad \text{y} \quad z' = t'.$$

La adición en M es asociativa:

$$\begin{aligned} (x' + y') + z' &= I^{-1}(I(x' + y') + I(z')) \\ &= I^{-1}[I(I^{-1}(I(x') + I(y')) + I(z'))] = I^{-1}((I(x') + I(y')) + I(z')) \\ &= I^{-1}(I(x') + (I(y') + I(z'))) = I^{-1}[I(x') + I(I^{-1}(I(y') + I(z')))] \\ &= I^{-1}[I(x') + I(y' + z')] = x' + (y' + z'). \end{aligned}$$

La adición en M es conmutativa:

$$x' + y' = I^{-1} (I (x') + I (y')) = I^{-1} (I (y') + I (x')) = y' + x'.$$

El elemento $I^{-1} (0)$ es el cero de M :

$$x' + I^{-1} (0) = I^{-1} (I (x') + I (I^{-1} (0))) = I^{-1} (I (x') + 0) = I^{-1} (I (x')) = x'.$$

El elemento opuesto al elemento x' es $I^{-1} (-I (x'))$. En efecto:

$$\begin{aligned} x' + I^{-1} (-I (x')) &= I^{-1} (I (x') + I (I^{-1} (-I (x')))) \\ &= I^{-1} (I (x') + (-I (x'))) = I^{-1} (0). \end{aligned}$$

Análogamente se demuestran las propiedades homólogas de la multiplicación, por lo que nos limitaremos a probar la distributiva:

$$\begin{aligned} x' (y' + z') &= I^{-1} (I (x') \cdot I (y' + z')) = I^{-1} [I (x') \cdot I (I^{-1} (I (y') + I (z')))] \\ &= I^{-1} [I (x') [I (y') + I (z')]] = I^{-1} [I (x') \cdot I (y') + I (x') \cdot I (z')] \\ &= I^{-1} [I I^{-1} (I (x') \cdot I (y')) + I I^{-1} (I (x') \cdot I (z'))] \\ &= I^{-1} [I (x' y') + I (x' z')] = x' y' + x' z'. \end{aligned}$$

b) Supongamos que R sea un espacio vectorial. Nos limitamos a la operación externa. Sea $a \in K$. La operación externa es uniforme:

$$a x' = z', \quad a x' = t' \Rightarrow z' = I^{-1} (a I (x')) = t'.$$

Si $a, b \in K$.

$$\begin{aligned} (a + b) x' &= I^{-1} ((a + b) I (x')) = I^{-1} [a I (x') + b I (x')] = \\ &= I^{-1} [I I^{-1} (a I (x')) + I I^{-1} (b I (x'))] = I^{-1} [I (a x') + I (b x')] = a x' + b x'. \\ a (x' + y') &= I^{-1} (a I (x' + y')) = I^{-1} [a \cdot I (I^{-1} (I (x') + I (y')))] \\ &= I^{-1} [a \cdot (I (x') + I (y'))] = I^{-1} [a I (x') + a I (y')] \\ &= I^{-1} [I I^{-1} (a I (x')) + I I^{-1} (a I (y'))] = I^{-1} [I (a x') + I (a y')] = a x' + a y'. \\ (a b) x' &= I^{-1} ((a b) I (x')) = I^{-1} [a (b I (x'))] = I^{-1} [a [I I^{-1} (b I (x'))]] \\ &= I^{-1} [a [I (b x')]] = a (b x'). \end{aligned}$$

$$1 \cdot x' = I^{-1} [1 \cdot I (x')] = I^{-1} (I (x')) = x'.$$

c) Análogamente se prueba en el caso de cualquier otro sistema algebraico.

Aplicando este teorema a la biyección (133), y recordando (57, 8, § 1) que $\text{Hom}(V, V')$ es un espacio vectorial, las definiciones (134) y (135) dan lugar en este caso a las siguientes definiciones de adición de matrices y de multiplicación de matrices por números.

Sean A y B dos matrices de $\mathfrak{M}_{n \times m}$ y sean α y β sus homomorfismos correspondientes respecto de I^{-1} . Se verificará:

$$A + B = I(I^{-1}(A) + I^{-1}(B)) = I(\alpha + \beta),$$

ahora bien, recordando que $I(\gamma)$ es la matriz formada por las coordenadas de $\gamma(u_i)$, $i = 1, \dots, n$ respecto de B' , de

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta) u_1 = \alpha u_1 + \beta u_1 = (a_{11} u'_1 + \dots + a_{1m} u'_m) + (b_{11} u'_1 + \dots + b_{1m} u'_m) \\ \quad \quad \quad = (a_{11} + b_{11}) u'_1 + \dots + (a_{1m} + b_{1m}) u'_m, \\ \dots\dots\dots \\ (\alpha + \beta) u_n = \alpha u_n + \beta u_n = (a_{n1} u'_1 + \dots + a_{nm} u'_m) + (b_{n1} u'_1 + \dots + b_{nm} u'_m) \end{array} \right.$$

se deduce que

$$(136) \quad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Análogamente, la definición (135) aplicada a este caso da lugar a la siguiente definición de multiplicación de una matriz A de $\mathfrak{M}_{n \times m}$ por un número p :

$$pA = I(pI^{-1}(A)) = I(p\alpha)$$

y como

$$\begin{array}{l} (p\alpha) u_1 = p(\alpha u_1) = p(a_{11} u'_1 + \dots + a_{1m} u'_m) = (p a_{11}) u'_1 + \dots + (p a_{1m}) u'_m, \\ \dots\dots\dots \\ (p\alpha) u_n = p(\alpha u_n) = p(a_{n1} u'_1 + \dots + a_{nm} u'_m) = (p a_{n1}) u'_1 + \dots + (p a_{nm}) u'_m, \end{array}$$

resulta

$$(137) \quad p A = \begin{pmatrix} p a_{11} & \dots & p a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ p a_{n1} & \dots & p a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Definición 44.—Se llama *suma* de dos matrices A y B de $\mathfrak{M}_{m \times n}$, y se representa por $A + B$ a la matriz (136) que se obtiene sumando los números que ocupan el mismo lugar en las dos matrices. Se llama *producto de una matriz A por un número p* , y se representa por $p A$, a la matriz que se obtiene multiplicando todos los términos de A por p .

En virtud del teorema de definición por isomorfía, de las definiciones anteriores y del teorema (57, 8, § 1), resulta el siguiente:

86. *El conjunto $\mathfrak{M}_{n \times m}$ de todas las matrices de n filas y m columnas, con elementos de un cuerpo K , es un espacio vectorial de dimensión $n m$, respecto de las definiciones de adición y multiplicación por un número de la definición anterior.*

Obsérvese que para establecer la biyección (133) es necesario fijar las bases B y B' de V y V' , respectivamente. A cada par de bases (B, B') corresponde una biyección I .

Sea V un espacio n -dimensional sobre K y consideremos el conjunto $\text{End.}(V)$ de todos los endomorfismos de V . Se ha visto (61, 8, § 1) que $\text{End.}(V)$ es un álgebra. La biyección (133) aplicada a este caso proporciona una biyección:

$$(138) \quad \text{End.}(V) \xrightarrow{I} \mathfrak{M}_n,$$

siendo $\mathfrak{M}_n$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n . La biyección (138) permite definir en $\mathfrak{M}_n$ una estructura de álgebra, en virtud del teorema de definición por isomorfía. Vamos a estudiar ahora la multiplicación de matrices de un modo más general.

Sean V , V' y V'' tres espacios vectoriales sobre K de dimensiones m , n y p , respectivamente. Sean α , β , γ homomorfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & V' \\ & \searrow \gamma & \swarrow \beta \\ & V'' & \end{array}$$

El homomorfismo γ se llama producto de α por β , y se escribe $\gamma = \beta \alpha$. Sean A , B y C las respectivas matrices de α , β y γ respecto de las bases $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$, $B' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ y $B'' = \{\mathbf{u}''_1, \dots, \mathbf{u}''_p\}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

La matriz C se llama *producto de la matriz A por la matriz B* , y se escribe:

$$(139) \quad C = AB.$$

De esta definición resulta que para que la matriz A se pueda multiplicar por la matriz B es necesario que el número de columnas del primer factor sea igual al de filas del segundo. Esta condición es suficiente en virtud de la biyección (133).

De (139) se deduce:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{u}_i) &= c_{i1} \mathbf{u}''_1 + \dots + c_{ip} \mathbf{u}''_p = \beta \alpha(\mathbf{u}_i) = \beta(a_{i1} \mathbf{u}'_1 + \dots + a_{in} \mathbf{u}'_n) \\ &= a_{i1} \beta(\mathbf{u}'_1) + \dots + a_{in} \beta(\mathbf{u}'_n) \\ &= a_{i1} (b_{11} \mathbf{u}''_1 + \dots + b_{1p} \mathbf{u}''_p) + \dots + a_{in} (b_{n1} \mathbf{u}''_1 + \dots + b_{np} \mathbf{u}''_p) \\ &= (a_{i1} b_{11} + \dots + a_{in} b_{n1}) \mathbf{u}''_1 + \dots + (a_{i1} b_{1p} + \dots + a_{in} b_{np}) \mathbf{u}''_p, \end{aligned}$$

de donde:

$$c_{i1} = a_{i1} b_{11} + \dots + a_{in} b_{n1}, \dots, c_{ip} = a_{i1} b_{1p} + \dots + a_{in} b_{np},$$

luego resulta:

$$(140) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + \dots + a_{1n} b_{n1} & \dots & a_{11} b_{1p} + \dots + a_{1n} b_{np} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} b_{11} + \dots + a_{mn} b_{n1} & \dots & a_{m1} b_{1p} + \dots + a_{mn} b_{np} \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 45.—Se llama producto de la matriz A , de dimensiones $m \times n$, por la matriz B , de dimensiones $n \times p$, y se representa por AB , a la matriz del homomorfismo γ producto del homomorfismo α por el homomorfismo β , siendo α el homomorfismo correspondiente a la matriz A entre los espacios V_m y V'_n , respecto de las bases (B, B') de estos espacios, β el homomorfismo

entre V'_n y V''_n , correspondiente a la matriz B , respecto de las bases $(B'$ y $B'')$ y A la matriz de γ respecto de las bases (B, B'') . La matriz $A B$ viene entonces dada por la igualdad (140).

De esta definición, de **84**, **83** y (138) se deduce el siguiente teorema:

87. *El conjunto $\mathfrak{M}_n$ de todas las matrices cuadradas de orden n es un álgebra isomorfa al álgebra de los endomorfismos de un espacio vectorial V_n :*

$$(141) \quad \text{End.}(V_n) \approx \mathfrak{M}_n.$$

EL GRUPO $GL(n)$ DE LOS AUTOMORFISMOS DE UN ESPACIO VECTORIAL n -DIMENSIONAL.—Un automorfismo (**8**, **61**, D) de un espacio vectorial es un endomorfismo que es isomorfismo.

88. $[z \text{ es un automorfismo de } V] \iff [B = \{u_1, \dots, u_n\} \text{ es base de } V] \implies B' = \{z(u_1), \dots, z(u_n)\} \text{ es base de } V].$

DEMOSTRACIÓN.— $\implies$.

$$\ker(\alpha) = 0 \iff [\alpha(x) = 0 \implies x = 0],$$

luego

$$\begin{aligned} x_1 \alpha(u_1) + \dots + x_n \alpha(u_n) = 0 &\iff \alpha(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = 0 \implies x_1 u_1 + \dots \\ &+ x_n u_n = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0, \end{aligned}$$

por ser B una base de V .

$\impliedby$. Sea α un endomorfismo. a) α es suprayectivo. Si x es un vector arbitrario de V y si

$$x = x_1 \alpha(u_1) + \dots + x_n \alpha(u_n) = \alpha(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n),$$

el vector $y = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ es tal que $\alpha(y) = x$.

b) $\ker(\alpha) = 0$. En efecto,

$$x \in \ker(\alpha) \iff 0 = \alpha(x) = \alpha(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 (\alpha(u_1)) + \dots + x_n (\alpha(u_n)),$$

de donde $x_1 = \dots = x_n = 0$ y $x = 0$.

89. α es un automorfismo de $V \implies \alpha(u_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u_n) \neq 0$, para toda base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de 88 basta ver que

$$\alpha(u_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u_n) \neq 0 \Leftrightarrow B' = \{\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_n)\}$$

es base de V . En efecto: a) $\Leftarrow$. Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V y fuese $\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, sería $\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_n \in \ker(A)$, siendo A el endomorfismo de alternación de $V^{\otimes n}$, lo que implicaría que $A(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, pero

$$A(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_n) = \sum_{\sigma} i(\sigma) (\mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{\sigma(n)}).$$

lo cual es imposible por ser los tensores $\mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{\sigma(n)}$ linealmente independientes. b) $\Rightarrow$. Si B' no fuese base sería linealmente dependiente y su producto exterior sería cero.

90. α es un automorfismo de $V \iff |A| \neq 0$, siendo A la matriz de α respecto de cualquier base.

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia de 89 y de

$$\alpha(u_1) \wedge \dots \wedge \alpha(u_n) = |A| (u_1 \wedge \dots \wedge u_n).$$

Sea α el automorfismo definido por:

[illegible]

Al automorfismo inverso lo representamos por α^{-1} y a su matriz correspondiente, respecto de la base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, por A^{-1} . De (142) se deduce que

(143) $x x^{-1} = e \Leftrightarrow A A^{-1} = I,$

siendo ι el automorfismo identidad: $\iota(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$ e I la matriz unidad:

$$(144) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A^{-1} se llama *inversa de la matriz A* .

De 90 se deduce:

91. $|A| \neq 0 \iff$ La matriz A posee inversa.

De todo lo anterior resulta:

92. El conjunto $GL(n)$ de todos los automorfismos de un espacio vectorial n -dimensional es un grupo isomorfo al grupo multiplicativo de las matrices cuadradas de orden n y determinante distinto de cero.

De (120) y (121) se deduce que

$$(145) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

De (143) y (145) se deduce, por la unicidad de la matriz inversa, que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

§ 2. MATRICES. CALCULO CON MATRICES

1. Operaciones lineales con matrices.

DEFINICIÓN 1.—Una *matriz* sobre un cuerpo, anillo, grupo, etc., K es una aplicación de $I \times J$, $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, m\}$, en K tal como la siguiente:

$$\begin{array}{cccc} 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 4 & 2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}$$

Los elementos de K imágenes de los elementos $(i, 1), \dots, (i, m)$ se dice que forman la *fila* i -ésima de la matriz. Los elementos imágenes de $(1, j), \dots, (n, j)$, forman la columna j -ésima de la matriz. Los elementos de una matriz se representan por una misma letra con dos subíndices, que representan al elemento (i, j) de $I \times J$ original del elemento dado. Por consiguiente, el primero indica la fila a que pertenece el elemento y el segundo la columna, así por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}$$

Una matriz de n filas y m columnas se dice que es de dimensiones $n \times m$. Dos matrices se llaman equi-dimensionales cuando poseen el mismo número de filas y el mismo número de columnas.

A las matrices las designamos también por una letra mayúscula o encerrando entre paréntesis su elemento general a_{ij} del siguiente modo:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Siendo las matrices aplicaciones, dos matrices (a_{ij}) y (b_{ij}) , aplicación de $I \times J$ en K y de $I' \times J'$ en K , respectivamente, serán iguales cuando $I \times J = I' \times J'$ y $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Esto es, dos matrices A y B

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

se llaman *iguales* cuando son equidimensionales y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales. Por consiguiente,

$$A = B \Leftrightarrow a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots, a_{1m} = b_{1m}; \dots; a_{n1} = b_{n1}, \dots, a_{nm} = b_{nm}.$$

Al conjunto de todas las matrices de dimensiones $n \times m$ lo designaremos por $\mathfrak{M}_{n \times m}$.

DEFINICIÓN 2.—Siendo los elementos de $\mathfrak{M}_{n \times m}$ aplicaciones de $I \times J$ en K , si K es un grupo aditivo abeliano se puede definir una *adición* en $\mathfrak{M}_{n \times m}$ del siguiente modo: $(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, esto es:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

1. El conjunto $\mathfrak{M}_{n \times m}$, respecto de la definición de adición anterior, es un grupo abeliano, cuyo elemento cero, o matriz cero, es

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz opuesta, $-A$, de una matriz A es:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nm} \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS:

358. Averiguar si son iguales las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5^2 - 4^2 & 4 + 12 + 9 \\ -\frac{6}{3} & (2-1)(2+1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} (5+4)(5-4) & 5^2 \\ -2 & 2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

359. Escribir las igualdades equivalentes a la siguiente igualdad de matrices:

$$(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2, a_{21}y_1 + a_{22}y_2, a_{31}y_1 + a_{32}y_2).$$

360. Sumar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

361. Demostrar el teorema 1.

DEFINICIÓN 3.—Si K es un anillo o cuerpo, dado un número p de K y una matriz cualquiera (a_{ij}) de $\mathfrak{M}_{n \times m}$, se llama *producto de p por la matriz (a_{ij})* , y se designa por $p(a_{ij})$ a la matriz:

$$p(a_{ij}) = (p a_{ij})$$

2. La multiplicación de números por matrices posee las cuatro propiedades siguientes:

- I. $p[(a_{ij}) + (b_{ij})] = p(a_{ij}) + p(b_{ij})$.
- II. $[p + q](a_{ij}) = p(a_{ij}) + q(a_{ij})$.
- III. $[p q](a_{ij}) = p[q(a_{ij})]$.
- IV. $1 \cdot (a_{ij}) = (a_{ij})$.

EJERCICIOS:

362. Multiplicar el número 4 por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & -3, & -1, & 0 \\ 1, & \frac{3}{4}, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

363. Demostrar el teorema 2.

364. Demostrar que si 0 es el elemento cero de K , y A cualquier matriz, es $0A = O$ y que $(-1)A = -A$.

De 1 y 2 se deduce:

3. Si K es un cuerpo, el conjunto $\mathfrak{M}_{n \times m}$ es un espacio vectorial.

EJERCICIOS:

365. Hallar una base de $\mathfrak{M}_{2 \times 3}$.

366. ¿Qué dimensión tiene $\mathfrak{M}_{n \times m}$?

2. Multiplicación de matrices. Transposición.

DEFINICIÓN 4.—Dados los conjuntos de matrices $\mathfrak{M}_{m \times n}$, $\mathfrak{M}_{n \times p}$ y $\mathfrak{M}_{m \times p}$, se puede definir una aplicación:

$$\mathfrak{M}_{m \times n} \times \mathfrak{M}_{n \times p} \longrightarrow \mathfrak{M}_{m \times p},$$

llamada *multiplicación*, del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que para que la matriz A sea multiplicable por la matriz B es necesario y suficiente que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B. Obsérvese también que puede ser A multiplicable por B y no ser B multiplicable por A. Además, si las dimensiones de A y B son $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, las dimensiones de A B son $m \times p$.

4. La multiplicación de matrices es asociativa, distributiva respecto de la adición y conmutativa respecto de la multiplicación por números, esto es, se verifica:

- I. $(A B) C = A (B C)$.
- II. $A (B + C) = A B + A C$.
- III. $(p A) B = p (A B) = A (p B)$.
- IV. Se verifica que $A I = A$ para toda A, siendo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, $I A = A$.

EJERCICIOS:

- 367. Comprobar 4 en casos particulares.
- 368. Probar que $A O = O$, $O A = O$, $A (-B) = -(A B)$
- 369. Calcular

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$370. \text{ Calcular } (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3).$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES POR CAJAS.—Consideremos el siguiente producto de matrices, en el que se han decompuesto las matrices A y B en cajas del siguiente modo: se han trazado rayas verticales entre las columnas i_1 e $i_1 + 1$, i_2 e $i_2 + 1$, ..., i_r e $i_r + 1$ de la matriz A y entre las filas i_1 e $i_1 + 1$, i_2 e $i_2 + 1$, ..., i_r e $i_r + 1$ de la matriz B. Las rayas horizontales de la matriz A son arbitrarias, así como las rayas verticales de la matriz B. A las cajas que se han formado en la matriz A se les ha llamado A_{11} , ..., $A_{1, r+1}$, a las de la primera fila, esto es, a las cajas limitadas por la horizontal trazada por debajo de la fila j_1 , etc., $A_{s+1, 1}$, ..., $A_{s+1, r+1}$ a las cajas de la última fila, esto es, a las que están por debajo de la última horizontal trazada por debajo de la fila j_s . Análogamente, se han designado por B_{11} , ..., $B_{1, t+1}$ a las cajas de la matriz B situadas en la primera columna (a la izquierda de la vertical trazada detrás de la columna h_1 -ésima, etc., de modo que:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1i_1} & \dots & a_{1i_r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_1 1} & \dots & a_{j_1 i_1} & \dots & a_{j_1 i_r+1} & \dots & a_{j_1 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s+1 1} & \dots & a_{i_s+1 i_1} & \dots & a_{i_s+1 i_r+1} & \dots & a_{i_s+1 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi_1} & \dots & a_{mi_r+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & \dots & A_{1, r+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{s+1, 1} & \dots & A_{s+1, r+1} \end{array} \right)$$

y

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{1h_1} & \dots & b_{1h_t+1} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i_1 1} & \dots & b_{i_1 h_1} & \dots & b_{i_1 h_t+1} & \dots & b_{i_1 p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_r+1 1} & \dots & b_{i_r+1 h_1} & \dots & b_{i_r+1 h_t+1} & \dots & b_{i_r+1 p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nh_1} & \dots & b_{nh_t+1} & \dots & b_{np} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} B_{11} & \dots & B_{1, t+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{r+1, 1} & \dots & B_{r+1, t+1} \end{array} \right)$$

Multiplicando la matriz A por la B se descomponen los diversos elementos de la matriz A B tal como se indica a continuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1i_1} & \dots & \dots & a_{1i_r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_11} & \dots & a_{j_1i_1} & \dots & \dots & a_{j_1i_r+1} & \dots & a_{j_1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_s+11} & \dots & a_{j_s+1i_1} & \dots & \dots & a_{j_s+1i_r+1} & \dots & a_{j_s+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi_1} & \dots & \dots & a_{mi_r+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{1h_1} & \dots & \dots & b_{1h_t+1} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{i_11} & \dots & b_{i_1h_1} & \dots & \dots & b_{i_1h_t+1} & \dots & b_{i_1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_r+11} & \dots & b_{i_r+1h_1} & \dots & \dots & b_{i_r+1h_t+1} & \dots & b_{i_r+1p} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nh_1} & \dots & \dots & b_{nh_t+1} & \dots & b_{np} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \sum_1^{i_1} a_{1k} b_{k1} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{1k} b_{k1} \quad \dots \quad \sum_1^{i_1} a_{1k} b_{kp} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{1k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^{i_1} a_{j_1k} b_{k1} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{j_1k} b_{k1} \quad \dots \quad \sum_1^{i_1} a_{j_1k} b_{kp} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{j_1k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^{i_1} a_{j_s+1k} b_{k1} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{j_s+1k} b_{k1} \quad \dots \quad \sum_1^{i_1} a_{j_s+1k} b_{kp} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{j_s+1k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^{i_1} a_{mk} b_{k1} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{mk} b_{k1} \quad \dots \quad \sum_1^{i_1} a_{mk} b_{kp} + \dots + \sum_{i_r+1}^n a_{mk} b_{kp} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{c} \sum_1^{i_1} a_{1k} b_{k1} \dots \sum_1^{i_1} a_{1k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^{i_1} a_{j_1 k} b_{k1} \dots \sum_1^{i_1} a_{j_1 k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^{i_1} a_{j_{s+1} k} b_{k1} \dots \sum_1^{i_1} a_{j_{s+1} k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^{i_1} a_{mk} b_{k1} \dots \sum_1^{i_1} a_{mk} b_{kp} \end{array} \right) + \dots + \left(\begin{array}{c} \sum_{i_r+1}^n a_{1k} b_{k1} \dots \sum_{i_r+1}^n a_{1k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i_r+1}^n a_{j_1 k} b_{k1} \dots \sum_{i_r+1}^n a_{j_1 k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i_r+1}^n a_{j_{s+1} k} b_{k1} \dots \sum_{i_r+1}^n a_{j_{s+1} k} b_{kp} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i_r+1}^n a_{mk} b_{k1} \dots \sum_{i_r+1}^n a_{mk} b_{kp} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} A_{11} \quad B_{11} \dots A_{11} \quad B_{1,t+1} \\ \dots \dots \dots \\ A_{s+1,1} \quad B_{11} \dots A_{s+1,1} \quad B_{1,t+1} \end{array} \right) + \dots + \left(\begin{array}{c} A_{1,r+1} \quad B_{r+1,1} \dots A_{1,r+1} \quad B_{r+1,t+1} \\ \dots \dots \dots \\ A_{s+1,r+1} \quad B_{r+1,1} \dots A_{s+1,r+1} \quad B_{r+1,t+1} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} A_{11} \quad B_{11} + \dots + A_{1,r+1} \quad B_{r+1,1} \dots A_{11} \quad B_{1,t+1} + \dots + A_{1,r+1} \quad B_{r+1,t+1} \\ \dots \dots \dots \\ A_{s+1,1} \quad B_{11} + \dots + A_{s+1,r+1} \quad B_{r+1,1} \dots A_{s+1,1} \quad B_{1,t+1} + \dots + A_{s+1,r+1} \quad B_{r+1,t+1} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Resulta, por consiguiente, la siguiente fórmula de multiplicación de matrices por cajas:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c} A_{11} \quad \dots A_{1,r+1} \\ \vdots \\ A_{s+1,1} \quad \dots A_{s+1,r+1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} B_{11} \quad \dots B_{1,t+1} \\ \vdots \\ B_{r+1,1} \quad \dots B_{r+1,t+1} \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} A_{11} \quad B_{11} + \dots + A_{1,r+1} \quad B_{r+1,1} \dots A_{11} \quad B_{1,t+1} + \dots + A_{1,r+1} \quad B_{r+1,t+1} \\ \dots \dots \dots \\ A_{s+1,1} \quad B_{11} + \dots + A_{s+1,r+1} \quad B_{r+1,1} \dots A_{s+1,1} \quad B_{1,t+1} + \dots + A_{s+1,r+1} \quad B_{r+1,t+1} \end{array} \right),
\end{aligned}$$

esto es, la multiplicación por cajas se efectúa como si las cajas fuesen números.

EJERCICIOS:

378. Multiplicar por cajas las siguientes matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{22} \\ \hline b_{31} & b_{32} \end{array} \right)$$

379. Multiplicar por cajas las siguientes matrices:

$$\left(\begin{array}{c|cc} t_0 & t_1 & t_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right).$$

380. Multiplicar por cajas las siguientes matrices:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & w_{11} & w_{12} \\ 0 & w_{21} & w_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right).$$

381. Multiplicar por cajas las siguientes matrices:

$$\left(\begin{array}{c|cc} t_0 & t_1 & t_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} t_0 & 0 & 0 \\ \hline t_1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

DEFINICIÓN 5.—Se llama *transpuesta* de la matriz A, y la designaremos por A', a la matriz que se obtiene al cambiar filas por columnas en la matriz A:

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{array} \right)$$

EJERCICIOS:

382. Escribir las transpuestas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad X = (x_1, x_2, x_3).$$

5. PROPIEDADES DE LA TRANSPOSICIÓN DE MATRICES.

- I. $(A')' = A$.
- II. $(A + B)' = A' + B'$.
- III. $(p A)' = p A'$.
- IV. $(A B)' = B' A'$.

EJERCICIOS:

383. Demostrar las propiedades I, II y III.
 384. Comprobar en un ejemplo la propiedad IV.

DEFINICIÓN 6.—Se llaman matrices *simétricas* aquellas que son iguales a sus transpuestas y *hemisimétricas* las que sus opuestas son iguales a sus transpuestas:

$$A \text{ simétrica} \iff A = A'.$$

$$A \text{ hemisimétrica} \iff A' = -A.$$

EJERCICIOS:

386. Probar que las matrices simétricas y las hemisimétricas son matrices cuadradas.
 388. Probar que si A es hemisimétrica todos los términos de la diagonal principal son nulos.

3. Determinante de una matriz cuadrada.—Sea $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ una permutación de los números $(1, 2, \dots, n)$. Pondremos:

$$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \dots, \sigma(n) = i_n.$$

Si $\tau = (j_1, \dots, j_n)$ es otra permutación, pondremos:

$$\tau\sigma(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(i_1) = j_{i_1}, \dots, \tau\sigma(n) = \tau(\sigma(n)) = \tau(i_n) = j_{i_n}$$

EJERCICIOS:

387. Si $\sigma = (3\ 4\ 2\ 5\ 1)$ y $\tau = (2\ 1\ 5\ 3\ 4)$, calcular $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, $\sigma(3)$, $\sigma(4)$, $\sigma(5)$, $\tau\sigma(1)$, $\dots$, $\tau\sigma(5)$.

Dos elementos i_k e i_h de una permutación σ se dice que forman inversión cuando en el orden natural i_h precede a i_k . Si ϵ es el número total de inversiones de una permutación σ , se llama índice de σ , y se representa por $i(\sigma)$, a $(-1)^\epsilon$.

EJERCICIOS:

388. Contar los números de inversiones de las siguientes permutaciones: $\sigma = (3\ 4\ 2\ 5\ 1)$, $\tau = (2\ 1\ 5\ 3\ 4)$, $(\tau\sigma(1), \tau\sigma(2), \tau\sigma(3), \tau\sigma(4), \tau\sigma(5))$, $(\sigma\tau(1), \sigma\tau(2), \sigma\tau(3), \sigma\tau(4), \sigma\tau(5))$.
 389. Calcular los índices de las siguientes permutaciones: $\sigma_1 = (2\ 5\ 1\ 4\ 6\ 3)$, $\sigma_2 = (5\ 3\ 1\ 6\ 4\ 2)$, $\sigma_3 = (4\ 2\ 6\ 5\ 3\ 1)$, $\sigma_4 = (2\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5)$, $\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1$, $\sigma_4\sigma_2$, $\sigma_4\sigma_3$.

Si σ y τ son dos permutaciones de los mismos números, la permutación

$$(\tau \sigma(1), \tau \sigma(2), \tau \sigma(3), \tau \sigma(4), \dots, \tau \sigma(n))$$

se llama producto de la permutación σ por la permutación τ y se escribe simplemente $\tau \sigma$. Se verifica:

$$(1) \quad i(\tau \sigma) = i(\tau) \cdot i(\sigma).$$

En efecto, si el par de números (i, j) forman inversión en la permutación σ para que sigan formando inversión en la permutación $\tau \sigma$ es necesario y suficiente que no formen inversión en la permutación τ , luego cada inversión perdida al pasar de σ a $\tau \sigma$ es producida por una inversión de τ . Del mismo modo, cada inversión de τ perdida al pasar a $\tau \sigma$ procede de otra inversión de σ , luego el número de inversiones de $\tau \sigma$ es igual a la suma de las inversiones de σ y de las de τ disminuida en un número par, luego si ϵ es el número de inversiones de σ y ϵ' el de τ , el número de inversiones de $\tau \sigma$ es $\epsilon^* = \epsilon + \epsilon' - 2k$, siendo k un entero no negativo, luego

$$(-1)^{\epsilon^*} = (-1)^{\epsilon + \epsilon'} = (-1)^{\epsilon} \cdot (-1)^{\epsilon'},$$

esto es, $i(\tau \sigma) = i(\tau) \cdot i(\sigma)$.

DEFINICIÓN 7.—Si P es el conjunto de todas las permutaciones de los números $(1, 2, \dots, n)$, se llama *determinante* de la matriz cuadrada A de orden n , al siguiente polinomio:

$$(2) \quad |A| = \sum_{\sigma \in P} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

EJERCICIOS:

390. Calcular

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

391. Calcular los signos de los siguientes términos de un determinante:

$$a_{12} a_{25} a_{31} a_{44} a_{56} a_{63}, \quad a_{15} a_{23} a_{31} a_{46} a_{54} a_{62}.$$

392. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix}.$$

6. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES (*).

I.

$$(3) \quad |A| = \sum_{\sigma \in P} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

II. Si una línea de la matriz A está formada por ceros, el determinante de A es nulo.

III. Si la matriz B se obtiene de la matriz A permutando dos de sus filas (columnas), se verifica que:

$$|B| = -|A|.$$

IV. Si una matriz posee dos líneas paralelas iguales, su determinante es nulo.

V. Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por este número.

VI. Dos filas (columnas) de una matriz se llaman proporcionales cuando los elementos de una se obtienen multiplicando los de la otra por un mismo número. El determinante de una matriz con dos líneas paralelas proporcionales es nulo.

VII.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(*) Las demostraciones de estas propiedades se han visto en (79, 11, § 1). El lector que no haya estudiado aquella parte se limitará a aplicar estas propiedades en los ejercicios que siguen.

VIII.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + p a_{j1} & \dots & a_{in} + p a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

DEFINICIÓN 8.—Se llama *submatriz* de una matriz A a toda matriz que se obtiene suprimiendo un cierto número (que puede ser nulo) de filas y un cierto número (que puede ser nulo) de columnas de la matriz A. Al determinante de una submatriz cuadrada de la matriz A se le llama *menor* de la matriz A. Si A es una matriz cuadrada, al menor que se obtiene suprimiendo la fila i -ésima y la columna j -ésima se le llama *menor complementario* del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij} . Si A es una matriz cuadrada, al menor que se obtiene suprimiendo las filas y columnas distintas de las filas $i_1, \dots, i_r$ y de las columnas $j_1, \dots, j_r$, lo designaremos por $|i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r|$. Al menor que se obtiene suprimiendo las filas $i_1, \dots, i_r$ y las columnas $j_1, \dots, j_r$ se le llama *menor complementario del anterior* y lo designaremos por $|i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r|^*$. Se llama *adjunto* de un elemento a_{ij} , y se representa por A_{ij} , al siguiente producto:

$$(4) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}.$$

Se llama *adjunto de un menor* $|i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r|$ de una matriz cuadrada, y se designa por $\text{Adj. } |i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r|$, al siguiente producto:

$$\text{Adj. } |i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r| = (-1)^{i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r} |i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r|^*.$$

IX.

$$(5) \quad a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = a_{1i} A_{1i} + \dots + a_{ni} A_{ni} = |A|, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$(6) \quad a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn} = a_{1i} A_{1j} + \dots + a_{ni} A_{nj} = 0, \quad i \neq j.$$

X.

$$(7) \quad |A| = \sum_{(j_1, \dots, j_r) \neq C_{n,r}} |i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r| \cdot \text{Adj. } |i_1 j_1, i_2 j_2, \dots, i_r j_r|.$$

EJERCICIOS:

393. Aplicar la fórmula (3) a una matriz de tercer orden y comparar con el ejercicio 390.

394. Demostrar la propiedad II.

395. Comprobar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

396*. Demostrar la propiedad IV.

397*. Demostrar la propiedad V.

398*. Demostrar la propiedad VI.

399*. Demostrar las propiedades VII y VIII.

400. Escribir tres submatrices de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

401. ¿Son

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}$$

submatrices de A (Ej. 400)?

402. Escribir un menor de primer orden, otro de segundo y otro de tercero de la matriz A del ejercicio 400.

403. Escribir los menores complementarios β_{23} y β_{42} de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

404. Escribir los adjuntos de b_{23} y de b_{42} en la matriz del ejercicio anterior.

405. Escribir los menores $|11; 43|$ y $|23; 34|$ de la matriz del ejercicio 403.

406. Escribir los menores complementarios de los menores del ejercicio anterior. Idem sus adjuntos.

407. Aplicar la fórmula (5) a la matriz del ejercicio 393 para $i = 2$.

408. Averiguar si $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ es menor complementario de algún elemento de la matriz del ejercicio 393 y, en caso afirmativo, escribir el adjunto correspondiente.

409. Aplicar la fórmula (7) a la matriz B tomando $i_1 = 2$, $i_2 = 4$.

7. El determinante de un producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices factores:

$$(8) \quad |AB| = |A| |B|.$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que

$$\begin{aligned}
 |A| |B| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -(a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}) & \dots & -(a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -(a_{n1}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{n1}) & \dots & -(a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn}) \\ \hline 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & AB \\ I & B \end{vmatrix} = (-1)^{n+(n+1+\dots+2n)+(1+\dots+n)} |AB| \\
 &= (-1)^{n+\frac{(2n+1)2n}{2}} |AB| = (-1)^{2n(n+1)} |AB| = |AB|.
 \end{aligned}$$

4. Matriz inversa de una matriz cuadrada.—Sea A una matriz cuadrada tal que $|A| \neq 0$. De (5) y (6) se deduce:

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{A_{ij}}{|A|} = 1, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{A_{kj}}{|A|} = 0, \quad i \neq k,$$

de donde:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Se llama *matriz inversa* de una matriz A , y se representa por A^{-1} , a la matriz tal que

$$(11) \quad A^{-1} A = I, \quad A A^{-1} = I, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

En virtud de (10), si

$$(12) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

se verifica que $A A^{-1} = I$. Ahora bien, en virtud de (5) y (6) se verifica también que

$$(13) \quad A^{-1} A = I,$$

luego (12) es la matriz inversa de la matriz A .

La matriz inversa es única, ya que si existiese otra B , tal que $A B = I$, de (13) se deduciría:

$$A^{-1} (A B) = A^{-1}, \quad (A^{-1} A) B = A^{-1}, \quad B = A^{-1}.$$

EJERCICIOS:

410. Calcular las matrices inversas de las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

411. Suponiendo que $|C - B| \neq 0$, resolver la siguiente ecuación respecto de X :

$$A - XB + XC = D.$$

412. Calcular $A^2 - 3A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

413. Comprobar, en casos particulares, que toda matriz cuadrada A es solución de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ cuando en ella se sustituye λ por A y $|A|$ por $|A|I$, siendo I la matriz unidad.

414. Calcular las potencias sucesivas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

415. Calcular el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d & e & x - f \end{vmatrix}$$

416. Calcular la matriz X de modo que se verifique

$$XA = C,$$

siendo $|A| \neq 0$.

417. Considerar el caso particular del ejercicio anterior en que $X = (x_1, \dots, x_n)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$.

418. Aplicar el ejercicio anterior a la ecuación matricial:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, -2, 3).$$

$$(4) \quad xA = c.$$

Vamos a considerar, en primer lugar, el caso particular en que A sea una matriz cuadrada de determinante no nulo.

REGLA DE CRAMER.—Sea el sistema (4), siendo

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0, \quad c = (c_1, \dots, c_n),$$

de (4) se deduce, multiplicando por la derecha por A^{-1} ,

$$(5) \quad x = c A^{-1}.$$

1. Los sistemas (4) y (5) son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $p = (p_1, \dots, p_n)$ una solución de (4). Se verificará:

$$(6) \quad p A = c,$$

de donde, multiplicando por la inversa de A ,

$$(7) \quad p = c A^{-1},$$

que prueba que p es solución del sistema (5). Recíprocamente, si p es solución de (5) se verificarán las igualdades (7) y, multiplicando por la derecha por A , se obtiene (6), que prueba que p es solución de (4).

Como en el sistema (5) las incógnitas están unívocamente determinadas, resulta que, en este caso, el sistema (4) tiene una única solución y ésta es el vector del segundo miembro de (5). Efectuando las operaciones de (5) se obtiene:

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{c_1 A_{11} + \dots + c_n A_{n1}}{|A|}, \dots, \frac{c_1 A_{1n} + \dots + c_n A_{nn}}{|A|} \right)$$

de donde:

$$(8) \quad x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} c_1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, x_n = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n-11} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1n} & c_n \end{vmatrix}$$

fórmulas conocidas con el nombre de regla de Cramer.

EJERCICIOS:

419. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

420. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

421. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 & = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 & = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 5. \end{cases}$$

2. Rango de una matriz. Dependencia lineal de vectores.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *rango* de una matriz A al mayor de los órdenes de los menores no nulos de la matriz.

EJERCICIOS:

422. Calcular los rangos de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

423. Si la matriz A posee un menor de orden r distinto de cero, ¿puede ser su rango inferior a r ?

424. Si una matriz de dimensiones $m \times n$ posee un menor de orden m distinto de cero, ¿cuál es el rango de la matriz?

425. Si B es una submatriz de la matriz A, ¿qué relación existe entre $r(B)$ y $r(A)$?

Dada la matriz

$$(9) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

designaremos por $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}'_j$ a los vectores formados por las filas y las columnas de A , respectivamente:

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1, \dots, m; \quad \mathbf{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), j = 1, \dots, n.$$

Sea L la variedad lineal engendrada por los vectores filas:

$$(10) \quad \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m.$$

1. TEOREMA FUNDAMENTAL. *La dimensión de la variedad L es igual al rango de la matriz A .*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que entre los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ haya r linealmente independientes y que todos los restantes dependan linealmente de ellos, por ejemplo: $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$ son linealmente independientes y

$$(11) \quad \mathbf{a}_{r+i} = \mu_{i1} \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_{ir} \mathbf{a}_r, \quad i = 1, \dots, m-r.$$

a) Por la transitividad de la dependencia lineal se verifica que todos los vectores de L dependen linealmente de $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$, ya que de (10) y (11) se deduce:

$$\mathbf{x} = (\lambda_1 + \mu_{11} \lambda_{r+1} + \dots + \mu_{n-r1} \lambda_n) \mathbf{a}_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_{1r} \lambda_{r+1} + \dots + \mu_{n-rr} \lambda_n) \mathbf{a}_r,$$

luego $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es un sistema de generadores de L y, como son linealmente independientes, forman una base de L , luego:

$$(12) \quad \dim(L) = r.$$

b) El rango de A es menor o igual a r . Sea

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s j_1} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}$$

un menor arbitrario de A de orden $s > r$. Por ser $\dim(L) = r$, el teorema de la base implica que los vectores $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_s}$ son linealmente dependientes,

esto es, uno de ellos, por ejemplo, $\mathbf{a}_i$, depende linealmente de los restantes, luego una de las filas de la matriz del menor M depende linealmente de las otras y, por tanto, el determinante es nulo.

c) El rango de A es mayor o igual a r . Sea s el rango de la submatriz formada por las filas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$:

$$(13) \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Si $s < r$, existiría un menor, por ejemplo, T :

$$(14) \quad T = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

y todos los menores de orden superior serían nulos. De (14) se deduce, por el teorema de Cramer, que el sistema

$$(15) \quad \begin{cases} a_{11} \lambda_1 + \dots + a_{s1} \lambda_s = a_{r1} \\ \dots \\ a_{1s} \lambda_1 + \dots + a_{ss} \lambda_s = a_{rs} \end{cases}$$

tiene solución única. Ahora bien, por ser nulos todos los menores de orden superior a s , se verifica que

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & a_{st} \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} & a_{rt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & a_{st} \\ 0 & \dots & 0 & a_{rt} - a_{1t} \lambda_1 - \dots - a_{st} \lambda_s \end{vmatrix}, \quad t = s+1, \dots, n,$$

de donde, desarrollando por la última fila,

$$T(a_{rt} - a_{1t} \lambda_1 - \dots - a_{st} \lambda_s) = 0, \quad t = s+1, \dots, n,$$

y como $T \neq 0$,

$$(16) \quad \begin{cases} a_{1s+1} \lambda_1 + \dots + a_{ss+1} \lambda_s = a_{rs+1}, \\ \dots \\ a_{1n} \lambda_1 + \dots + a_{sn} \lambda_s = a_{rn}. \end{cases}$$

De (15) y (16) se deduce que

$$\mathbf{a}_r = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{a}_s,$$

que está en contradicción con la hipótesis de ser $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \dots, \mathbf{a}_r$ linealmente independientes.

Por consiguiente, $\text{rango}(B) = r$. Como B es una submatriz de A , es $\text{rango}(B) \leq \text{rango}(A)$, luego

$$r \leq \text{rango}(A).$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN (*). — Si $\dim(L) = r$ y $s > r$, los vectores $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_s}$ son linealmente dependientes, luego

$$\mathbf{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i_s} = \mathbf{0},$$

pero

$$(17) \quad \mathbf{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{i_s} = \sum_{(j_1, \dots, j_s) \in C_{n,s}} \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_s j_1} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix} (\mathbf{u}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_{j_s}) = \mathbf{0},$$

en donde $(j_1, \dots, j_s)$ recorre todas las combinaciones s -arias de orden n y $\mathbf{u}_{j_i}$ es el vector $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ con el uno situado en el lugar j_i . De (17) se deduce que todos los menores de orden s , siendo $s > r$, son nulos, luego $r(A) \leq r$.

Por ser $\dim(L) = r$, entre los vectores $\mathbf{a}_i$ existen r linealmente independientes, luego el producto exterior de dichos vectores es distinto de cero; luego una de sus coordenadas, que es un menor de orden r de la matriz A , es distinto de cero, luego $r(A) \geq r$.

OBSERVACIÓN.—El teorema fundamental puede enunciarse empleando los vectores columnas de la matriz A y la demostración es la misma.

CONSECUENCIAS.—I. *El máximo número de filas (columnas) linealmente independientes entre las filas (columnas) de una matriz es igual a su rango.*

II. *El rango de una matriz es igual al número de sus filas (columnas) $\iff$ Todas sus filas (columnas) son linealmente independientes.*

(*) Esta demostración hace uso del producto exterior de vectores.

III. $|A| \neq 0 \iff$ Todas las filas (columnas) de la matriz cuadrada A son linealmente independientes.

IV. B es la submatriz de A formada por las r primeras filas (columnas) y $\text{rango}(B) = r(A) \iff$ Las filas (columnas) $a_{r+1}, \dots, a_m$ ($a'_{r+1}, \dots, a'_n$) dependen linealmente de las r primeras.

V. Si el rango de las $m - r$ matrices ($n - r$ matrices) que se obtienen añadiendo a la submatriz B , de rango r , de la matriz A formada por las r primeras filas (columnas) cada una de las filas (columnas) restantes es igual a r , el rango de la matriz A es r .

VI. Los vectores $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, n$, forman una base del espacio vectorial n -dimensional $V \iff |A| \neq 0$, siendo A la matriz cuyas filas (columnas) son las coordenadas de los vectores a_i .

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.—La consecuencia V proporciona el siguiente método para el cálculo del rango de una matriz A (9). Como el vector cero depende linealmente de cualquier conjunto de vectores, se prescinde de todas las filas nulas que figuren en la matriz A . Supuesto que en A no existe ya ninguna fila nula, se elige la submatriz

$$(18) \quad A_1 = (a_{11} \dots a_{1n})$$

formada por la primera fila. Se elige un menor de A_1 no nulo, por ejemplo, a_{11} :

$$(19) \quad a_{11} \neq 0.$$

Esto permite escribir:

$$\text{rango}(A_1) = 1.$$

Se considera la submatriz

$$(20) \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

y en ella se elige la submatriz formada por la columna que contiene el elemento (19):

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

Se añaden a la matriz $\bar{A}_2$, sucesivamente, las restantes columnas de la matriz (20) hasta encontrar un menor de segundo orden no nulo. Si todos ellos

fuesen nulos el rango de la matriz A_2 (V) sería uno y la segunda fila dependería linealmente de la primera, luego se podría prescindir de ella para el cálculo del rango y se sustituiría en A_2 la segunda fila por la tercera fila de A. Así se seguiría hasta llegar a una fila de la matriz A tal que la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

poseyese un menor de segundo orden, en el que entrase la primera columna, distinto de cero. Si este menor fuese

$$(21) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

se formaría la matriz que resulta de añadir a la matriz A_2 la fila siguiente:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \end{pmatrix}$$

se forma la submatriz de A_3 con las columnas en que intervienen los elementos de la matriz del menor (21):

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \\ a_{i+11} & a_{i+12} \end{pmatrix}$$

y se añaden sucesivamente a esta matriz las restantes columnas de la matriz A_3 hasta hallar un menor de tercer orden distinto de cero. Así se sigue hasta agotar todas las filas de la matriz A. El orden del último menor no nulo hallado es el rango de la matriz A.

EJERCICIOS:

426. Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

tores $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, \mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$, cuyas coordenadas son los coeficientes de $x_1, \dots, x_n$, respectivamente.

3. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.—1. El sistema (22) tiene solución

$$\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} c_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} c_m \end{pmatrix} = r.$$

2. Si se verifica la igualdad anterior de los rangos y si

$$(28) \quad T = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \dots \dots \dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

el sistema (22) es equivalente al sistema:

$$(29) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{1n} x_n & a_{12} \dots a_{1r} \\ \dots \dots \dots \\ c_r - a_{r,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{rn} x_n & a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix}}{T} \\ \dots \dots \dots \\ x_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,r-1} & c_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{1n} x_n \\ \dots \dots \dots \\ a_{r1} \dots a_{r,r-1} & c_r - a_{r,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{rn} x_n \end{vmatrix}}{T} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.—1. En virtud de la consecuencia IV del teorema fundamental se verifica que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} c_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} c_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{c} \in L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n),$$

y, por el teorema anterior,

$$\mathbf{c} \in L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \Leftrightarrow \text{El sistema (22) tiene solución.}$$

2. a) La relación (28) implica que

$$(30) \quad \text{rango} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} c_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{r1} \dots a_{rn} c_r \end{pmatrix} = r.$$

siempre se verifica que el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada con los términos constantes. Sin embargo, el vector cero, por ser siempre solución de un sistema homogéneo, se considera como solución trivial del mismo.

DEFINICIÓN 2.—Se llama *solución de un sistema homogéneo* a toda solución distinta del vector cero.

4. a) El sistema homogéneo (37) posee solución $\iff r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} < n$.

b) $r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = r < n \iff$ El conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo (37) forman una variedad vectorial lineal de dimensión $n - r$.

DEMOSTRACIÓN.—a) Si $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$, $i = 1, \dots, n$, el sistema (37) se puede escribir en la siguiente forma:

$$(38) \quad x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} = (0, \dots, 0).$$

Si $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ es una solución de (37) distinta del vector cero, será:

$$(39) \quad p_1 \mathbf{a}_1 + \dots + p_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

y la relación (39) expresa que los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes. Recíprocamente, si los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes se verifica una relación de la forma (39) en la que no son nulas todas las p_i , luego el vector $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ es una solución de (37). Ahora bien, en virtud de la consecuencia I del teorema fundamental se verifica que: «Las columnas de la matriz de los coeficientes de (37) son linealmente dependientes» $\iff$ »Rango de la matriz de los coeficientes de (37) menor que el número de incógnitas.«

b) Sea L el conjunto de todas las soluciones (incluido el vector cero) del sistema (37). El conjunto L es una variedad vectorial lineal. En efecto, si $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ y $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ son soluciones de (37), se verifican (39) y

$$(40) \quad q_1 \mathbf{a}_1 + \dots + q_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

De (39) y (40) se deduce que

$$(41) \quad (p_1 + q_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (p_n + q_n) \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

Como

$$(60) \quad r \begin{pmatrix} T_{1,r+1} & \dots & T_{1n} \\ T_{2,r+1} & \dots & T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{r,r+1} & \dots & T_{rn} \\ -T & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -T \end{pmatrix} = n - r,$$

por ser el menor formado por las $n - r$ últimas filas igual a $(-T)^{n-r} \neq 0$, los vectores formados por las columnas de la matriz (60) forman una base de L .

OBSERVACIÓN.—El paso de las ecuaciones explícitas a las implícitas de una variedad vectorial lineal L corresponde a la operación de eliminación de los parámetros de las ecuaciones explícitas y el paso de las ecuaciones implícitas a las explícitas equivale a la resolución del sistema formado por aquéllas. Aparecen, por tanto, las operaciones de eliminación y resolución como inversas una de otra.

EJERCICIOS:

435. Hallar las ecuaciones implícitas de la variedad lineal L definida por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 \\ x_2 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \\ x_3 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ x_4 = -3\lambda_1 + 6\lambda_2 - 2\lambda_3 - 5\lambda_4 \end{cases}$$

436. Hallar las ecuaciones implícitas de la variedad lineal L engendrada por los siguientes vectores:

$$a_1 = (-1, 0, 2, 0, 3), \quad a_2 = (2, 1, 0, 1, -2), \quad a_3 = (1, 1, 2, 1, 1),$$

$$a_4 = (1, 2, 6, 2, 5), \quad a_5 = (0, -1, 1, 0, 0).$$

437. Hallar una base de la variedad lineal:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

438. Eliminar x_3 y x_4 en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

439. Eliminar x_3 y x_4 en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Variedades lineales en el espacio afín. Eliminación en sistemas no homogéneos.

DEFINICIÓN 6.—Se llama *variedad lineal en el espacio afín* al conjunto de todas las matrices $(x_1, \dots, x_n)$, llamadas puntos del espacio afín, que se obtienen dando valores numéricos a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, en el siguiente sistema:

$$(61) \quad \begin{cases} x_1 = a_{11} \lambda_1 + \dots + a_{1r} \lambda_r + c_1 \\ x_2 = a_{21} \lambda_1 + \dots + a_{2r} \lambda_r + c_2 \\ \vdots \\ x_n = a_{n1} \lambda_1 + \dots + a_{nr} \lambda_r + c_n \end{cases}$$

El sistema (61) se puede escribir en forma matricial del siguiente modo:

$$(62) \quad x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + c,$$

siendo

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, \dots, r, \quad c = (c_1, \dots, c_n).$$

Ahora bien, (62) puede ponerse en la siguiente forma:

$$(63) \quad x - c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r,$$

que expresa que el vector $x - c$ depende linealmente de los vectores $a_1, \dots, a_r$, expresión que permite considerar el conjunto de vectores $\{x - c\}$

como una variedad lineal vectorial y aplicar lo visto para estas variedades lineales.

Eliminando las λ_i en (63), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$x - c = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & x_1 - c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & x_n - c_n \end{pmatrix}$$

y si el rango de la primera matriz es s y

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0,$$

la última igualdad de rangos es equivalente a:

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & x_1 - c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & x_s - c_s \\ a_{s+11} & \dots & a_{s+1s} & x_{s+1} - c_{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & x_1 - c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & x_s - c_s \\ a_{n1} & \dots & a_{ns} & x_n - c_n \end{vmatrix} = 0, \end{array} \right.$$

luego el sistema (64) tiene como soluciones todos los puntos de la variedad lineal afín (61) y sólo ellos, por lo que a las ecuaciones (64) se les llama *ecuaciones implícitas de la variedad afín*, cuyas *ecuaciones explícitas* son (61).

Las ecuaciones (64) se pueden escribir en la siguiente forma:

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{11} x_1 + \dots + u_{1n} x_n + u_1 = 0 \\ \dots \\ u_{n-s,1} x_1 + \dots + u_{n-s,n} x_n + u_{n-s} = 0. \end{array} \right.$$

Al paso de las ecuaciones (61) a las (65) se le llama *eliminación de los parámetros* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

DEFINICIÓN 7.—Se llama *dimensión* de la variedad lineal afín L definida por (61), al rango de la matriz de los coeficientes de los parámetros λ_i :

$$\dim(L) = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix}.$$

9. Si (61) son las ecuaciones explícitas de una variedad lineal afín, L , de dimensión s , las ecuaciones (65) son sus ecuaciones implícitas, y se verifica que

$$r \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & & \dots \\ u_{n-s,1} & \dots & u_{n-s,n} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} u_{11}, & \dots, & u_{1n}, & u_1 \\ \dots & & \dots & \dots \\ u_{n-s,1}, & \dots, & u_{n-s,n}, & u_{n-s} \end{pmatrix} = n - s.$$

DEFINICIÓN 8.—Dado el sistema de ecuaciones:

$$(66) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

se dice que las ecuaciones del sistema (66) son *linealmente independientes* cuando

$$(67) \quad r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = m,$$

si los rangos de las matrices (67) son iguales, pero inferiores al número de ecuaciones se dice que las ecuaciones son *linealmente dependientes*.

10. Las ecuaciones (65) son linealmente independientes.

11. Si el sistema (66) es compatible, esto es, si

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = r, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0,$$

se verifica que el conjunto de todas las soluciones de (66) es una variedad lineal afín de dimensión $n - r$, cuyas ecuaciones implícitas son (66) y cuyas ecuaciones explícitas son:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{T_{1b}}{T} - T_{1,r+1} \lambda_1 - \dots - T_{1,n} \lambda_{n-r} \\ x_2 = \frac{T_{2b}}{T} - T_{2,r+1} \lambda_1 - \dots - T_{2,n} \lambda_{n-r} \\ \dots \dots \dots \\ x_r = \frac{T_{rb}}{T} - T_{r,r+1} \lambda_1 - \dots - T_{r,n} \lambda_{n-r} \\ x_{r+1} = T \lambda_1 \\ \dots \dots \dots \\ x_n = T \lambda_{n-r} \end{array} \right.$$

en donde T_{ib} es el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna i -ésima de la matriz T por $(b_1, \dots, b_r)$ y T_{1i} es el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir la columna i -ésima de la matriz de T por $(a_{11}, \dots, a_{r1})$.

Basta aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius.

Como la matriz de los coeficientes de las $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$, en (68) es la opuesta a la matriz (60), resulta que la dimensión de la variedad lineal (68) formada por las soluciones de (66) es $n - r$.

EJERCICIOS:

440. Calcular la dimensión de la variedad lineal afín L .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1 \\ x_2 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2 \\ x_3 = \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 - 5 \\ x_4 = 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4 \end{array} \right.$$

441. Hallar las ecuaciones implícitas de la variedad del ejercicio anterior.

442. ¿Son las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array} \right.$$

las ecuaciones de una variedad lineal afín?

443. Hallar las ecuaciones explícitas de la variedad lineal afín:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$$

444. Calcular la dimensión de la variedad afín:

$$L : \begin{cases} x_1 = 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 + 5 \\ x_2 = \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4 \\ x_3 = -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 - 1 \\ x_4 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3. \end{cases}$$

445. Calcular la dimensión de la variedad lineal afín:

$$L \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 2 \\ 8x_2 - 5x_3 - x_4 - 9x_5 = -3. \end{cases}$$

446. Hallar las ecuaciones implícitas de la variedad del ejercicio 444.

447. Hallar las ecuaciones explícitas de la variedad afín:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 7 = 0 \\ x_1 - 8x_2 - 5x_4 + 30 = 0. \end{cases}$$

448. Probar que la variedad lineal solución del ejercicio anterior es igual a la variedad lineal del enunciado del ejercicio 444.

449. Hallar las ecuaciones explícitas de la variedad lineal del ejercicio 445.

450. Hallar $d(L) + 1$ vectores linealmente independientes que sean solución del sistema del ejercicio 445.

451. Eliminar el mayor número posible de incógnitas en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + 1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

452. Eliminar el máximo número posible de incógnitas en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 1 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

luego si el sistema (70) tiene solución esta solución es única. Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que el sistema (70) tenga solución es, por el teorema de Rouché-Fröbenius, que se verifique (72).

13. Si s tiene el significado de (71) y $r < s$, se pueden eliminar en (66) r incógnitas. Si $T \neq 0$, siendo T el menor de **12**, se pueden eliminar las incógnitas $x_1, \dots, x_r$, y si

$$(73) \quad r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} & b_r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix},$$

se verifica que el sistema que se obtiene al eliminar $(x_1, \dots, x_r)$ en (66) es:

$$(74) \quad r \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1r} & a_{1, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{1n} x_n - b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{s1} \dots a_{sr} & a_{s, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{sn} x_n - b_s \end{pmatrix} = r \Leftrightarrow$$

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{1n} x_n - b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{rn} x_n - b_r \\ a_{r+1, 1} & \dots & a_{r+1, r} & a_{r+1, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{r+1, n} x_n - b_{r+1} \end{array} \right| = 0, \\ \dots \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{1n} x_n - b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{rn} x_n - b_r \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{s, r+1} x_{r+1} + \dots + a_{sn} x_n - b_s \end{array} \right| = 0. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACIÓN.—De (73) y (71) se deduce que el sistema (66) es equivalente al sistema:

$$(76) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{s1} x_1 + \dots + a_{sn} x_n = b_s, \end{cases}$$

y de **12** se deduce que se pueden eliminar las incógnitas $(x_1, \dots, x_r)$ y que el resultado de la eliminación viene dado por (74), o bien por (75).

14. Si se verifica (71) el máximo número de incógnitas que se pueden eliminar en el sistema (66) es igual a $s - 1$ y el resultado de la eliminación es: una única ecuación

EJERCICIOS:

453. Eliminar el máximo número posible de incógnitas en el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 1 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 1 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5 = 0. \end{array} \right.$$

CAPITULO TERCERO

EL ESPACIO EUCLIDEO

§ 1. EL PLANO AFIN

1. La recta afín.—Sea A_1 una recta y V_1 el conjunto de todos los vectores libres (Cap. II, § 1, 2, def. 5) que tienen un representante (Cap. II, § 1, 2, def. 7) en la recta r . Los vectores de V_1 diremos que *pertenecen a* la recta r . Si $\mathbf{u}$ es un vector de V_1 , cualquier otro vector $\mathbf{x}$ de V_1 se puede expresar en la forma (Cap. II, § 1, 4, def. 18):

$$(1) \quad \mathbf{x} = x \mathbf{u}$$

en donde x es el módulo del vector libre $\mathbf{x}$ (Cap. II, § 1, 4, def. 7) respecto del segmento unidad $\bar{u}$ correspondiente a un representante del vector libre $\mathbf{u}$, cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ tienen el mismo sentido (Cap. II, § 1, 4, def. 17) y x es el opuesto al módulo de $\mathbf{x}$ cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$ tienen sentidos opuestos.

EJERCICIOS:

454. Escribir en la forma (1) los vectores $\mathbf{x} = [\overrightarrow{AX}]$, $\mathbf{y} = [\overrightarrow{BY}]$, $\mathbf{z} = [\overrightarrow{CZ}]$, siendo $\mathbf{u} = [\overrightarrow{OU}]$ (fig. 40).

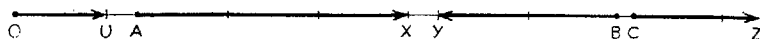


Fig 40.

455. Dibujar representantes de los vectores $\mathbf{x} = -\frac{5}{7} \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \frac{21}{13} \mathbf{u}$.

Entre A_1 y V_1 se puede establecer una correspondencia biunívoca cuando se fija un punto O en la recta, llamado *origen*. En efecto, dado un punto arbitrario X de la recta (fig. 40), se define como imagen de X en dicha corres-

pondencia el vector libre $[\overrightarrow{OX}]$. La correspondencia que asigna como imagen del vector libre $\mathbf{x}$ el extremo del representante $\overrightarrow{OX}$ de $\mathbf{x}$ con origen O es la inversa de la anterior y ambas correspondencias son aplicaciones suprayectivas.

Al vector $\mathbf{x} = [\overrightarrow{OX}]$ correspondiente al punto X le llamaremos *vector de posición del punto X respecto del origen O* .

Llamando φ a la correspondencia:

$$(2) \quad A_1 \xrightarrow{O} V_1,$$

se verifica que

$$(3) \quad \varphi: X \rightarrow \overrightarrow{OX} \rightarrow [\overrightarrow{OX}] = \mathbf{x},$$

$$(4) \quad \varphi^{-1}: \mathbf{x} \rightarrow \overrightarrow{OX} \rightarrow X,$$

CAMBIO DE ORIGEN.—Si se toma otro punto O' como origen, de la definición de adición de vectores libres (Cap. II, § 1, 2, def. 8) se deduce que (fig. 41)

$$(5) \quad [\overrightarrow{OX}] = [\overrightarrow{OO'}] + [\overrightarrow{O'X}],$$

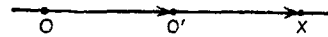


Fig. 41.

luego, si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ son los vectores de posición del punto X respecto de O y O' , respectivamente, y si $\mathbf{a}$ es el vector de posición de O' respecto de O , (5) se puede escribir en la forma:

$$(6) \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{x}'.$$

ABSCISAS EN LA RECTA.—Fijado un origen O en la recta, la correspondencia (2) es una biyección de la recta en la recta vectorial V_1 . Fijado un vector libre $\mathbf{u}$ de V_1 , se puede definir una aplicación ψ de V_1 en K , siendo K el cuerpo correspondiente a los vectores libres, mediante:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi: V_1 \xrightarrow{\mathbf{u}} K, \\ \psi(\mathbf{x}) = x \Leftrightarrow \mathbf{x} = x\mathbf{u}. \end{array} \right.$$

De (Cap. II, § 1, 4, def. 18) se deduce, en virtud de la definición (7), que la

correspondencia ψ es una biyección. La aplicación producto de φ por ψ es una biyección γ :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_1 \\ & \searrow \gamma & \swarrow \psi \\ & K & \end{array}$$

de A_1 en K . Si $x = \gamma(X)$, se dice que x es la *abscisa de X respecto del sistema de referencia $R = \{O; u\}$* .

1. x es la abscisa de X respecto del sistema de referencia $R = \{O; u\}$
 $\iff [\overrightarrow{OX}] = x u$.

En efecto, decir que x es la abscisa de X respecto de R equivale a decir que $x = \gamma(X) = \psi \circ \varphi(X) = \psi([\overrightarrow{OX}]) = \psi(x u)$.

CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA.—Sean $R = \{O; u\}$ y $R^* = \{O^*; u^*\}$ dos sistemas de referencia en la recta A_1 y x y x^* las abscisas del punto X respecto de ambos. En virtud de **1** se verifica:

$$(8) \quad [\overrightarrow{OX}] = x u, \quad [\overrightarrow{O^*X}] = x^* u^*,$$

y si a es la abscisa de O^* respecto de R se verificará:

$$(9) \quad [\overrightarrow{OO^*}] = a u.$$

De (5), (8) y (9) resulta:

$$(10) \quad x u = a u + x^* u^*,$$

y si

$$(11) \quad u^* = b u,$$

se obtiene:

$$(x - a - b x^*) u = 0,$$

de donde:

(12)

$$\boxed{x = a + b x^*}$$

que es la fórmula del cambio de sistema de referencia en la recta.

EJERCICIOS:

456. Las abscisas de A y B respecto del sistema de referencia R son 5 y -3, respectivamente, y respecto del sistema de referencia R* son -2, 4, respectivamente. Hallar la fórmula del cambio de sistema de referencia.

457. La abscisa de O* es 4 y la de O, -1. Hallar la ecuación del cambio de sistema de referencia.

458. La abscisa de O es 2 y las de U, 1 y -5. Hallar la ecuación del cambio de sistema de referencia.

2. El plano afín.—Al conjunto de todos los vectores libres (Cap. II, § 1, 2, def. 5) que poseen un representante en un plano A_2 lo representaremos por V_2 y diremos que están en el plano A_2 , o que pertenecen al plano A_2 .

2. El conjunto V_2 es un subespacio de dimensión dos del espacio vectorial V_3 de los vectores libres.

DEMOSTRACIÓN.— $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2 \iff \overrightarrow{AB} \in \mathbf{x}, \overrightarrow{CD} \in \mathbf{y}; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in A_2$. Si O es un punto de A_2 y $\overrightarrow{OX} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OY} \sim \overrightarrow{CD}$, resulta que $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{y}$ y $\overrightarrow{XY} \in \mathbf{y} - \mathbf{x}$, $\overrightarrow{XY} \in A_2$, luego $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in A_2$. Si $\mathbf{x} \in A_2$ también $k\mathbf{x} \in A_2$ cualquiera que sea el número k de K.

3. $\dim(V_2) = 2$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea O A B (fig. 42) un triángulo de A_2 . Los vectores $\mathbf{u}_1 = [\overrightarrow{OA}]$ y $\mathbf{u}_2 = [\overrightarrow{OB}]$, son linealmente independientes, pues, en caso contrario, uno de ellos, por ejemplo $\mathbf{u}_2$, dependería linealmente del otro $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1$$

y por (Cap. II, § 1, 4, def. 18) los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ tendrían la misma dirección y los puntos O, A, B estarían alineados. $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un sistema de generadores de V_2 . En efecto, $\mathbf{x} \in V_2 \iff \overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OX} \in A_2$ (fig. 42). Las paralelas a O A y O B trazadas por X cortan a las rectas O B y O A en puntos X_2 y X_1 , respectivamente, y se verifica:

$$\mathbf{x} = [\overrightarrow{OX_1}] + [\overrightarrow{OX_2}]$$

$$[\overrightarrow{OX_1}] = x_1 \mathbf{u}_1, \quad [\overrightarrow{OX_2}] = x_2 \mathbf{u}_2.$$

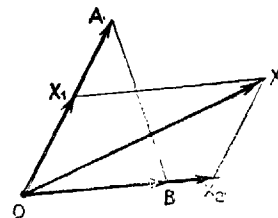


Fig. 42.

de donde :

$$(13) \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2,$$

luego B es un sistema de generadores y como son linealmente independientes, forman una base de V_2 .

Siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base de V_2 , los números (x_1, x_2) de (13) están unívocamente determinados por $\mathbf{x}$, y se llaman *coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de B*. Al espacio vectorial bidimensional V_2 se le llama *plano vectorial*.

CAMBIO DE BASE EN EL PLANO VECTORIAL V_2 .—Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son dos bases de V_2 y $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ son las coordenadas del vector libre $\mathbf{x}$ respecto de B y B', respectivamente, se verifica que

$$(14) \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2.$$

Si las coordenadas de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ respecto de B' son (a_{11}, a_{12}) y (a_{21}, a_{22}) , respectivamente, se verifica que

$$(15) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{u}_2 = a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2. \end{cases}$$

Sustituyendo (15) en (14) resulta :

$$\begin{aligned} y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 &= x_1 (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2) + x_2 (a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2) \\ &= (a_{11} x_1 + a_{21} x_2) \mathbf{v}_1 + (a_{12} x_1 + a_{22} x_2) \mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

y, por ser $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ linealmente independientes,

$$(16) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2, \\ y_2 = a_{12} x_1 + a_{22} x_2, \end{cases}$$

o bien, empleando notación matricial,

$$(17) \quad (y_1, y_2) = (x_1, x_2) A, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Si (b_{11}, b_{12}) y (b_{21}, b_{22}) son las coordenadas de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, respecto de B, se verifica que

$$(18) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 = b_{11} \mathbf{u}_1 + b_{12} \mathbf{u}_2, \\ \mathbf{v}_2 = b_{21} \mathbf{u}_1 + b_{22} \mathbf{u}_2, \end{cases}$$

y sustituyendo en (14):

$$x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 = (b_{11} y_1 + b_{21} y_2) \mathbf{u}_1 + (b_{12} y_1 + b_{22} y_2) \mathbf{u}_2,$$

de donde,

$$(19) \quad \begin{cases} x_1 = b_{11} y_1 + b_{21} y_2 \\ x_2 = b_{12} y_1 + b_{22} y_2 \end{cases}$$

o bien

$$(20) \quad (x_1, x_2) = (y_1, y_2) B; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

De (17) y (20) se deduce que

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2) B A,$$

y como (y_1, y_2) es una matriz arbitraria, $B A = I$, que prueban que $B = A^{-1}$, y, por tanto, que $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.

Las fórmulas (16), (17), (19), (20) se llaman *ecuaciones del cambio de base en el plano vectorial*.

4. Si O es un punto del plano afín A_2 , se puede definir una biyección, φ , de A_2 sobre V_2 :

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi: A_2 \xrightarrow{O} V_2 \\ X \rightarrow \overrightarrow{OX} \rightarrow [\overrightarrow{OX}] = \mathbf{x}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.— φ es una aplicación, ya que $\overrightarrow{OX}$ está unívocamente determinado por X y $[\overrightarrow{OX}]$ lo está por $\overrightarrow{OX}$. Es inyectiva, ya que si $\varphi(Y) = \mathbf{x}$, será $[\overrightarrow{OY}] = [\overrightarrow{OX}]$, de donde (3, § 1, Cap. II) $X = Y$. Es suprayectiva, pues dado $\mathbf{x}$, el vector $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$ es único y $\varphi(X) = \mathbf{x}$. La aplicación inversa de φ es

$$(22) \quad \varphi^{-1}: \mathbf{x} \rightarrow \overrightarrow{OX} \in \mathbf{x} \rightarrow X.$$

Al vector $\mathbf{x} = \varphi(X)$ se le llama *vector de posición del punto X respecto del origen O* .

El conjunto C_2 formado por todas las matrices (x_1, x_2) de dimensión 1×2

con elementos del cuerpo K es (Def. 3, 1, § 1, Cap. II) un espacio vectorial bidimensional, a cuyos vectores llamaremos *vectores algebraicos*.

5. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base del plano vectorial V_2 , existe una biyección ψ , de V_2 en C_2 definida del siguiente modo:

$$(23) \quad \begin{cases} \psi & V_2 \xrightarrow{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)} C_2 \\ \psi & \mathbf{x} \rightarrow x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 \rightarrow (x_1, x_2). \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.—Por ser $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ una base de V_2 , ψ es una aplicación. Es inyectiva, pues si $\psi(\mathbf{y}) = (x_1, x_2)$, es $\mathbf{y} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{x}$. Es suprayectiva, ya que, dado (x_1, x_2) se verifica que $\psi(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2) = (x_1, x_2)$.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *sistema de referencia en el plano afín A_2* , al conjunto $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ formado por un punto O del plano afín, y una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ del plano vectorial V_2 de los vectores libres del plano afín.

De 4 y 5 resulta que:

6. Dado un sistema de referencia $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en el plano afín, queda definida una biyección γ , de A_2 en C_2 , producto de φ por ψ :

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ & \searrow \gamma & \swarrow \psi \\ & C_2 & \end{array}$$

Al vector algebraico $\gamma(X)$, imagen de X en γ , se le llama *vector de las coordenadas cartesianas de X respecto del sistema de referencia R* .

7. (x_1, x_2) es el vector de las coordenadas de X respecto de $R \iff \gamma(X) = (x_1, x_2) \iff$

$$(25) \quad [\overrightarrow{OX}] = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2.$$

DEMOSTRACIÓN.— $\gamma(X) = (x_1, x_2) \iff \psi \varphi(X) = (x_1, x_2) \iff \psi([\overrightarrow{OX}]) = (x_1, x_2) \iff [\overrightarrow{OX}] = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2$.

CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA EN EL PLANO AFÍN A_2 .—Sean $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $R' = \{O'; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dos sistemas de referencia en A_2 . Sean (x_1, x_2) e

(y_1, y_2) los vectores de coordenadas del punto X respecto de R y R' , respectivamente. De (25) se deduce:

$$(26) \quad \begin{cases} [\vec{O'X}] = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2, \\ [\vec{O'X}] = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2. \end{cases}$$

Ahora bien, de la definición de adición de vectores libres (Def. 7, 2, § 1, Cap. II) se deduce que (fig. 43):

$$(27) \quad [\vec{O'X}] = [\vec{O'O}] + [\vec{OX}].$$

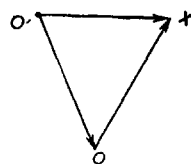


Fig. 43.

Sea (a_1, a_2) el vector de las coordenadas de $[\vec{O'O}]$ respecto de la base $B' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ y sean (a_{11}, a_{12}) y (a_{21}, a_{22}) los vectores de coordenadas de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, respectivamente, respecto de B' :

$$(28) \quad \begin{cases} [\vec{O'O}] = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{u}_1 = a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{u}_2 = a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2. \end{cases}$$

De (26), (27) y (28) se deduce:

$$\begin{aligned} y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 &= (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) + x_1 (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2) + x_2 (a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2) \\ &= (a_1 + a_{11} x_1 + a_{21} x_2) \mathbf{v}_1 + (a_2 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2) \mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

de donde, por la independencia lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$,

$$(29) \quad \begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11} x_1 + a_{21} x_2, \\ y_2 = a_2 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2, \end{cases}$$

que son las fórmulas del cambio de sistema de referencia en el plano afín. Para escribir las ecuaciones (29) en forma matricial conviene añadirles la igualdad $1 = 1$, con lo que se puede escribir:

$$(30) \quad (1, y_1, y_2) = (1, x_1, x_2) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A \neq 0.$$

$$8. |A| \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN.— $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Si fuese $|A| = 0$, sería una de las filas de la matriz del último miembro linealmente dependiente de la otra, p. e., $(a_{21}, a_{22}) = \lambda (a_{11}, a_{12})$, de donde, teniendo presente (28), sería:

$$\mathbf{u}_2 = a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2 = \lambda (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{u}_1,$$

y los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ no serían linealmente independientes.

Por ser $|A| \neq 0$, se puede resolver el sistema de (30) respecto de $(1, x_1, x_2)$, y se obtiene:

$$(81) \quad (1, x_1, x_2) = (1, y_1, y_2) A^{-1}, \quad |A| \neq 0,$$

que son las fórmulas inversas de las (30).

EJERCICIOS:

459. Hallar la fórmula del cambio de sistema de referencia siendo $[\overrightarrow{O' O}] = 2 \mathbf{v}_1 - 3 \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_1 = 4 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_2 = 3 \mathbf{v}_1 + 6 \mathbf{v}_2$.

460. Hallar la fórmula del cambio de sistema de referencia siendo $[\overrightarrow{O O'}] = 4 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1 = 2 \mathbf{u}_1 + 3 \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 5 \mathbf{u}_2$.

461. Hallar las fórmulas del cambio de sistema de referencia siendo $(2, 3)$, $(1, -1)$, $(5, 4)$ las coordenadas de O' , U_1 , U_2 respecto del sistema de referencia $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y siendo $(1, 0)$ y $(0, 1)$ las coordenadas de U_1 y U_2 respecto de $R' = \{O'; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

462. Hallar las fórmulas del cambio de sistema de referencia sabiendo que las coordenadas de los puntos M, N, P respecto de R son $(1, 3)$, $(2, -1)$, $(5, 7)$, respectivamente, y respecto de R' son $(4, -1)$, $(-3, 2)$, $(-1, -2)$, respectivamente.

463. Hallar las fórmulas del cambio de sistema de referencia siendo $(1, 4)$, $(-2, 3)$, $(5, -2)$ las coordenadas de O', A', B' respecto de R y $R' = \{O'; [\overrightarrow{O' A'}] = \mathbf{v}_1, [\overrightarrow{O' B'}] = \mathbf{v}_2\}$.

3. Ecuación de la recta en el plano. Incidencia en el plano.

A. ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.—La biyección $\varphi: A_2 \xrightarrow{O} V_2$, entre el plano A_2 y el plano vectorial V_2 , establecida al fijar un origen O del plano, permite asociar a cada punto X del plano su vector de posición $\mathbf{x} = [\overrightarrow{O X}]$ (fig. 44). Sea la recta r determinada por los puntos A y B ; sea X un punto arbitrario de la recta r , y sean

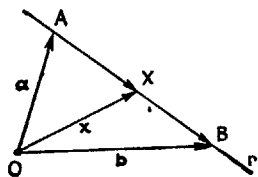


Fig. 44.

$$(82) \quad \mathbf{a} = [\overrightarrow{O A}], \quad \mathbf{b} = [\overrightarrow{O B}] \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = [\overrightarrow{O X}].$$

Se verifican las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} X \in r &\Leftrightarrow [\overrightarrow{AX}] \parallel [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow [\overrightarrow{AX}] = \lambda [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (1 - \lambda) \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \mu + \lambda, \\ \mathbf{x} = \mu \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}. \end{cases} \end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones

$$(33) \quad \mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$(34) \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$(35) \quad \mathbf{x} = (1 - \lambda) \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b},$$

$$(36) \quad \begin{cases} 1 = \mu + \lambda, \\ \mathbf{x} = \mu \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \end{cases}$$

que son condiciones necesarias y suficientes para que el punto X , cuyo vector de posición es $\mathbf{x}$, pertenezca a la recta r determinada por los puntos A y B , cuyos vectores de posición son $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente, se llaman *ecuaciones vectoriales de la recta AB* .

DEFINICIÓN 2.—Se dice que un punto X es *incidente con la recta r* , o que la recta r es *incidente con X* , o que la recta r y el punto X son *incidentes* cuando el punto X pertenece a la recta r , o la recta r pasa por, o contiene al punto X .

Por consiguiente, la ecuación de una recta (33) — (36) expresa la condición necesaria y suficiente de incidencia de un punto X y la recta AB .

El vector $\mathbf{b} - \mathbf{a} = [\overrightarrow{AB}]$ que pertenece a la recta AB se llama *vector de dirección de la recta*. Poniendo $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, la ecuación (34) se puede escribir de la siguiente forma:

$$(37) \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{d},$$

esto es, una recta queda determinada: 1) Por dos de sus puntos, distintos entre sí. 2) Por un punto y su dirección.

B. ECUACIONES PARAMÉTRICAS O EXPLÍCITAS DE LA RECTA.—Sea $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ un sistema de referencia en el plano A_2 . Sean (a_1, a_2) , (b_1, b_2) y

(x_1, x_2) los vectores de coordenadas de A, B y X, respectivamente, respecto de R. Esto significa que:

$$\mathbf{x} = [\overrightarrow{OX}] = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{a} = [\overrightarrow{OA}] = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{b} = [\overrightarrow{OB}] = b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2,$$

luego las ecuaciones (33), (35) y (36) se pueden escribir en la siguiente forma:

$$(38) \quad [x_1 - a_1 - \lambda(b_1 - a_1)] \mathbf{u}_1 + [x_2 - a_2 - \lambda(b_2 - a_2)] \mathbf{u}_2 = 0,$$

$$(39) \quad [x_1 - (1 - \lambda)a_1 - \lambda b_1] \mathbf{u}_1 + [x_2 - (1 - \lambda)a_2 - \lambda b_2] \mathbf{u}_2 = 0,$$

$$(40) \quad \begin{cases} 1 = \mu + \lambda, \\ [x_1 - \mu a_1 - \lambda b_1] \mathbf{u}_1 + [x_2 - \mu a_2 - \lambda b_2] \mathbf{u}_2 = 0. \end{cases}$$

Por ser $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ linealmente independientes, resulta:

$$(41) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \\ x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \end{cases}$$

$$(42) \quad \begin{cases} x_1 = (1 - \lambda)a_1 + \lambda b_1, \\ x_2 = (1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2. \end{cases}$$

$$(43) \quad \begin{cases} 1 = \mu + \lambda, \\ x_1 = \mu a_1 + \lambda b_1, \\ x_2 = \mu a_2 + \lambda b_2, \end{cases}$$

que son las *ecuaciones paramétricas de la recta incidente con los puntos A y B*.

Si $\mathbf{d} = d_1 \mathbf{u}_1 + d_2 \mathbf{u}_2$ es el vector de dirección de la recta, se verifica que (37) da lugar a las ecuaciones

$$(44) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda d_1, \\ x_2 = a_2 + \lambda d_2. \end{cases}$$

EJERCICIOS:

464. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta incidente con los puntos A y B de coordenadas (4, 7) (-3, 2), respectivamente.

415. Ecuaciones paramétricas de la recta incidente con el punto A, de coordenadas (5, -2) y dirección $\mathbf{d}$, siendo (3, 4) las coordenadas de $\mathbf{d}$.

466. Averiguar si son incidentes los puntos A, B, C, de coordenadas (1, -3), (2, 5), (-5, 6) y la recta de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x_1 = 1 - 3\lambda \\ x_2 = 4 + \lambda. \end{cases}$$

467. Averiguar si son incidentes los puntos A y B, de coordenadas (4, 1) y (7, -2) con la recta r :

$$r: \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ x_1 = 2\lambda - 3\mu \\ x_2 = \lambda + 4\mu. \end{cases}$$

468. Averiguar si las rectas r y s tienen la misma dirección, esto es, si son paralelas:

$$r: \begin{cases} x_1 = 5 - 2\lambda \\ x_2 = -4 + 3\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x_1 = 1 + 4\lambda \\ x_2 = 2 - 6\lambda. \end{cases}$$

469. Escribir las ecuaciones de la recta s incidente con el punto A de coordenadas (5, -3) y paralela a la recta r del ejercicio 466.

470. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta s incidente con el punto A = (4, -7) y paralela a la recta r del ejercicio 467.

471. Averiguar si la recta r del ejercicio 467 es paralela a la recta t :

$$t: \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ x_1 = 6\lambda + \mu \\ x_2 = 2\lambda + 5\mu. \end{cases}$$

472. Hallar los puntos incidentes con las rectas r , del ejercicio 466, y s , del ejercicio 468.

473. Hallar los puntos incidentes con las rectas r y u , siendo r la recta del ejercicio 467 y u la siguiente:

$$u: \begin{cases} 1 = \lambda' + \mu' \\ x_1 = \lambda' + 5\mu' \\ x_2 = \lambda' - \mu'. \end{cases}$$

4. Ecuación implícita de una recta. Incidencia en el plano.—Sea la recta r de ecuaciones paramétricas (41). Se verifican las siguientes equivalencias:

El punto (x_1, x_2) es incidente con $r \iff$ El sistema (41), respecto de la incógnita λ , tiene solución

$$\iff r \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

por ser A y B puntos distintos y, por tanto, $r \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 1$. Resulta, por tanto, que:

$$9. \text{ El punto } (x_1, x_2) \text{ es incidente con la recta } r \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En virtud de 9, se dice que

$$(45) \quad \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación implícita de la recta incidente con los puntos distintos A y B. La ecuación (45) es equivalente a

$$(46) \quad (b_2 - a_2)(x_1 - a_1) - (b_1 - a_1)(x_2 - a_2) = 0.$$

Si $b_1 - a_1 \neq 0$ y $b_2 - a_2 \neq 0$, la ecuación (46) es equivalente a

$$(47) \quad \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}.$$

No obstante, se admite que (47) es siempre equivalente a (46) mediante el convenio de que si uno de los denominadores es cero la ecuación (47) es una expresión simbólica de la ecuación que se obtiene al igualar a cero el numerador correspondiente.

De modo análogo se procede a partir de las ecuaciones paramétricas (43). Si A y B son dos puntos distintos se verifica que

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 2,$$

y se obtienen las siguientes equivalencias:

El punto (x_1, x_2) es incidente con la recta r de ecuaciones (43) $\Leftrightarrow$ El sistema (43) es compatible respecto de las incógnitas (μ, λ)

$$\Leftrightarrow 2 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Por consiguiente:

$$10. \text{ El punto } (x_1, x_2) \text{ es incidente con la recta } A B \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En virtud de 10 se verifica que

$$(48) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

es la ecuación implícita de la recta $A B$.

Se puede decir, más brevemente, que la ecuación (45) de la recta $A B$ se obtiene eliminando el parámetro λ en las ecuaciones (41) y que la ecuación (48) se obtiene eliminando los parámetros λ y μ en las ecuaciones (43).

La ecuación (48) puede escribirse en la siguiente forma:

$$(49) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0.$$

Dada una ecuación de la forma (49), ¿es siempre la ecuación de una recta?

11. Si $r(u_1, u_2) = 1$, la ecuación (49) es ecuación de una recta. Si $r(u_1, u_2) = 0$, $r(u_0, u_1, u_2) = 1$, la ecuación (49) representa al conjunto vacío. Si $r(u_0, u_1, u_2) = 0$, la ecuación (49) representa todo el plano.

DEMOSTRACIÓN.—a) $r(u_1, u_2) = 1$. Sea, p. e., $u_2 \neq 0$. De esta hipótesis se deducen las siguientes equivalencias:

$$u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \sim x_2 = -\frac{u_0}{u_2} - \frac{u_1}{u_2} x_1$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\frac{u_0}{u_2} - \frac{u_1}{u_2} \lambda \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\frac{u_0}{u_2} + \left(-\frac{u_0 + u_1}{u_2} + \frac{u_0}{u_2} \right) \lambda \end{array} \right.$$

y las últimas ecuaciones son las de la recta incidente con los puntos A y B de coordenadas $\left(0, -\frac{u_0}{u_2}\right)$ y $\left(1, -\frac{u_0 + u_1}{u_2}\right)$, respectivamente.

b)

$$r(u_1, u_2) = 0, \quad r(u_0, u_1, u_2) = 1 \Rightarrow$$

$$u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \sim u_0 + 0 x_1 + 0 x_2 = 0, \quad u_0 \neq 0,$$

que no posee solución.

c)

$$r(u_0, u_1, u_2) = 0 \Rightarrow u_0 + u_1 x_2 + u_2 x_1 = 0 \sim 0 + 0 x_1 + 0 x_2 = 0,$$

que tiene como solución cualquier punto del plano.

Sea $R = \{O; u_1, u_2\}$ el sistema de referencia del plano. Sean $\overrightarrow{OU_1}$ y $\overrightarrow{OU_2}$ los representantes de u_1 y u_2 con origen O (fig. 45). El punto O se ha llamado ya origen del plano afín, u *origen del sistema de referencia* R . Las rectas OU_1 y OU_2 se llaman *ejes de coordenadas cartesianas*; al primero se le designa con el nombre de *eje x_1* y al segundo *eje x_2* .

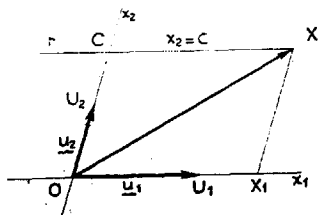


Fig. 45.

a) El eje x_1 tiene por ecuación:

$$(50) \quad x_2 = 0.$$

b) El eje x_2 tiene por ecuación:

$$(51) \quad x_1 = 0.$$

c) Las rectas paralelas al eje x_1 tienen por ecuación:

$$(52) \quad x_2 = c.$$

d) Las rectas paralelas al eje x_2 tienen por ecuación:

$$(53) \quad x_1 = c.$$

e) Las rectas incidentes con el origen de coordenadas tienen por ecuación:

$$(54) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0.$$

f) Todas las rectas no paralelas (o coincidentes) con el eje x_2 tienen una ecuación de la siguiente forma:

$$(55) \quad x_2 = m x_1 + n.$$

DEMOSTRACIÓN.—a) $X \in x_1 \iff [\overrightarrow{OX}] \parallel u_1 \iff [\overrightarrow{OX}] = x_1 u_1$. Si (x_1, x_2) son las coordenadas de X , resulta que la última igualdad es equivalente con $x_2 = 0$.

b) Análogo a a).

c) Si r es una paralela al eje x_1 , y X es un punto de coordenadas (x_1, x_2) , se verifica que

$$X \in r \Leftrightarrow [\overrightarrow{OX}] = x_1 u_1 + c u_2 \Leftrightarrow x_2 = c.$$

d) Análogo a c).

e) La recta (49) incidente con el origen $\Leftrightarrow u_0 + u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 = 0$.

f) Si r es una recta no paralela ni coincidente con el eje x_2 , se verificará, en virtud de d), que el coeficiente de x_2 será no nulo, luego, si $u_2 \neq 0$ en (49), se podrá escribir (49) en la forma equivalente (55), siendo

$$n = -\frac{u_0}{u_2}, \quad m = -\frac{u_1}{u_2}.$$

12. INCIDENCIA DE PUNTO Y RECTA.—De la definición de ecuación de una recta se deduce que la condición necesaria y suficiente para que el punto $P = (p_1, p_2)$ sea incidente con la recta (49) es que:

$$(56) \quad u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 = 0.$$

EJERCICIOS:

474. Averiguar si los puntos $P = (2, 5)$, $Q = (2, 2)$, $R = (6, 5)$ son incidentes con la recta

$$2 + 3x_1 - 4x_2 = 0.$$

475. Escribir las ecuaciones de las rectas r y s paralelas a los ejes x_1 y x_2 , respectivamente, e incidentes con el punto $(-3, 4)$.

476. Escribir la ecuación de la recta que es incidente con el origen de coordenadas y con el punto $A = (2, 5)$.

13. RECTA GENERAL DEL PLANO.—Si en la ecuación (49) se consideran las letras u_0, u_1, u_2 como variables independientes, la ecuación (49) se llama *ecuación de la recta general del plano*. Si entre las variables u_0, u_1, u_2 se define una relación, se dice que se ha establecido una *especialización* de la recta general (49).

EJERCICIOS:

477. ¿Qué representa la especialización de la recta general (49) correspondiente a la relación $u_2 = 0$?

478. ¿Qué representa la especialización de la recta general (49) correspondiente a la relación $u_0 = 0$?

479. ¿Qué representa la especialización de la recta general (49) correspondiente a la relación $u_0 = 0, u_1 = 0$?

480. Hallar la especialización de la recta general (49) correspondiente a la relación $u_0 - u_1 + u_2 = 0$.

481. Hallar la especialización de la recta general (49) correspondiente a la relación:

$$\begin{cases} u_0 + 2u_1 - u_2 = 0. \\ -u_0 + u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases}$$

14. Haz lineal de rectas. Se llama *haz lineal de rectas*, o simplemente *haz de rectas*, el conjunto de todas las rectas del plano incidentes con un punto $P = (p_1, p_2)$, llamado *base* del haz, *centro* del haz o *vértice* del haz.

Sea la recta general del plano (49) (recuérdese que decir que (49) es la recta general del plano equivale a decir que u_0, u_1, u_2 son variables independientes, o indeterminadas). La condición de incidencia de (49) y el punto P es

$$(57) \quad u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 = 0.$$

(Obsérvese que la ecuación (57) es distinta de la ecuación (56), ya que en aquella u_0, u_1, u_2 representan números y en ésta representan variables.) Por consiguiente, la ecuación del haz de rectas de base P es:

$$(58) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0, \\ u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 = 0, \end{cases} \sim u_1 (x_1 - p_1) + u_2 (x_2 - p_2) = 0.$$

En la última ecuación (58), u_1 y u_2 son variables independientes.

EJERCICIO:

482. Hallar las ecuaciones de los haces de rectas de bases $O = (0, 0)$ y $P = (3, -4)$.

15. Recta incidente con dos puntos. La condición necesaria y suficiente para que una recta sea incidente con los puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ es que pertenezca a los dos haces de rectas de bases P y Q ; luego, para hallar su ecuación bastará especializar la ecuación general (49) por la relación que exprese que la recta pertenece a dichos haces, luego la ecuación de la recta PQ será:

$$(59) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0, \\ u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 = 0, \\ u_0 + u_1 q_1 + u_2 q_2 = 0, \end{cases} \sim \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación (59) se acostumbra a escribir también del siguiente modo:

$$(60) \quad \frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2}$$

5. Intersección en el plano.

A. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO.—Sean las rectas:

$$(61) \quad \begin{cases} r: & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \\ s: & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0. \end{cases}$$

(Obsérvese que al decir que (61) son las ecuaciones de dos rectas se expresa que $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ son números dados y que $r(a_1, a_2) = r(b_1, b_2) = 1$.)

Vamos a hallar todos los puntos incidentes con ambas rectas. En virtud de 4, esto equivale a resolver el sistema (61). Sea

$$(62) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

$$\text{I. } r(A) = r(B) = 2. \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El teorema de Rouché-Fröbenius establece que existe un único punto incidente con r y s . Las rectas se dice que *se cortan*. El punto incidente con ambas se llama *punto de intersección de las rectas* y sus coordenadas son:

$$(63) \quad x_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{II. } r(A) = 1, r(B) = 2. \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

El sistema no tiene solución, luego no existe ningún punto incidente con ambas rectas y éstas se llaman *paralelas*. Por consiguiente, las condiciones

de paralelismo son las anteriores, que se acostumbra a escribir del siguiente modo:

$$(64) \quad \frac{a_0}{b_0} \mp \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\text{III. } r(A) = r(B) = 1. \iff \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Por ser $r(B) = 1$ las filas de B son proporcionales:

$$(b_0, b_1, b_2) = t(a_0, a_1, a_2).$$

luego la ecuación de la recta s es equivalente a la de la recta r , y ambas rectas *coinciden*. La condición de coincidencia de dos rectas se suele expresar del siguiente modo:

$$(65) \quad \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

B. HAZ DE RECTAS PARALELAS.—Se llama *haz de rectas paralelas* al conjunto de todas las rectas del plano paralelas a una recta dada. Sea la recta r (61). Para hallar todas las rectas paralelas a r tomaremos la recta general (49) y la especializaremos mediante la relación que exprese que es paralela a la recta r . Se obtiene, por tanto, como ecuación del haz de rectas paralelas a la recta r :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \\ a_2 u_1 - a_1 u_2 = 0 \end{cases} \sim u_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

en donde a_1 y a_2 son números y u_0 es una variable.

EJERCICIOS:

483. Hallar el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2 - 3x_1 + x_2 = 0, \\ 1 + 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

484. Averiguar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r: 3 - x_1 + 2x_2 = 0$$

$$s: 1 + 2x_1 - 4x_2 = 0.$$

485. Demostrar que la condición n. y s. de paralelismo de las rectas

$$r: x_2 = m x_1 + n$$

$$s: x_2 = p x_1 + q$$

es que $m = p$, $n \neq q$.

486. Hallar la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta

$$r: 4 + 3x_1 - 5x_2 = 0.$$

487. Hallar la ecuación de la recta incidente con el punto $P = (p_1, p_2)$ y paralela a la recta r del ejercicio 484.

C. POSICIONES RELATIVAS DE TRES RECTAS.—Sean las rectas:

$$(66) \quad \begin{cases} r: & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \\ s: & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0, \\ t: & c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0. \end{cases}$$

Los puntos comunes a las tres rectas son las soluciones del sistema (66). Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

I. $r(A) = 2$, $r(B) = 3 \iff |B| \neq 0$.

El sistema (66) no tiene solución, luego no existe ningún punto común a las tres rectas.

$$a) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En este caso, en virtud de I, A, se verifica que las rectas r , s y t se cortan cortan dos a dos (fig. 46 a).

$$b) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En este caso $r \parallel s$ y las rectas tienen la posición de la figura 46 b).

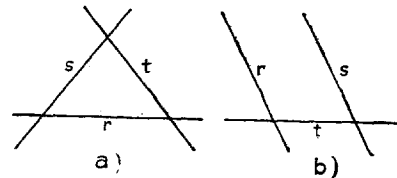


Fig. 46.

II. $r(A) = r(B) = 2 \iff |B| = 0$, $r(A) = 2$.

El sistema (66) tiene solución única, luego las tres rectas son incidentes con el mismo punto (fig. 47).

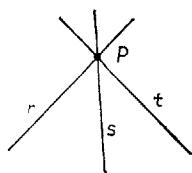


Fig. 47.

Si, por ejemplo, es $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, la tercera fila de la matriz B depende linealmente de las otras dos:

$$(67) \quad (c_0, c_1, c_2) = \lambda (a_0, a_1, a_2) + \mu (b_0, b_1, b_2)$$

de donde:

$$(68) \quad t: \quad c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = \lambda (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) + \mu (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2) = 0,$$

esto es, la ecuación de t depende linealmente de la ecuación de las rectas r y s . Recíprocamente, si las rectas r y s son secantes y la ecuación de la recta t depende linealmente de la ecuación de las rectas r y s , se verifica que $r(A) = r(B) = 2$. Por consiguiente, *la condición necesaria y suficiente para que una recta pertenezca al haz determinado por otras dos, r y s , que se cortan, es que su ecuación dependa linealmente de las ecuaciones de r y s* . En virtud de esta proposición, la ecuación (68), cuando en ella se consideran a λ y μ como variables independientes, es la ecuación del haz de rectas determinado por las rectas secantes r y s .

III. $r(A) = 1, r(B) = 2$.

El sistema (66) no tiene solución, luego no existe ningún punto incidente con las tres rectas.

$$a) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En este caso las rectas son distintas dos a dos y paralelas entre sí (figura 48 a). Por ser $r(B) = 2$, una cualquiera de ellas, por ejemplo la t , depende linealmente de las otras dos, esto es, se verifica la relación (68). Como en el caso anterior, resulta que si en (68) se consideran λ y μ como variables independientes, (68) es la ecuación del haz de rectas paralelas determinado por las rectas paralelas r y s .

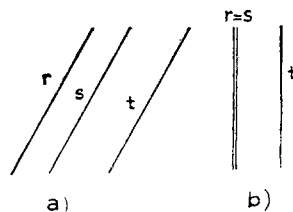


Fig. 48.

$$b) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En este caso las rectas r y s coinciden y son paralelas a la recta t (figura 48 b).

IV. $r(A) = r(B) = 1$.

Las tres rectas coinciden.

EJERCICIOS:

488. Estudiar las pasiciones relativas de las siguientes rectas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} r: 1 - 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ s: 4 + x_1 + x_2 = 0 \\ t: -1 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right. & \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} r: 4 + x_1 - 2x_2 = 0 \\ s: 1 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ t: -2 + 3x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right. \\ \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} r: 1 - x_1 + x_2 = 0 \\ s: -2 + 3x_1 - x_2 = 0 \\ t: -1 + 3x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right. & \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} r: 2 + 3x_1 - x_2 = 0 \\ s: -3 - 6x_1 + 2x_2 = 0 \\ t: 1 + 9x_1 - 3x_2 = 0 \end{array} \right. \\ \\ \text{e) } \left\{ \begin{array}{l} r: 5 + 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ s: 1 - 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ t: -3 + 6x_1 - 9x_2 = 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

489. Escribir la ecuación del haz de rectas determinado por las rectas r y s del ejercicio 488 a).

490. Escribir la ecuación de la recta incidente con el punto de intersección de las rectas s y t del ejercicio 488 a) y que pasa por el origen de coordenadas.

491. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s del ejercicio 488 a) y es paralela a la recta t de 488 a).

492. Escribir la ecuación de la recta paralela a la recta r del ejercicio 488 a) e incidente con el punto $P = (4, 1)$.

493. Ecuación de la recta incidente con el punto de intersección de las rectas r y t de 488 (a) y con el punto de intersección de las rectas s y t del 488 b).

6. Semiplanos. Figuras convexas.—Sea $R = \{O; u_1, u_2\}$ un sistema de referencia en el plano (fig. 49). Sean a y b los vectores de posición de los puntos A y B , respectivamente. Se ha visto (§ 1, 3) que la ecuación de la recta AB es

$$(69) \quad \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \end{cases}$$

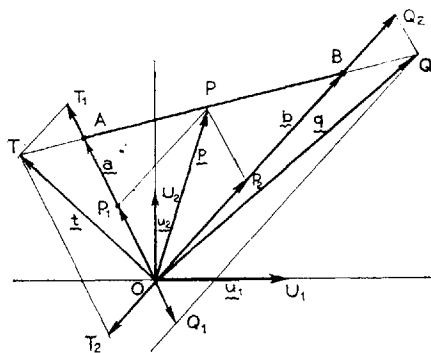


Fig. 49.

Sea P un punto del segmento $[AB]$. Trazando por P paralelas a las rec-

tas $O A$ y $O B$ se obtienen los vectores $\overrightarrow{OP_2}$ y $\overrightarrow{OP_1}$, respectivamente, y se verifica:

$$[\overrightarrow{OP}] = [\overrightarrow{OP_1}] + [\overrightarrow{OP_2}], \quad [\overrightarrow{OP_1}] = \lambda_1 \mathbf{a}, \quad [\overrightarrow{OP_2}] = \mu_1 \mathbf{b}, \quad \lambda_1 > 0, \mu_1 > 0.$$

Por consiguiente, definiremos:

Segmento de extremos A, B , que se representará por $[A, B]$, es el conjunto de todos los puntos X cuyos vectores de posición, $\mathbf{x}$, vienen dados por las siguientes relaciones:

$$(70) \quad \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0. \end{cases}$$

Sea Q un punto arbitrario de la semirrecta de origen A que contiene a B . Trazando por Q paralelas a las rectas OA y OB , respectivamente, se obtienen los vectores (fig. 49) $\overrightarrow{OQ_2}$ y $\overrightarrow{OQ_1}$, respectivamente. Se verifica:

$$[\overrightarrow{OQ}] = [\overrightarrow{OQ_1}] + [\overrightarrow{OQ_2}], \quad [\overrightarrow{OQ_1}] = \lambda_2 \mathbf{a}, \quad [\overrightarrow{OQ_2}] = \mu_2 \mathbf{b}, \quad \mu_2 > 0.$$

Esto induce a la siguiente definición:

Se llama *semirrecta de origen A que contiene a B* , y se representará por $\uparrow AB$, al conjunto de todos los puntos X cuyos vectores de posición, $\mathbf{x}$, verifican las siguientes relaciones:

$$(71) \quad 1 = \lambda + \mu, \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \mu \geq 0.$$

Sea T un punto de la semirrecta opuesta a la semirrecta $\uparrow AB$, que designaremos por $\downarrow AB$. Trazando por T paralelas a las rectas OA y OB se obtiene (fig. 49):

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_1}] + [\overrightarrow{OT_2}], \quad [\overrightarrow{OT_1}] = \lambda_3 \mathbf{a}, \quad [\overrightarrow{OT_2}] = \mu_3 \mathbf{b}, \quad \mu_3 \leq 0.$$

Se llama *semirrecta de origen A que no contiene a B* , y se representa por $\downarrow AB$, al conjunto de todos los puntos X cuyos vectores de posición, $\mathbf{x}$, verifican las siguientes relaciones:

$$(72) \quad 1 = \lambda + \mu, \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \mu \leq 0.$$

Sea la recta (fig. 50):

$$(73) \quad a: a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

y sean M, N y P tres puntos del plano y $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{p}$ sus respectivos vectores de posición. La ecuación de la recta MN es:

$$(74) \quad 1 = \lambda + \mu, \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{m} + \mu \mathbf{n}.$$

El punto de intersección de a y MN viene dado por

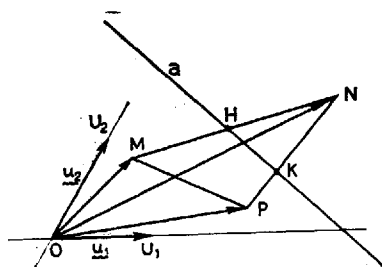


Fig. 50,

$$a_0 + a_1 (\lambda m_1 + \mu n_1) + a_2 (\lambda m_2 + \mu n_2) = 0, \quad 1 = \lambda + \mu,$$

$$\lambda (a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2) + \mu (a_0 + a_1 n_1 + a_2 n_2) = 0, \quad 1 = \lambda + \mu.$$

de donde (70):

1. El punto de intersección de MN y a pertenece al segmento [MN] $\iff \text{signo}(a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2) \neq \text{signo}(a_0 + a_1 n_1 + a_2 n_2)$.

Si el punto de intersección de la recta XY con la recta a no pertenece al segmento [XY] se dice que los puntos X e Y pertenecen a mismo semiplano de borde a ; en caso contrario se dice que X e Y pertenecen a distinto semiplano. La propiedad de pertenecer a un mismo semiplano es una relación de igualdad, que produce una partición de los puntos del plano en dos conjuntos, llamados *semiplanos*; la recta a se llama *borde* de los dos semiplanos.

2. Si una recta a corta a un lado MN de un triángulo MNP (fig. 50) y no es incidente con ningún vértice, corta a otro, y sólo otro, lado.

3. Los dos semiplanos de borde a (73) vienen definidos por las relaciones:

$$(75) \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq 0, \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq 0,$$

respectivamente.

Se llama *región angular convexa* a la intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan en un punto O, llamado *vértice de la región angular*; las semirrectas pertenecientes a los bordes de los dos semiplanos y a la región angular convexa se llaman *lados* de ésta. El conjunto complementario de una

región angular convexa más sus lados se llama *región angular cóncava* y éstos se llaman *lados* de la región angular cóncava.

EJERCICIOS:

494. Escribir las relaciones que definen al segmento $[AB]$, a la semirrecta $\uparrow AB$ y a la semirrecta $\downarrow AB$, siendo $A = (5, -3)$, $B = (4, 1)$.

495. Escribir las relaciones que determinan al semiplano de borde a que contiene al origen de coordenadas, siendo

$$a: -4 + 2x_1 - 5x_2 = 0.$$

496. Relación que determina al semiplano de borde a (ej. 495) que contiene al punto $(7, -1)$.

497. Relación que determina al semiplano de borde b que contiene al semieje positivo de las x_2 , siendo

$$b: 4x_1 - 3x_2 = 0.$$

498. Relaciones que definen la región angular convexa cuyos lados están en las rectas a (ej. 495) y b (ej. 497) y contiene al punto $P = (-2, -1)$.

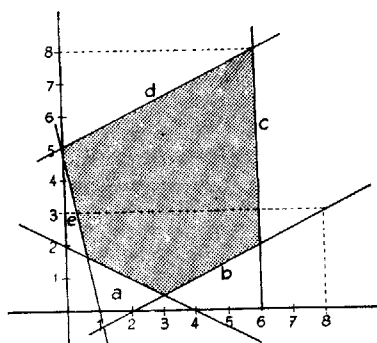


Fig 51.

499. Relaciones que definen la región angular cóncava complementaria de la región del ejercicio anterior.

500. Relaciones que definen los lados de la región del ejercicio 498.

501. Relaciones que definen las tres regiones angulares del triángulo ABC , siendo $A = (1, 0)$, $B = (3, 4)$, $C = (0, 2)$.

502. Relaciones que definen al triángulo de vértices ABC (ej. 501).

503. Coordenadas del baricentro del triángulo ABC (ej. 501) y averiguar en qué región se halla dicho punto.

504. Representar gráficamente la región del plano definida por el conjunto de todas las

relaciones siguientes: a) $-4 + x_1 - 2x_2 \leq 0$, b) $7 - x_1 - x_2 \geq 0$, c) $-30 + 3x_1 + 5x_2 \leq 0$, d) $24 + 8x_1 - 3x_2 \geq 0$, e) $1 + x_1 + x_2 \geq 0$.

505. Hallar los vértices del polígono convexo representado por las inecuaciones del ejercicio anterior sin hacer uso de la representación gráfica.

506. Hallar las inecuaciones de la región convexa representadas en el gráfico de la figura 51.

DEFINICIÓN 1.—Un conjunto C se llama *convexo* cuando $\forall X, Y \in C$ se verifica que $[X Y] \in C$. Se llama *conjunto convexo engendrado por los puntos* $A_1 = (a_{11}, a_{12}), i = 1, \dots, n$, y lo representaremos por $C(A_1, \dots, A_n)$, al conjunto intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a todos los puntos $A_1, \dots, A_n$:

$$C(A_1, \dots, A_n) = \bigcap_{\{A_1, \dots, A_n\} \subset C} C$$

Se verifica que

$$(76) \quad C(A_1, \dots, A_n) = \{X \mid \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n, \\ 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n\},$$

en donde $\mathbf{x}$ es el vector de posición correspondiente al punto X y $\mathbf{a}_i$ es el vector de posición correspondiente al punto $A_i, i = 1, \dots, n$.

4. $C(A_1, \dots, A_n)$ es un conjunto de puntos convexo.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de (def. 26, 5, § 2, cap. I), habrá que probar que si $X, Y \in C(A_1, \dots, A_n)$, se verifica que $[X Y] \subset C(A_1, \dots, A_n)$. En efecto, sea

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n, \quad 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{y} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_n \mathbf{a}_n, \quad 1 = \mu_1 + \dots + \mu_n, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

Si $Z \in [X Y]$, será:

$$\mathbf{z} = v \mathbf{x} + \rho \mathbf{y}, \quad 1 = v + \rho, \quad v, \rho \geq 0,$$

luego:

$$\mathbf{z} = (v \lambda_1 + \rho \mu_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (v \lambda_n + \rho \mu_n) \mathbf{a}_n,$$

y

$$(v \lambda_1 + \rho \mu_1) + \dots + (v \lambda_n + \rho \mu_n) = v (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) + \rho (\mu_1 + \dots + \mu_n) = v + \rho = 1,$$

$$v \lambda_1 + \rho \mu_1 \geq 0, \dots, v \lambda_n + \rho \mu_n \geq 0,$$

lo que prueba que $Z \in C(A_1, \dots, A_n)$.

507. Hallar las relaciones explícitas de la figura convexa $C(A, B, C)$, llamada triángulo de vértices A, B, C , siendo $A = (1, -2)$, $B = (3, 5)$, $C = (-1, 4)$.
508. Hallar las relaciones implícitas del triángulo del ejercicio anterior.

509. A partir de las relaciones explícitas del triángulo ABC del ejercicio 507, calcular las coordenadas de sus vértices. Idem a partir de las relaciones implícitas del ejercicio 508.

510. Hallar las relaciones explícitas del conjunto convexo $C(A, B, C, D)$, siendo $A = (1, -2)$, $B = (3, 5)$, $C = (-1, 4)$, $D = \left(\frac{9}{10}, \frac{29}{20}\right)$ y hallar las coordenadas de sus vértices.

511. Hallar las relaciones implícitas del conjunto convexo del ejercicio anterior.

512. Hallar las relaciones explícitas del conjunto convexo del ejercicio 504.

Sea el conjunto convexo $C(A_1, \dots, A_n)$, definido por las relaciones explícitas (78). Los bordes de los semiplanos π_α cuya intersección es el conjunto C están contenidos en el conjunto de rectas $A_i A_j$; $i, j = 1, \dots, n$. Para que la recta $A_i A_j$ sea borde de uno de dichos semiplanos es necesario y suficiente que los restantes puntos $A_1, \dots, A_n$ se hallen todos en el mismo semiplano respecto de dicha recta. Ahora bien, la ecuación de la recta $A_i A_j$ es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_{1i} & a_{1j} \\ x_2 & a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} = 0,$$

luego:

$$(80) \quad A_i A_j \text{ es borde de un semiplano } \pi_\alpha \Leftrightarrow \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{1k} & a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2k} & a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} = \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{1l} & a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2l} & a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$$

$$\forall l, k = 1, \dots, n,$$

conviniendo en atribuir al cero cualquiera de los signos $+$ ó $-$.

Emplearemos la siguiente notación:

$$(81) \quad |A_k A_i A_j| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{1k} & a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2k} & a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}.$$

De (80) se deduce el siguiente proceso para obtener las relaciones implícitas de (78) y hallar sus vértices:

a) Se calculan los signos de todos los determinantes $|A_i A_j A_k|$, en donde (i, j, k) recorre el conjunto de todas las combinaciones ternarias de los números $(1, \dots, n)$.

b) Mediante los signos de los determinantes anteriores se pueden escribir inmediatamente los signos de todos los determinantes $|A_1 A_2 A_i|$, $i = 3, \dots, n$. Si todos ellos son iguales, la recta $A_1 A_2$ es borde de uno de los semiplanos buscados, en caso contrario no lo es, y se pasa a ver los signos de los números $|A_1 A_3 A_i|$. Si ninguna de las rectas $A_1 A_i$ fuese borde, el punto A_1 sería un punto interior de $\mathbb{C}$ y se pasaría al punto A_2 . Así se sigue hasta obtener una recta, que supondremos sea la $A_1 A_2$, que sea borde de un semiplano que define a $\mathbb{C}$. Si en la recta $A_1 A_2$ no hay ningún otro punto del conjunto $\{A_1, \dots, A_n\}$, los puntos A_1 y A_2 serán vértices de $\mathbb{C}$. En caso contrario se hallan los extremos del segmento $[A_i A_j]$ que contenga en su interior todos los generadores de $\mathbb{C}$ que pertenecen a la recta $A_1 A_2$ y dichos puntos serán los vértices situados en dicha recta. Supongamos que los vértices sean A_1 y A_2 .

c) Hallados dos vértices, se toma uno de ellos, p. e., A_2 , y se repite con él el mismo proceso que con A_1 . En este caso es seguro que una de las rectas $A_1 A_i$ será borde. Suponiendo que sea la recta $A_2 A_3$, se repite con A_3 el mismo proceso, hasta llegar al vértice inicial A_1 .

EJERCICIOS:

513. Hallar los lados del borde del conjunto convexo $\mathbb{C}(A_1, \dots, A_5)$, siendo $A_1 = (1, 2)$, $A_2 = (3, 0)$, $A_3 = (2, 3)$, $A_4 = (4, 1)$, $A_5 = (0, 2)$.

514. Hallar las relaciones implícitas del polígono del ejercicio anterior.

515. Hallar las relaciones paramétricas del polígono del ejercicio 513.

516. Dado el conjunto convexo $\mathbb{C}$, definido por las relaciones implícitas:

$$x_1 + x_2 - 3 \geq 0, \quad x_1 + 3x_2 + 1 \geq 0, \quad 5x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \quad -2x_1 + x_2 + 1 \geq 0,$$

hallar, si existen, sus relaciones explícitas.

517. Dado el conjunto convexo $\mathbb{C}$ definido por las siguientes relaciones implícitas:

$$a) \quad -4x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, \quad b) \quad x_1 + x_2 + 2 \geq 0, \quad c) \quad 4x_1 - 5x_2 - 20 \leq 0,$$

$$d) \quad 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \quad e) \quad 4x_1 + 3x_2 - 24 \leq 0,$$

hallar las relaciones explícitas.

7. Orientación del plano afín.—Supondremos ahora que el cuerpo base del espacio afín es el cuerpo de los números reales o un subcuerpo de él.

Se llama *triángulo orientado* a un triángulo cuyos vértices se dan en un cierto orden. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos orientados del plano

afín. Si $(A B C)$ y $(A' B' C')$ son dos triángulos orientados, y $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ un sistema de referencia del plano afín, se dice que $(A B C)$ está relacionado en la relación R con $(A' B' C')$ cuando se verifica:

$$(82) \quad (A B C) R (A' B' C') \Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix},$$

siendo (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , (a'_1, a'_2) , (b'_1, b'_2) , (c'_1, c'_2) las coordenadas de A, B, C, A', B', C' , respectivamente, respecto de R .

1. R es una relación de igualdad.

La demostración es trivial.

2. $\mathcal{T}/R$ consta únicamente de dos clases, llamadas opuestas entre sí. Ya que si $(A B C) R (A' B' C')$ se verifica que $(A B C) R (B' A' C')$.

3. La relación R no depende del sistema de referencia R .

En efecto, sea $R' = \{O'; \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ otro sistema de referencia. Representaremos con primas las coordenadas respecto de R' . Recordando que las fórmulas del cambio de sistema de referencia en el plano afín (30), 2, § 1, son:

$$(83) \quad (1, x_1, x_2) = (1, x'_1, x'_2) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_2 \\ 0 & m_1 & m_2 \\ 0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0,$$

resulta que

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} |A|, \quad \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \\ 1 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p'_1 & p'_2 \\ 1 & q'_1 & q'_2 \\ 1 & r'_1 & r'_2 \end{vmatrix} |A|,$$

de donde

$$\text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \\ 1 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & p'_1 & p'_2 \\ 1 & q'_1 & q'_2 \\ 1 & r'_1 & r'_2 \end{vmatrix}.$$

DEFINICIÓN 1.—Se llama *orientación en el plano* a cada una de las clases de $\mathcal{G}/R$. Un triángulo orientado de una clase es un *representante* o *indicatriz* de la orientación de dicha clase.

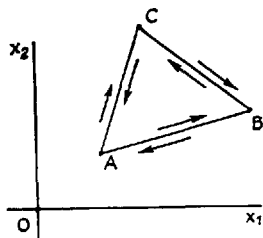


Fig. 52.

4. Un plano posee dos orientaciones, llamadas opuesta una de otra. Si $(A B C)$ es una indicatriz de una orientación, $(B A C)$ es indicatriz de la orientación opuesta (fig. 52).

Un plano con una orientación se llama *plano orientado*.

Sea B el conjunto de todos los pares ordenados de vectores libres del plano $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ no paralelos. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base del plano de los vectores libres, y si

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{d} = d_1 \mathbf{u}_1 + d_2 \mathbf{u}_2,$$

se dice que el par $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ está relacionado en la relación R' con el par $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, cuando:

$$(84) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) R' (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}.$$

5. R' es una relación de igualdad.

6. El conjunto cociente B/R' consta de dos clases.

A cada una de las clases del conjunto B/R' se le llama una *orientación* del plano de los vectores libres y a cada uno de los pares $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ una *indicatriz* de la orientación a que pertenece. Las dos orientaciones se llaman opuesta una de otra.

7. Las orientaciones no dependen de la base B elegida en el plano vectorial.

EJERCICIOS:

518. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} B$ la aplicación $\varphi(A B C) = (b - a, c - a)$, siendo a, b, c los vectores de posición de A, B, C , respectivamente, respecto del sistema de referencia $R = \{O; u_1, u_2\}$. Probar que φ aplica las orientaciones del plano afín en las del plano de los vectores libres.

519. La aplicación φ del ejercicio anterior es suprayectiva.

520. Dada la recta

$$r: u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$$

se define como orientación en r la siguiente: si A y B son dos puntos de r de coordenadas (a_1, a_2) y (b_1, b_2) respecto de un sistema de referencia $R = \{O; u_1, u_2\}$, se escribe:

$$A \leq B \Leftrightarrow a_1 \leq b_1, \quad a_1 \neq b_1, \quad \text{o,} \quad a_2 \leq b_2, \quad a_2 = b_2.$$

Análogamente, se define la orientación opuesta. Una recta con una orientación se llama orientada. Si el plano está orientado mediante la indicatriz (M, N, P) , y si r es una recta orientada, los dos semiplanos π' y π'' determinados por r son tales que los puntos X de uno de ellos están caracterizados por $(A B X) R (M N P)$ y los puntos Y del otro por $(A B Y) R (N M P)$. Demostrarlo.

§ 2. EL ESPACIO AFÍN

1. El espacio afín ordinario.—Sea E el espacio euclídeo ordinario, O un punto de E y V el espacio de los vectores libres de E . Sea ω la siguiente aplicación:

$$(1) \quad \begin{cases} E \xrightarrow{\omega} V \\ X \longrightarrow \omega(X) = [\overrightarrow{OX}], \quad \forall X \in E. \end{cases}$$

1. ω es una biyección.

En efecto, si $x \in V$ y $\overrightarrow{OX} \in x$, se verifica que $\omega(X) = x$:

$$\omega(X) = \omega(Y) \Rightarrow [\overrightarrow{OX}] = [\overrightarrow{OY}] \Rightarrow \overrightarrow{OX} \sim \overrightarrow{OY} \Leftrightarrow X = Y.$$

Al vector $x = [\overrightarrow{OX}]$ correspondiente al punto X se le llama *vector de posición de X respecto del origen O* .

2. Si O' es otro origen y ω' la biyección (1) correspondiente, se verifica

$$(2) \quad \omega'(X) = \omega'(O) + \omega(X).$$

En efecto, basta observar que

$$(2') \quad [\overrightarrow{O'X}] = [\overrightarrow{O'O}] + [\overrightarrow{OX}]$$

La fórmula (2) se llama fórmula del cambio de origen.

I. ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.—Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{x}$ son los vectores de posición de A, B y X, respectivamente, siendo $A \neq B$ se verifica:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A, B, X \text{ están alineados} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AX}] \parallel [\overrightarrow{AB}] \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \lambda + \mu \\ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

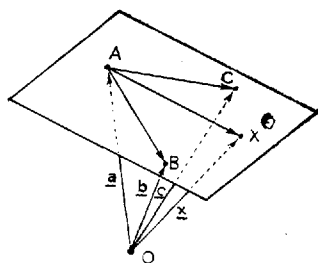


Fig. 53.

por esta razón, las igualdades vectoriales (3) se llaman *ecuaciones vectoriales de la recta*.

II. ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO.—Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$ son los vectores de posición de A, B, C, X, respectivamente (fig. 53), siendo A, B y C puntos no alineados, se verifica:

A, B, C, X son coplanarios $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AX}], [\overrightarrow{AB}], [\overrightarrow{AC}]$ son linealmente dependientes

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AX}] &= \lambda [\overrightarrow{AB}] + \mu [\overrightarrow{AC}] \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \Leftrightarrow 1 = \lambda + \mu + \nu, \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

521 Dado el plano

$$\pi) \quad \mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Hallar la ecuación de la recta incidente con dos de sus puntos.

522. Sea el plano del ejercicio anterior y las rectas r y s de dicho plano, correspondientes a las especializaciones (véase la solución del ejercicio anterior):

$$r) \begin{cases} \lambda = m + \rho n, \\ \mu = p + \rho q, \end{cases} \quad s) \begin{cases} \lambda = m' + \rho n', \\ \mu = p' + \rho q'. \end{cases}$$

Hallar la condición necesaria y suficiente de paralelismo de las rectas r y s del plano π .

523. Averiguar si los puntos M, N y P del plano π del ejercicio 521, correspondientes a los valores (λ_1, μ_1) , (λ_2, μ_2) y (λ_3, μ_3) de los parámetros (λ, μ) están alineados.

524. La ecuación de un plano π establece una aplicación A del plano $\wedge$ formado por los puntos de coordenadas (λ, μ) y el plano π . La aplicación A tiene las siguientes propiedades: 1) Puntos alineados de $\wedge$ se transforman en puntos alineados de π . 2) Puntos no alineados se transforman en puntos no alineados. 3) Rectas paralelas se transforman en rectas paralelas. 4) Rectas no paralelas se transforman en rectas no paralelas.

2. Coordenadas cartesianas en el espacio afín.—Sea O un punto del espacio afín, E, al que denominaremos *origen*, y una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ en el espacio vectorial de los vectores libres, V. Sea A el espacio vectorial de las matrices de una fila y tres columnas, a las que denominaremos *vectores algebraicos*. Se ha visto (27, 5, § 1, Cap. II) que la base B define un isomorfismo entre V y A, que designaremos por β :

$$(4) \quad \begin{cases} V \xrightarrow{\beta} A \\ \mathbf{x} \longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \iff \mathbf{x} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3. \end{cases}$$

esto es

$$(5) \quad \beta(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) = (x_1, x_2, x_3).$$

El conjunto $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ define una biyección de E en A:

$$(6) \quad \begin{cases} E \xrightarrow{\omega} V \xrightarrow{\beta} A \\ X \longrightarrow [\overrightarrow{OX}] \longrightarrow (x_1, x_2, x_3), \end{cases}$$

siendo

$$(7) \quad [\overrightarrow{OX}] = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3.$$

Al vector (x_1, x_2, x_3) se le llama *vector de las coordenadas cartesianas* del punto X respecto del sistema de referencia $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$. Los números x_1, x_2, x_3 se llaman *coordenadas* de X.

Sean $\overrightarrow{OU_1} \in u_1$, $\overrightarrow{OU_2} \in u_2$, $\overrightarrow{OU_3} \in u_3$. Las rectas $OU_1 = x_1$, $OU_2 = x_2$ y $OU_3 = x_3$, se llaman *ejes de coordenadas* correspondientes al sistema R , y los planos $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ y $x_3 x_1$, planos de coordenadas (fig. 54).

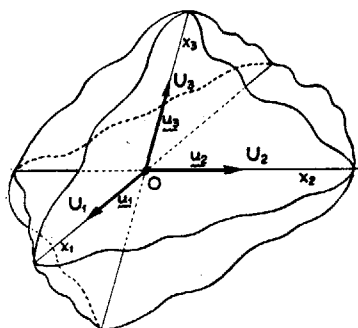


Fig. 54.

EJERCICIOS:

525. Comprobar que: a) Las coordenadas del origen son $(0, 0, 0)$. b) $X \in x_1 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de X son $(x_1, 0, 0)$. $X \in x_2 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de X son $(0, x_2, 0)$. $X \in x_3 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de X son $(0, 0, x_3)$. c) $X \in x_1 x_2 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de X son $(x_1, x_2, 0)$. $X \in x_2 x_3 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de X son $(0, x_2, x_3)$. $X \in x_3 x_1 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de X son $(x_1, 0, x_3)$.

Sea $R^* = \{O^*; u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ otro sistema de referencia y sean (x_1^*, x_2^*, x_3^*) las coordenadas X respecto de R^* . De (7) se deduce:

$$(8) \quad [\overrightarrow{O^* X}] = x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^*.$$

Sean (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) las coordenadas de u_i respecto de la base $B^* \{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$, y sean (a_1, a_2, a_3) las coordenadas de O respecto de R^* , esto es:

$$(9) \quad \begin{cases} [\overrightarrow{O^* O}] = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + a_3 u_3^*, \\ u_1 = a_{11} u_1^* + a_{12} u_2^* + a_{13} u_3^*, \\ u_2 = a_{21} u_1^* + a_{22} u_2^* + a_{23} u_3^*, \\ u_3 = a_{31} u_1^* + a_{32} u_2^* + a_{33} u_3^*. \end{cases}$$

De (2'), (7), (8) y (9) se deduce:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{O^* X}] &= [\overrightarrow{O^* O}] + [\overrightarrow{O X}] \Leftrightarrow x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^* \\ &= (a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + a_3 u_3^*) + x_1 (a_{11} u_1^* + a_{12} u_2^* + a_{13} u_3^*) + x_2 (a_{21} u_1^* \\ &\quad + a_{22} u_2^* + a_{23} u_3^*) + x_3 (a_{31} u_1^* + a_{32} u_2^* + a_{33} u_3^*) = (a_1 + a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \\ &\quad + a_{31} x_3) u_1^* + (a_2 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3) u_2^* + (a_3 + a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3) u_3^*. \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta la independencia lineal de u^*_1 , u^*_2 y u^*_3 , resulta:

$$(10) \quad \begin{cases} x^*_1 = a_1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3, \\ x^*_2 = a_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3, \\ x^*_3 = a_3 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Fórmulas que se llaman del cambio de sistema de referencia.

Las fórmulas (10) pueden escribirse en forma matricial, anteponiendo a todas ellas la igualdad $1 = 1$, del siguiente modo:

$$(11) \quad (1, x^*_1, x^*_2, x^*_3) = (1, x_1, x_2, x_3) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Por ser los vectores u_1, u_2, u_3 linealmente independientes, el determinante de la matriz de sus coordenadas (9) es distinto de cero, y como este determinante es igual al determinante de la matriz A , resulta que $|A| \neq 0$. Por consiguiente, el sistema (11) se puede resolver respecto de las x_1, x_2, x_3 y se obtiene:

$$(12) \quad (1, x_1, x_2, x_3) = (1, x^*_1, x^*_2, x^*_3) A^{-1},$$

que son las fórmulas inversas de las (11).

EJERCICIOS:

526. Hallar las fórmulas del cambio de coordenadas del sistema de referencia $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ al sistema de referencia $R^* = \{O^*; u^*_1, u^*_2, u^*_3\}$, siendo $(1, 0, -2)$ las coordenadas de O^* respecto de R y $(2, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 3, 0)$ las coordenadas de u^*_1, u^*_2, u^*_3 , respectivamente, respecto de $B = \{u_1, u_2, u_3\}$.

527. Hallar las fórmulas de cambio de coordenadas del sistema $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ al $R^* = \{O^*; u^*_1, u^*_2, u^*_3\}$, siendo las coordenadas, respecto de R , de O^*, U^*_1, U^*_2, U^*_3 las siguientes: $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(0, 2, -3)$, y $O^*U^*_1 \in u^*_1$, $\overrightarrow{O^*U^*_2} \in u^*_2$, $\overrightarrow{O^*U^*_3} \in u^*_3$.

3. Ecuación cartesiana del plano.—Sea $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ un siste-

ma de referencia cartesiano y sean (a_i) (b_i) (c_i) (x_i) , $i = 1, 2, 3$ las coordenadas de los puntos A, B, C y X, respectivamente. De (1, II) se deduce que:

$$X \in ABC \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = \lambda (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{x}_1 - a_1) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_2 - a_2) \mathbf{u}_2 + (\mathbf{x}_3 - a_3) \mathbf{u}_3 = [\lambda (b_1 - a_1) + \mu (c_1 - a_1)] \mathbf{u}_1 + [\lambda (b_2 - a_2) + \mu (c_2 - a_2)] \mathbf{u}_2 + [\lambda (b_3 - a_3) + \mu (c_3 - a_3)] \mathbf{u}_3,$$

de donde:

$$(13) \quad X \in ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - a_1 = \lambda (b_1 - a_1) + \mu (c_1 - a_1), \\ x_2 - a_2 = \lambda (b_2 - a_2) + \mu (c_2 - a_2), \\ x_3 - a_3 = \lambda (b_3 - a_3) + \mu (c_3 - a_3), \end{cases}$$

por lo que (13) se llaman *ecuaciones cartesianas paramétricas del plano ABC*. Recordando el significado de la eliminación (5, § 3, Cap. II), resulta que

$$(14) \quad (13) \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{pmatrix},$$

y como los puntos A, B, C (1, II) son puntos no alineados, los vectores de las dos columnas de la primera matriz son linealmente independientes y su rango es, por tanto, dos. Luego, la igualdad de rangos de (14) es equivalente a:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

luego (15) es equivalente a $X \in ABC$, siendo A, B, C puntos no alineados. Por esta razón, a (15) se le llama *ecuación del plano incidente con los tres puntos no alineados A, B y C*.

Empleando las últimas ecuaciones vectoriales del plano (1, II), se obtiene:

$$(16) \quad X \in ABC \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu + \nu \\ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu + \nu \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \\ x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_3 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La última equivalencia es consecuencia de ser los puntos A, B y C no alineados y, por tanto, el rango de la primera matriz igual a tres. Como consecuencia, cualquiera de las ecuaciones que figuran en (16) se puede considerar como ecuación del plano incidente con tres puntos no alineados.

Bien la ecuación (15), o la última (16), se pueden escribir en la siguiente forma:

$$(17) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Se presenta ahora la siguiente cuestión: ¿Es toda ecuación de la forma (17) la ecuación de un plano? Supongamos que uno de los números u_1, u_2, u_3 sea distinto de cero, p. e., $u_3 \neq 0$. Se verificará:

$$u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad a_0 = -\frac{u_0}{u_3},$$

$$a_1 = -\frac{u_1}{u_3}, \quad a_2 = -\frac{u_2}{u_3}. \quad \Leftrightarrow x_3 = a_0(1 - x_1 - x_2) + (a_0 + a_1)x_1$$

$$+ (a_0 + a_2)x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu + \nu \\ x_1 = \mu \\ x_2 = \nu \\ x_3 = \lambda a_0 + \mu(a_0 + a_1) + \nu(a_0 + a_2) \end{cases}$$

y como

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_0 + a_1 & a_0 + a_2 \end{pmatrix} = 3,$$

las últimas ecuaciones son las de un plano incidente con los puntos no alineados $(0, 0, a_0)$, $(1, 0, a_0 + a_1)$, $(0, 1, a_0 + a_2)$.

Si los tres números u_1, u_2, u_3 son cero y $a_0 \neq 0$, la ecuación (17) representa al conjunto vacío y si $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$, la ecuación (17) representa todos los puntos del espacio. Por consiguiente:

1. La ecuación (17) es la ecuación de un plano $\Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$.

EJERCICIO:

528. Hallar las ecuaciones de los siguientes planos: a) De los planos de coordenadas (fig. 55). b) De planos paralelos a los planos de coordenadas. c) De planos que contengan a uno de los ejes de coordenadas. d) De planos paralelos a uno de los ejes de coordenadas. e) De planos incidentes con el origen de coordenadas.

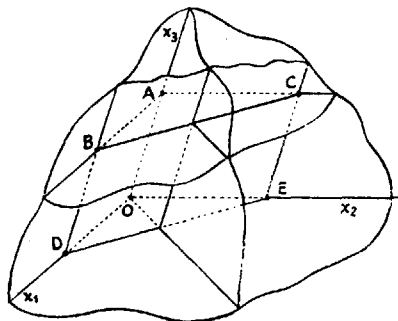


Fig. 55.

4. Ecuaciones cartesianas de la recta. — Sea $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ un sistema de referencia en el espacio y sean (a_i) (b_i) (x_i) , $i = 1, 2, 3$, las coordenadas de los puntos A, B, X, respectivamente.

De 1, I, se deduce que:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad X \in AB &\Leftrightarrow x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \\
 &+ \lambda [(b_1 - a_1) u_1 + (b_2 - a_2) u_2 + (b_3 - a_3) u_3] = [a_1 + \lambda (b_1 - a_1)] u_1 \\
 &+ [a_2 + \lambda (b_2 - a_2)] u_2 + [a_3 + \lambda (b_3 - a_3)] u_3 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda (b_1 - a_1), \\ x_2 = a_2 + \lambda (b_2 - a_2), \\ x_3 = a_3 + \lambda (b_3 - a_3), \end{cases}
 \end{aligned}$$

que son, por tanto, las *ecuaciones explícitas o paramétricas de la recta* incidente con los puntos A y B.

Se podría, también, haber procedido del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad X \in AB &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \lambda (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) \\ \quad + \mu (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = (\lambda a_1 + \mu b_1) u_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2) u_2 \\ \quad + (\lambda a_3 + \mu b_3) u_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu, \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \\ x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3, \end{cases}
 \end{aligned}$$

que es otra expresión de las ecuaciones explícitas de la recta incidente con los puntos A y B.

Para obtener las ecuaciones implícitas basta eliminar λ en (18) o bien λ y μ en (19). Recordando el proceso de eliminación, resulta:

$$(20) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + \lambda(b_3 - a_3) \end{cases} \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que la segunda equivalencia es debida a ser distintos los puntos A y B y, como consecuencia, ser igual a uno el rango de la matriz $(b_i - a_i)$. Se ha supuesto, por tanto, que $a_1 - b_1 \neq 0$.

Las últimas ecuaciones (20) se suelen escribir, impropiaemente, del siguiente modo:

$$(21) \quad \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$

Para que las ecuaciones (21) sean equivalentes a las (20) es necesario y suficiente que los tres números que figuran en los denominadores de (21) sean distintos de cero.

Las últimas ecuaciones (20) de la recta AB se pueden escribir en la siguiente forma:

$$(22) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \\ v_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0, \\ u_0 = b_1 a_2 - b_2 a_1, \quad u_1 = b_2 - a_2, \quad u_2 = a_1 - b_1, \quad u_3 = 0, \\ v_0 = b_1 a_3 - b_3 a_1, \quad v_1 = b_3 - a_3, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = a_1 - b_1. \end{cases}$$

Las ecuaciones (22) se llaman *ecuaciones implícitas de la recta*. Por ser los puntos A y B distintos, se verifica (22) que

$$(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0), \quad (v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0),$$

luego cada una de las ecuaciones que figuran en (22) representa un plano. Por consiguiente, las ecuaciones implícitas de una recta corresponden a la recta considerada como intersección de dos planos.

EJERCICIO:

529. Hallar las ecuaciones explícitas e implícitas de las siguientes rectas: a) Ejes de coordenadas. b) Recta AB , $A = (1, -2, 1)$, $B = (3, 0, -2)$. c) Una recta incidente con el plano $x_3 = 0$. d) Una recta incidente con el origen de coordenadas.

5. Incidencia en el espacio.—I. *Incidencia de punto y recta.* Sea el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y la recta AB , $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$.

$$(23) \quad P \text{ es incidente con } AB \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ p_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ p_3 = a_3 + \lambda(b_3 - a_3) \end{cases} \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} p_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 & b_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Si la recta AB viene dada por sus ecuaciones implícitas (22), la condición de incidencia es:

$$(24) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = 0, \\ v_0 + v_1 p_1 + v_2 p_2 + v_3 p_3 = 0. \end{cases}$$

La condición de incidencia se puede enunciar también como condición de alineación de tres puntos.

Las ecuaciones:

$$(24') \quad \frac{x_1 - p_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - p_2}{\lambda_2} = \frac{x_3 - p_3}{\lambda_3}.$$

representan, cualesquiera que sean los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, una recta incidente con el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$. Al conjunto de todas las rectas del espacio incidentes con un punto P se le llama *radiación de rectas de base P* . Por consiguiente, las ecuaciones (24') cuando en ellas las p_1, p_2, p_3 son números y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ variables independientes representan todas las rectas de la radiación de base P , por lo que reciben el nombre de *ecuaciones de la radiación de rectas de base P* .

II. *Incidencia de punto y plano.* Sea el punto P y el plano A B C.

$$(25) \quad P \text{ es incidente con A B C} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

esta condición puede enunciarse también como condición para que los puntos P, A, B, C sean coplanarios. Si el plano viene dado en forma implícita, la condición de incidencia será:

$$(26) \quad u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 = 0.$$

El plano

$$(26') \quad u_1 (x_1 - p_1) + u_2 (x_2 - p_2) + u_3 (x_3 - p_3) = 0,$$

es incidente con el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ cualesquiera que sean los números u_1, u_2, u_3 . Al conjunto de todos los planos del espacio incidentes con un punto P se le llama *radiación de planos de base P*. Por consiguiente, la ecuación (26') es la *ecuación de una radiación de planos de base P*, cuando en ella p_1, p_2, p_3 son números y u_1, u_2, u_3 variables independientes.

III. *Incidencia de recta y plano.* a) Si el plano viene determinado por tres puntos A, B, C, no alineados, y la recta por los puntos distintos M, N, la condición de incidencia de M N y A B C equivale a la condición de ser coplanarios A, B, C, M, N, y siendo A, B, C no alineados, esto equivale a que

$$(26'') \quad r \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & m_1 - a_1 & n_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & m_2 - a_2 & n_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & m_3 - a_3 & n_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2.$$

b) Si el plano viene definido en forma implícita y la recta en forma paramétrica (18), la condición de incidencia de (18) con

$$u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

es

$$(27) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0 \\ u_1 (b_1 - a_1) + u_2 (b_2 - a_2) + u_3 (b_3 - a_3) = 0. \end{cases}$$

c) La condición de incidencia de la recta (22) y el plano

$$(28) \quad w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 = 0$$

es que el sistema (22) sea equivalente al formado por (22) más (28) y como (22) es compatible siendo el rango de la matriz de los coeficientes dos, resulta la siguiente condición de incidencia de (22) y (28):

$$(29) \quad r \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 2.$$

EJERCICIOS:

530. Ecuación del plano incidente con la recta

$$r \begin{cases} 2 - x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3 + 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

y el punto (5, -1, 2).

531. Condición de incidencia del plano A B C y la recta (22).

6. Intersección en el espacio.—I. Intersección de dos planos. Sean los planos:

$$(30) \quad \begin{cases} \text{a)} & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \\ \text{b)} & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

y sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

1.º $r(A) = r(B) = 2$. Sea, por ejemplo:

$$T_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Los puntos comunes a los dos planos son las soluciones del sistema (30), que es equivalente al sistema:

$$(31) \quad \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = -a_0 - a_3 x_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 = -b_0 - b_3 x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{T_{20}}{T_{12}} + \lambda \left(\frac{T_{20} + T_{12} T_{23}}{T_{12}} - \frac{T_{20}}{T_{12}} \right), \\ x_2 = \frac{T_{01}}{T_{12}} + \lambda \left(\frac{T_{01} + T_{12} T_{31}}{T_{12}} - \frac{T_{01}}{T_{12}} \right), \\ x_3 = \lambda T_{12}, \end{cases}$$

en donde

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

El segundo sistema (31) establece que el lugar de los puntos comunes a los planos (30) es la recta determinada por los puntos:

$$A = \left(\frac{T_{20}}{T_{12}}, \quad \frac{T_{01}}{T_{12}}, \quad 0 \right),$$

y

$$B = \left(\frac{T_{20} + T_{12} T_{23}}{T_{12}}, \quad \frac{T_{01} + T_{12} T_{31}}{T_{12}}, \quad T_{12} \right).$$

Por consiguiente:

La condición necesaria y suficiente para que los planos a) y b) se corten según una recta es que $r(A) = 2$. En este caso las ecuaciones (30) se llaman ecuaciones implícitas de la recta.

Por ser los puntos A y B puntos de la recta (30), el vector $[\overrightarrow{AB}]$ tiene la dirección de la recta (30):

$$(31') \quad [\overrightarrow{AB}] = (T_{23}, T_{31}, T_{12}) \parallel a \cap b.$$

2.º $r(A) = 1$, $r(B) = 2$. El sistema (30) no tiene solución y los planos son, por tanto, paralelos.

La condición necesaria y suficiente para que los planos a) y b) sean paralelos (y distintos), es que

$$(32) \quad r(A) = 1, \quad r(B) = 2, \quad \text{o bien,} \quad \frac{a_0}{b_0} \neq \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

3.º) $r(A) = r(B) = 1$. En este caso las dos filas de la matriz B son proporcionales, luego los dos planos a) y b) coinciden.

Condición para que coincidan los planos a) y b):

$$(33) \quad r(B) = 1, \quad \text{o bien,} \quad \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

EJERCICIOS:

532. Hallar las ecuaciones explícitas de la recta:

$$r \begin{cases} 1 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

533. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano:

$$\pi: \quad 4 - x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

e incidente con el punto $A = (2, -1, 3)$.

II. *Intersección de tres planos.* Sean los planos:

$$(34) \quad \begin{cases} \text{a)} & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0. \\ \text{b)} & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \\ \text{c)} & c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

y sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

las matrices de los coeficientes y ampliada con los términos constantes, respectivamente.

1.º) $r(A) = 3$. En este caso el sistema (34) tiene solución única. Los tres planos se cortan en un único punto.

2.º) $r(A) = 2$, $r(B) = 3$. El sistema (34) no tiene solución. No existe ningún punto común a los tres planos. Si, por ejemplo, es

$$T_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

los planos a) y b) se cortan en una recta, r , y esta recta será paralela al plano c). Si las T_{ij} tienen el mismo significado anterior, la condición $r(A) = 2$, siendo $T_{12} \neq 0$, es equivalente a

$$(35) \quad c_1 T_{23} + c_2 T_{31} + c_3 T_{12} = 0.$$

luego, la condición de paralelismo de la recta intersección de los planos a) y b) y el plano c) es (35) juntamente con $r(B) = 3$.

3.º) $r(A) = r(B) = 2$. Si $T_{12} \neq 0$, el sistema (34) es equivalente al formado por las dos primeras ecuaciones. Esto equivale a decir (9, 6, § 3, capítulo II) que la tercera ecuación depende linealmente de las dos primeras, esto es:

$$(36) \quad c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \lambda (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \\ + \mu (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) = 0.$$

Por consiguiente, el plano c) es incidente con la recta intersección de a) y b).

Si en (36) se consideran λ y μ como variables independientes, la ecuación (36) representa el conjunto de todos los planos incidentes con la recta intersección de los planos a) y b). A este conjunto de planos se le llama *haz de planos cuya base es la recta intersección de a) y b)*. Luego, la ecuación (36), en donde λ y μ son variables independientes, es la ecuación del haz de planos de base: a) intersección con b).

4.º) $r(A) = 1$, $r(B) = 2$. El sistema (34) no tiene solución. De $r(A) = 1$ se deduce que las tres filas de la matriz A son proporcionales, luego los planos serán paralelos o coincidentes. Como los tres no pueden coincidir, por ser $r(B) = 2$, se pueden presentar dos casos, según que los tres sean distintos, o coincidentes dos de ellos.

5.º) $r(A) = r(B) = 1$. Los tres planos coinciden.

EJERCICIOS:

534. Ecuación del plano incidente con la recta AB , $A = (3, -1, 4)$, $B = (2, 5, -3)$ y paralela a la recta

$$r) \begin{cases} 2 + 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -1 + 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

535. Ecuación del plano incidente con la recta $r)$ del ejercicio anterior y paralelo a la recta:

$$s) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

536. Ecuaciones de la recta incidente con el plano

$$\pi) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$$

con el punto de este plano $A = (-1, 1, 1)$ y paralela al plano

$$\sigma) \quad 4 + x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0.$$

III. *Intersección de cuatro planos.* Sean los planos:

$$(37) \quad \begin{cases} a) & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \\ b) & b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \\ c) & c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0, \\ d) & d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}.$$

1.º $r(A) = 3$, $r(B) = 4 \iff |B| \neq 0$. Los planos no tienen ningún punto común. Llamando A_i, B_i, C_i, D_i a los adjuntos de a_i, b_i, c_i, d_i , respectivamente, en la matriz B , si $A_0 \neq 0, B_0 \neq 0, C_0 \neq 0$ y $D_0 \neq 0$, los planos se cortan tres a tres en un único punto y forman un tetraedro. Como

el rango de A es tres no pueden anularse dos de estos menores. Si se anula uno de ellos, por ejemplo $A_0 = 0$, los planos b), c) y d) determinan una superficie prismática triangular y a) cortaría a las tres aristas.

2.º $r(A) = r(B) = 3$. Los cuatro planos son incidentes con un punto único. En virtud de (9, 6, § 3, cap. II) una de las ecuaciones (37) depende linealmente de las otras tres, p. e.:

$$(38) \quad \begin{aligned} d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 &= \lambda (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \\ &+ \mu (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) + \nu (c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) = 0. \end{aligned}$$

Si en la ecuación (38) son los planos a), b) y c) linealmente independientes y se consideran λ, μ, ν como variables independientes, la ecuación (38) representa todos los planos incidentes con el punto de intersección de los planos a), b) y c). Este conjunto de planos es la *radiación de planos* de base el punto de intersección de a), b) y c). Por consiguiente, *la ecuación (38) es la ecuación de la radiación de planos cuya base es el punto de intersección de los planos a), b) y c), cuando estos tres planos son linealmente independientes y λ, μ, ν variables independientes.*

EJERCICIOS:

537. Ecuación del plano incidente con el punto de intersección de los planos

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 1 - x_1 + x_3 = 0 \\ -1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2 + 3x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right.$$

y paralelo al plano

$$c) \quad 7 + 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0.$$

538. Ecuación del plano incidente con los puntos $A = (4, -5, 1)$, $B = (-2, 0, 3)$ y con el punto de intersección de los planos a) del ejercicio anterior.

539. Ecuación de una recta coplanaria con la recta r de ecuaciones

$$r: \quad 2 - 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \quad 4 + x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,$$

incidente con el plano c) del ejercicio anterior y que corte a la recta

$$d) \quad \frac{x_1}{4} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{7}.$$

540. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \quad 1 + 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \text{b)} \quad -2 - x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ \text{c)} \quad 1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ \text{d)} \quad 3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{array} \right.$$

541. Hallar las ecuaciones de la recta r coplanaria con la recta AB , $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 3, -1)$ y con la recta intersección de los planos a) y b) del ejercicio anterior e incidente con el punto $P = (2, 4, 5)$.

542. Averiguar si la recta r , intersección de los planos a) y b) del ejercicio 540, es coplanaria con la recta s , intersección de c) y d) en el mismo ejercicio.

IV. *Intersección de recta y plano.* Si la recta viene determinada por los planos a) y b) de (34) y el plano es el plano c) de (34), y si A , B y T_{ij} tienen el significado de II, resulta que:

1.º) La recta $a \cap b$ corta al plano c en un punto $\iff |A| \neq 0$.

2.º) La recta $a \cap b$ es paralela al plano $c \iff (35)$ y $r(B) = 3$.

Si la recta viene dada por las ecuaciones:

$$(39) \quad \frac{x_1 - a_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2} = \frac{x_3 - a_3}{\lambda_3} = t \neq 0,$$

y el plano es el plano c de (34), el punto de intersección de la recta y el plano se obtendrá resolviendo el sistema formado por (39) más la ecuación del plano. Este sistema es equivalente al formado por (39) más la ecuación

$$(40) \quad c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + (c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3) t = 0.$$

Para que (40) tenga solución es necesario y suficiente que el coeficiente de t sea distinto de cero, luego:

3.º) La recta (39) corta al plano c en un único punto $\iff$

$$(41) \quad c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 \neq 0$$

4.º) La recta (39) es paralela (y no incidente) al plano $c \iff$

$$(42) \quad \begin{aligned} c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 &= 0, \\ c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 &\neq 0. \end{aligned}$$

5.º) La recta (39) es incidente con el plano $c \iff$

$$(43) \quad \begin{aligned} c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 &= 0, \\ c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 &= 0. \end{aligned}$$

V. *Posiciones relativas de dos rectas.* Si la recta r viene dada como intersección de los planos a y b de (37) y la recta s como intersección de los planos c y d de (37), la condición necesaria y suficiente para que sean coplanarias es que los haces de planos de bases r y s tengan un plano común. Las ecuaciones de estos haces son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 a_0 + \lambda_1 b_0 + (\lambda_0 a_1 + \lambda_1 b_1) x_1 + (\lambda_0 a_2 + \lambda_1 b_2) x_2 + (\lambda_0 a_3 + \lambda_1 b_3) x_3 &= 0, \\ \lambda_2 c_0 + \lambda_3 d_0 + (\lambda_2 c_1 + \lambda_3 d_1) x_1 + (\lambda_2 c_2 + \lambda_3 d_2) x_2 + (\lambda_2 c_3 + \lambda_3 d_3) x_3 &= 0, \end{aligned}$$

y la condición para que estos haces tengan un plano común es:

$$\frac{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 b_0}{\lambda_2 c_0 + \lambda_3 d_0} = \frac{\lambda_0 a_1 + \lambda_1 b_1}{\lambda_2 c_1 + \lambda_3 d_1} = \frac{\lambda_0 a_2 + \lambda_1 b_2}{\lambda_2 c_2 + \lambda_3 d_2} = \frac{\lambda_0 a_3 + \lambda_1 b_3}{\lambda_2 c_3 + \lambda_3 d_3} = \rho \neq 0.$$

Este sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} a_0 \lambda_0 + b_0 \lambda_1 - \rho c_0 \lambda_2 - \rho d_0 \lambda_3 = 0, \\ a_1 \lambda_0 + b_1 \lambda_1 - \rho c_1 \lambda_2 - \rho d_1 \lambda_3 = 0, \\ a_2 \lambda_0 + b_2 \lambda_1 - \rho c_2 \lambda_2 - \rho d_2 \lambda_3 = 0, \\ a_3 \lambda_0 + b_3 \lambda_1 - \rho c_3 \lambda_2 - \rho d_3 \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

y la condición para que este sistema sea compatible respecto de las incógnitas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, es que

$$(44) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ya que $\rho \neq 0$.

Dos rectas no coplanarias se dice que *se cruzan*. Por consiguiente:

$$(44') \quad r \text{ y } s \text{ se cruzan} \iff \Delta \neq 0.$$

$$(44'') \quad r \text{ y } s \text{ son coplanarias} \iff \Delta = 0.$$

$$(44''') \quad r \text{ y } s \text{ se cortan en un único punto} \iff r(A) = r(B) = 3.$$

$$(45) \quad r \text{ y } s \text{ son paralelas y distintas } \Leftrightarrow r(A) = 2, r(B) = 3.$$

$$(46) \quad r \text{ y } s \text{ coinciden } \Leftrightarrow r(A) = r(B) = 2.$$

Si las rectas r y s vienen dadas por las ecuaciones:

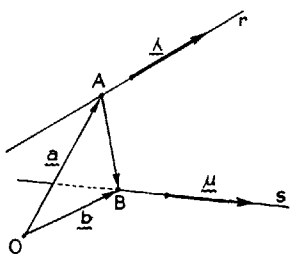


Fig. 56.

$$r) \quad \frac{x_1 - a_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2} = \frac{x_3 - a_3}{\lambda_3},$$

$$s) \quad \frac{x_1 - b_1}{\mu_1} = \frac{x_2 - b_2}{\mu_2} = \frac{x_3 - b_3}{\mu_3},$$

el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tiene la dirección de r , el vector $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ tiene la dirección de s (fig. 56) y vector $[\overrightarrow{AB}]$ tiene por coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Las rectas r y s son coplanarias es equivalente a: los vec-

tores λ , μ y $[\overrightarrow{AB}]$ son linealmente dependientes, esto es, a

$$m\lambda + n\mu + p[\overrightarrow{AB}] = 0,$$

o bien:

$$(47) \quad D = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Por consiguiente:

$$(48) \quad \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan } \Leftrightarrow D \neq 0.$$

$$(49) \quad \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ son coplanarias } \Leftrightarrow D = 0.$$

$$(50) \quad \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ son paralelas y distintas } \Leftrightarrow \text{Las dos últimas filas de la matriz de } D \text{ son proporcionales y el rango de la matriz es } 2$$

$$(51) \quad \text{Las rectas } r \text{ y } s \text{ coinciden } \Leftrightarrow \text{El rango de la matriz de } D \text{ es uno.}$$

EJERCICIOS:

543. Ecuaciones de la recta r tal que: a) Sea incidente con el punto $P = (3, -1, 0)$. b) Sea coplanaria con la recta

$$a) \quad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{-2} = \frac{x_3}{5},$$

c) Sea paralela al plano

$$\pi) \quad 4 - 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0.$$

544. Ecuación del plano paralelo a la recta a) del ejercicio anterior, a la recta

$$b) \begin{cases} 2 - x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 1 + 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

e incidente con el punto de intersección de los planos a) del ejercicio 537.

545. Dadas las tres rectas:

$$a) \quad \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{4}, \quad b) \quad \frac{x_1}{3} = \frac{x_2 + 3}{1} = \frac{x_3 - 1}{2},$$

$$c) \quad \frac{x_1 + 2}{-1} = \frac{x_2 + 1}{-2} = \frac{x_3 - 1}{2}.$$

1.º) Comprobar que son paralelas a un mismo plano y hallar la ecuación del plano incidente con el origen de coordenadas paralelo a las tres rectas. 2.º) Hallar todas las rectas coplanarias con las tres rectas dadas y comprobar que todas ellas son paralelas a un mismo plano y hallar la ecuación del plano incidente con el origen y paralelo a todas ellas.

546. Se llama *plano mediano* de un tetraedro al plano determinado por una arista y el punto medio de la arista opuesta. Demostrar que los seis planos medianos de un tetraedro son incidentes con un mismo punto, llamado *baricentro* del tetraedro, y hallar la razón

$\frac{AG}{AA'}$, siendo A un vértice del tetraedro, G el baricentro y A' el punto de intersección de AG con la cara opuesta a A.

7. Coordenadas afines en el espacio.—Sean A, B, C, D cuatro puntos no coplanarios, de coordenadas $(a_i), (b_i), (c_i), (d_i), i = 1, 2, 3$, respectivamente, respecto de un sistema de referencia $\mathbb{R} = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Por ser los puntos A, B, C, D no coplanarios, se verifica que

$$(52) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sea $X = (x_1, x_2, x_3)$ otro punto arbitrario del espacio. En virtud de (52) el sistema:

$$(53) \quad (1, x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}.$$

tiene solución única respecto de las (λ_i) :

$$(54) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, x_1, x_2, x_3) A^{-1}.$$

Los números $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, unívocamente determinados por (54), se llaman *coordenadas afines o baricéntricas* del punto X, respecto del sistema de referencia afín $R' = \{A, B, C, D\}$. Obsérvese que las coordenadas baricéntricas no son independientes, ya que entre ellas existe la relación:

$$(55) \quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4.$$

Las fórmulas (53) y (54) son las fórmulas del cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas afines.

ECUACIONES DE LA RECTA EN COORDENADAS AFINES. Sean P y Q dos puntos distintos, (p_1, p_2, p_3) , (q_1, q_2, q_3) sus respectivas coordenadas cartesianas y $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, (v_1, v_2, v_3, v_4) sus respectivas coordenadas afines. Las ecuaciones paramétricas de la recta PQ:

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ (x_1, x_2, x_3) = \lambda (p_1, p_2, p_3) + \mu (q_1, q_2, q_3), \end{cases}$$

se pueden escribir en la forma:

$$(1, x_1, x_2, x_3) = \lambda (1, p_1, p_2, p_3) + \mu (1, q_1, q_2, q_3),$$

y, teniendo en cuenta las fórmulas del cambio de coordenadas (53), resulta:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) A = \lambda (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) A + \mu (v_1, v_2, v_3, v_4) A,$$

de donde,

$$(56) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) + \mu (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad 1 = \lambda + \mu.$$

que son las *ecuaciones afines de la recta PQ*.

Si (p_1, p_2, p_3, p_4) son las coordenadas afines del punto R y si P, Q, R no están alineados, se obtiene de modo análogo las siguientes *ecuaciones explícitas afines del plano PQR*:

$$(57) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) + \mu (v_1, v_2, v_3, v_4) + v (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

$$(58) \quad 1 = \lambda + \mu + v.$$

Eliminando λ, μ, ν en (57), se obtiene como ecuación implícita afin del plano PQR :

$$(59) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \rho_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \rho_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & \rho_3 \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 & \rho_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

que, desarrollando por la primera columna, puede escribirse así:

$$(60) \quad \begin{cases} a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1. \end{cases}$$

EJERCICIOS:

547. Dada la ecuación afin del plano π

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 1, \end{aligned}$$

respecto del sistema de referencia $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (0, 0, -2)$, $D = (3, -1, 0)$, hallar su ecuación cartesiana.

548. Hallar las ecuaciones afines, respecto del sistema de referencia del ejercicio anterior, de la recta:

$$\frac{x_1 - 3}{5} = \frac{x_2 + 2}{1} = \frac{x_3 - 5}{2}.$$

549. Hallar las relaciones que definen al tetraedro de vértices A, B, C, D (ej. 547).

550. Hallar las coordenadas afines del baricentro del tetraedro A, B, C, D .

8. Semiespacios. Figuras convexas.—Supondremos ahora que el cuerpo base es el de los números reales, o un subcuerpo de él. El mismo razonamiento usado en 6, § 1, prueba que:

Segmento de extremos A, B es el conjunto $[A, B]$, de todos los puntos X cuyos vectores de posición $\mathbf{x}$, vienen dados por las siguientes relaciones:

$$(81) \quad \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0. \end{cases}$$

EJERCICIOS:

551. Hallar las relaciones explícitas de $\mathcal{C}(A, B, C, D, E)$, siendo $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (4, 4, 0)$, $D = (0, 0, 5)$, $E = (1, 2, 3)$.
552. Determinar las caras del poliedro del ejercicio anterior.
553. Escribir las relaciones implícitas del poliedro del ejercicio 551.
554. Escribir las relaciones explícitas de un octaedro regular cuyas diagonales estén en los ejes y sean de longitudes igual a dos.
555. Escribir las relaciones implícitas del octaedro del ejercicio anterior.

9. Orientación en el espacio afín.—Se llama *tetraedro orientado* a un tetraedro cuyos vértices se dan en un cierto orden. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los tetraedros orientados del espacio afín. Sea $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ un sistema de referencia cartesiano del espacio y $(A B C D)$ y $(A' B' C' D')$ dos tetraedros orientados, sean $(a_i), (b_i), (c_i), (d_i), (a'_i), (b'_i), (c'_i), (d'_i)$ las coordenadas de $A, B, C, D, A', B', C', D'$, respectivamente, respecto de R . En $\mathcal{T}$ se define la relación R , del siguiente modo:

$$(67) \quad (A B C D) R (A' B' C' D') \Leftrightarrow \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \text{sig} \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ 1 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 1 & c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ 1 & d'_1 & d'_2 & d'_3 \end{vmatrix}$$

1. R es una relación de igualdad.

2. $\mathcal{T}/R$ consta únicamente de dos clases, llamadas *opuestas entre sí*.

Ya que si $(A B C D)$ no está relacionado con (A', B', C', D') se verifica que $(A B C D) R (B' A' C' D')$.

3. La relación R no depende del sistema de referencia.

La demostración es análoga a la del caso del plano.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *orientación en el espacio* a cada una de las clases de $\mathcal{T}/R$. Un tetraedro orientado de una clase se llama *representante* o *indicatriz de la orientación*.

4. En el espacio existen dos orientaciones, llamadas *opuestas una de otra*. Si $(A B C D)$ es una indicatriz de una orientación, $(B A C D)$ es indicatriz de la opuesta.

DEFINICIÓN 2.—El espacio con una de sus orientaciones se llama *espacio orientado*.

DEFINICIÓN 3.—Sea B el conjunto de todas las ternas ordenadas de vectores libres, linealmente independientes, del espacio y sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base del espacio de los vectores libres. Dados los vectores libres

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3, & \mathbf{b} &= b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2 + b_3 \mathbf{u}_3, & \mathbf{c} &= c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{a}' &= a'_1 \mathbf{u}_1 + a'_2 \mathbf{u}_2 + a'_3 \mathbf{u}_3, & \mathbf{b}' &= b'_1 \mathbf{u}_1 + b'_2 \mathbf{u}_2 + b'_3 \mathbf{u}_3, & \mathbf{c}' &= c'_1 \mathbf{u}_1 + c'_2 \mathbf{u}_2 + c'_3 \mathbf{u}_3, \end{aligned}$$

se define en B la relación R' del siguiente modo:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) R' (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}.$$

Si O y O' son puntos arbitrarios del espacio y

$$[\overrightarrow{OA}] = \mathbf{a}, \quad [\overrightarrow{OB}] = \mathbf{b}, \quad [\overrightarrow{OC}] = \mathbf{c}, \quad [\overrightarrow{O'A'}] = \mathbf{a}', \quad [\overrightarrow{O'B'}] = \mathbf{b}', \quad [\overrightarrow{O'C'}] = \mathbf{c}',$$

se verifica que:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) R' (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') \Leftrightarrow (O A B C) R (O' A' B' C').$$

Por consiguiente, *se puede definir la orientación en el espacio vectorial y en el espacio afín mediante una terna ordenada de vectores libres.*

EJERCICIOS:

556. Sea $R(O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ un sistema de referencia cartesiano. Sea el espacio orientado mediante la indicatriz $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Sea

$$a) \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad a_3 \neq 0,$$

un plano no paralelo al eje x_3 . Se llama *orientación en el plano, subordinada por la orientación dada en el espacio*, a la definida por la indicatriz (A, B, C) , siendo A, B, C los puntos de intersección con el plano de las paralelas al eje x_3 incidentes con los puntos O, U_1, U_2 , y $[\overrightarrow{OU_1}] = \mathbf{u}_1$, $[\overrightarrow{OU_2}] = \mathbf{u}_2$. Si (A', B', C') es otra indicatriz del plano, demostrar que, si A'_1, B'_1, C'_1 son las proyecciones de A', B', C' sobre el plano $x_3 = 0$, se verifica que

$$(A, B, C) R (A' B' C') \Leftrightarrow (O U_1 U_2) R (A'_1, B'_1, C'_1).$$

557. Si $(A B C)$ es la orientación subordinada en el plano a (ej. anterior) por la orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ del espacio, demostrar que $(A B C X) R (A B C Y) \Leftrightarrow X$ pertenece al mismo semiespacio de borde a que Y .

§ 3. EL ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO ORDINARIO

1. Multiplicación escalar de dos vectores libres.—Dados dos vectores libres, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, se llama *producto escalar*, y se representa por $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, o bien $\mathbf{x} \mathbf{y}$, al siguiente número real (*):

$$(1) \quad \mathbf{x} \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR.—I. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

$$\text{II. } (a \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (a \mathbf{y}).$$

$$\text{III. } \mathbf{x} (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \mathbf{y} + \mathbf{x} \mathbf{z} = (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \mathbf{x}.$$

$$\text{IV. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0, \forall \mathbf{x} \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

DEMOSTRACIÓN.—I. $\mathbf{x} \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y}| |\mathbf{x}| \cos (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

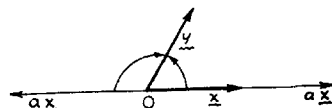
$$\text{II. } (a \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = |a \mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos (a \mathbf{x}, \mathbf{y}) = |a| |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos (a \mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Si $a > 0$ se verifica que $\mathbf{x} \uparrow a \mathbf{x}$, de donde

$$a \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}.$$

Si $a < 0$ se verifica (fig. 57) $\mathbf{x} \downarrow a \mathbf{x}$, de donde $a \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = -(\pi - \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$, luego

$$\cos (a \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos (\pi - \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = -\cos (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$



Fis. 57.

luego, en los dos casos es $|a| \cos (a \mathbf{x}, \mathbf{y}) = a \cos (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, y, por tanto:

$$|a| |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos (a \mathbf{x}, \mathbf{y}) = a (|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = a (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

III. Sea $\overrightarrow{OA} \in \mathbf{y}$, $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{z}$, $\overrightarrow{OB} \in \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\overrightarrow{OC} \in \mathbf{x}$. Trazando por A y B planos perpendiculares a OC y llamando A' y B' a las intersecciones de este plano con OC (fig. 58), se verifica:

$$[\overrightarrow{OA'}] + [\overrightarrow{A'B'}] = [\overrightarrow{OB'}],$$

(*) Suponemos en este § conocido del lector el número real. (Véase 2, § 1, Cap. V.)

de donde:

$$|y| \cos(x, y) + |z| \cos(x, z) = |y + z| \cos(x, y + z),$$

y, multiplicando por $|x|$, resulta III.

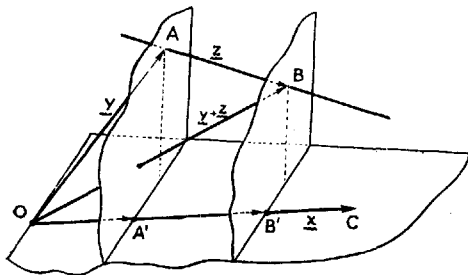


Fig. 58.

IV. Si fuese $a \neq 0$, tomando x paralelo a a y unitario, resultaría $x \cdot a = |a| = 0$, contradicción.

1. La condición necesaria y suficiente para que dos vectores x e y , ambos distintos del vector cero, sean ortogonales, es que su producto escalar sea cero:

$$(2) \quad |x| \neq 0, |y| \neq 0, x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x \perp y.$$

Al producto escalar de un vector por sí mismo se le llama *cuadrado del vector*. Por consiguiente:

$$(3) \quad x^2 = x \cdot x = |x|^2.$$

De (3) se deduce:

$$(4) \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Análogamente, de la definición (1) de producto escalar se deduce:

$$(5) \quad \cos(x, y) = \frac{x \cdot y}{|x||y|}$$

las fórmulas (4) y (5) permiten medir distancias y ángulos en el espacio.

Un vector se llama *unitario* cuando su módulo es igual a la unidad. Luego,

$$(6) \quad u \text{ es unitario} \Leftrightarrow |u| = 1 \Leftrightarrow u^2 = 1.$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR.—Sea $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ un sistema de referencia cartesiano. Sean

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 \quad \text{e} \quad y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$$

dos vectores libres arbitrarios. De las propiedades anteriores, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot (y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + y_3 \mathbf{u}_3) \stackrel{\text{III}}{=} \mathbf{x} (y_1 \mathbf{u}_1) + \mathbf{x} (y_2 \mathbf{u}_2) + \mathbf{x} (y_3 \mathbf{u}_3) \stackrel{\text{II}}{=} \\ &= y_1 (\mathbf{x} \mathbf{u}_1) + y_2 (\mathbf{x} \mathbf{u}_2) + y_3 (\mathbf{x} \mathbf{u}_3) \stackrel{\text{III}}{=} y_1 [(x_1 \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + (x_2 \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 + (x_3 \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_1] \\ &+ y_2 [(x_1 \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_2 + (x_2 \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 + (x_3 \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_2] + y_3 [(x_1 \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_3 + (x_2 \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_3 + (x_3 \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_3] \\ &\stackrel{\text{II, I}}{=} x_1 y_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + x_2 y_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) + x_3 y_3 (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2) \\ &+ (x_1 y_3 + x_3 y_1) (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3) + (x_2 y_3 + x_3 y_2) (\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3), \end{aligned}$$

que es la expresión analítica del producto escalar respecto de $\mathbb{R}$. Poniendo:

$$(7) \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = g_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3,$$

la fórmula anterior puede escribirse del siguiente modo:

$$(8) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i y_j = (x_1, x_2, x_3) g (y_1, y_2, y_3)', \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

2. La multiplicación escalar de vectores es un tensor simétrico de segundo orden. Es consecuencia de las propiedades II y III, que establecen que el producto escalar es una aplicación bilineal de $V \times V$ en $\mathbb{R}$. La simetría es consecuencia de I. Las coordenadas del tensor producto escalar, respecto de $\mathbb{R}$, son las g_{ij} definidas en (7).

En particular, de (8) se deduce:

$$(9) \quad |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} x_i x_j = (x_1, x_2, x_3) g (x_1, x_2, x_3)'.$$

DEFINICIÓN.—Se llama *base métrica* u *ortonormal* del espacio vectorial, a toda base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ tal que:

$$(10) \quad |\mathbf{u}_i| = 1, \quad \mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

siendo δ_{ij} las δ de Kronecker.

Respecto de una base métrica, las coordenadas g_{ij} , del tensor producto escalar, son iguales a las δ_{ij} , en virtud de (7) y de (10), con lo que la expresión analítica (8) del producto escalar se reduce a:

$$(11) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = (x_1, x_2, x_3) I (y_1, y_2, y_3)'$$

y el módulo de un vector a:

$$(12) \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

En lo que sigue emplearemos siempre bases métricas.

EJERCICIOS:

558. Demostrar que el conjunto de todos los vectores ortogonales a los vectores de una recta vectorial es un plano vectorial y el conjunto de todos los vectores ortogonales a un plano vectorial es una recta vectorial.

559. Hallar una base ortonormal uno de cuyos vectores sea el vector unitario $\mathbf{v}_1$, $|\mathbf{v}_1| = 1$.

560. Dado un vector libre $\mathbf{v}$ hallar otro que tenga su misma dirección y sea unitario.

2. Multiplicación vectorial de dos vectores libres.

DEFINICIÓN 2.—Se llama *producto vectorial de dos vectores libres*, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, y se representa por $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, al siguiente vector libre:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad |\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| |\sin(\mathbf{x}, \mathbf{y})|. \\ 2. \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y} \perp \mathbf{y}. \\ 3. \quad \text{Si } (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \text{ es una indicatriz del espacio vectorial orientado, la orientación } (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) \text{ es igual a la orientación } (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3). \end{array} \right.$$

3. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO VECTORIAL.—Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base métrica y sea

$$\mathbf{z} = z_1 \mathbf{u}_1 + z_2 \mathbf{u}_2 + z_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + y_3 \mathbf{u}_3.$$

La condición 1 proporciona:

$$(14) \quad \begin{aligned} z^2 = |\mathbf{z}|^2 &= |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 \sin^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 [1 - \cos^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ &= \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 - (|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 = \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 + x_3^2 y_2^2 - 2x_1 y_1 x_2 y_2 \\ &\quad - 2x_1 y_1 x_3 y_3 - 2x_2 y_2 x_3 y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 y_1 x_2 y_2) + (x_1^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 - 2x_1 y_1 x_3 y_3) \\
&\quad + (x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_2^2 - 2x_2 y_2 x_3 y_3) \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2.
\end{aligned}$$

La segunda condición proporciona:

$$\begin{cases} x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0. \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0. \end{cases}$$

de donde:

$$(15) \quad z_1 = \lambda \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad z_2 = \lambda \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \quad z_3 = \lambda \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

De (14) y (15) resulta:

$$(16) \quad \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Tomando como orientación del espacio la definida por la indicatriz $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, se obtiene, en virtud de (15) y de la tercera condición:

$$\text{sig.} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \lambda \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & \lambda \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} & \lambda \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +,$$

de donde

$$\text{sig.} \quad \lambda \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 \right) = +,$$

y como, por ser las x y las y reales, el paréntesis es positivo, resulta:

$$(17) \quad \text{sig.} (\lambda) = +.$$

De (15), (16) y (17) resulta finalmente:

$$(18) \quad \boxed{\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3,}$$

que es la expresión analítica del producto vectorial.

4. PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL.—I. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$. Esta propiedad se designa con el nombre de *anticonmutatividad*

II. Si λ es un número real y $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores libres cualesquiera,

$$(\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}).$$

III. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ son tres vectores libres arbitrarios,

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}, \quad (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{x} + \mathbf{z} \times \mathbf{x}.$$

IV. $\mathbf{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

V. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \iff \mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$.

VI. $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \mathbf{z}) \mathbf{y} - (\mathbf{x} \mathbf{y}) \mathbf{z}, (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{z} \mathbf{x}) \mathbf{y} - (\mathbf{z} \mathbf{y}) \mathbf{x}$.

VII. El producto vectorial no es asociativo.

DEMOSTRACIÓN.—I. De (18) se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 \\ &= - \left[\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 \right] = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x}). \end{aligned}$$

II. De (18) se deduce:

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} &= \begin{vmatrix} \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} \lambda x_3 & \lambda x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 \\ &= \lambda \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 \right] = \lambda (\mathbf{x} \times \mathbf{y}). \end{aligned}$$

análogamente la segunda igualdad.

III. De (18) se deduce:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 + z_3 & y_1 + z_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 \\ &= \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 \right] \end{aligned}$$

$$+ \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} u_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} u_3 \right] \\ = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{z}).$$

la segunda relación es consecuencia inmediata de la anterior y de I.

IV. La segunda fila de los determinantes de (18) es cero.

V.

$$r \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

VI.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} u_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} u_3 \\ &= (x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3) u_1 + (x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1) u_2 \\ &\quad + (x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2) u_3 \\ &= [y_1 (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_1 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)] u_1 + [y_2 (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) \\ &\quad - z_2 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)] u_2 + [y_3 (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_3 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)] u_3 \\ &= (\mathbf{x} \mathbf{z}) (y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3) - (\mathbf{x} \mathbf{y}) (z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3) = (\mathbf{x} \mathbf{z}) \mathbf{y} - (\mathbf{x} \mathbf{y}) \mathbf{z} \\ &(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = -[\mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y})] = \mathbf{z} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{z} \mathbf{x}) \mathbf{y} - (\mathbf{z} \mathbf{y}) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

VII. Es consecuencia inmediata de VI.

3. Producto mixto de tres vectores.—Se llama *producto mixto* de tres vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, y se representa por $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, al producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos:

$$(19) \quad \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}).$$

1. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO MIXTO.—De (19), (11) y (18) se deduce:

$$(20) \quad \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO MIXTO.—I.

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} = \{\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}\} = \{\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\} = -\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\} = -\{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}\} = -\{\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}\}.$$

II. $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} = 0 \iff \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ son linealmente dependientes.

III. Si $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OY} \in \mathbf{y}$, $\overrightarrow{OZ} \in \mathbf{z}$, siendo O un punto arbitrario, trazando por X, Y, Z (fig. 59) planos paralelos a OYZ, OXZ y OXY, respectivamente, se obtiene un paralelepípedo, que representaremos por $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, ya que repitiendo la construcción en otro punto O' el paralelepípedo que se obtiene es igual al anterior en una traslación. Se verifica que

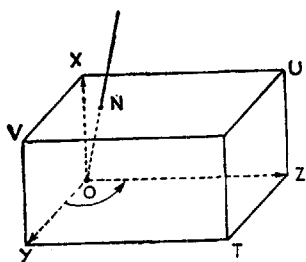


Fig. 59.

$$(21) \quad \text{vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}|.$$

IV. La multiplicación mixta es una aplicación trilineal.

DEMOSTRACIÓN.—I. Es una consecuencia de la expresión (20).

II. Es la consecuencia de (20) y de (Cons. III, Teor. 1, 2, § 3, Cap. II).

III.

$$\begin{aligned} |\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}| &= |\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y} \times \mathbf{z}| |\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})| \\ &= |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| |\mathbf{z}| |\sin(\mathbf{y}, \mathbf{z})| |\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})| \\ &= [|\mathbf{x}| |\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z})|] \text{ár}(\text{OYTZ}) = \text{ON} \cdot \text{ár}(\text{OYTZ}) \\ &= \text{vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z}\} &= \begin{vmatrix} x_1 + x'_1 & x_2 + x'_2 & x_3 + x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} + \{\mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{z}\}. \end{aligned}$$

En virtud de I esta propiedad es también cierta respecto de los otros vectores.

$$\{\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} = \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \lambda \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}.$$

y, en virtud de I, esta propiedad es también cierta para los otros dos vectores.

3. Identidad de Lagrange.

$$(22) \quad (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) (\mathbf{z} \times \mathbf{t}) = (\mathbf{x} \mathbf{z}) (\mathbf{y} \mathbf{t}) - (\mathbf{x} \mathbf{t}) (\mathbf{y} \mathbf{z}).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) (\mathbf{z} \times \mathbf{t}) &= \{ \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t} \} = \{ \mathbf{z}, \mathbf{t}, \mathbf{x} \times \mathbf{y} \} \\ &= \mathbf{z} \cdot [\mathbf{t} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y})] = \mathbf{z} \cdot [(\mathbf{t} \mathbf{y}) \mathbf{x} - (\mathbf{t} \mathbf{x}) \mathbf{y}] = (\mathbf{x} \mathbf{z}) (\mathbf{y} \mathbf{t}) - (\mathbf{x} \mathbf{t}) (\mathbf{y} \mathbf{z}). \end{aligned}$$

$$4. \quad (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{t}) = \{ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t} \} \mathbf{z} - \{ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \} \mathbf{t}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{t}) = [(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}] \mathbf{z} - [(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}] \mathbf{t} = \{ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t} \} \mathbf{z} - \{ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \} \mathbf{t}.$$

EJERCICIOS:

561. Hallar el vector libre unitario ortogonal a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{y} = (-4, 3, 2)$.

562. Hallar todos los vectores coplanarios con los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ del ejercicio anterior.

563. Hallar todos los vectores coplanarios con $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{b} = (2, 0, -5)$ y ortogonales a $\mathbf{c} = (3, 4, -1)$.

564. Calcular el área del triángulo ABC, $\mathbf{A} = (4, 3, -1)$, $\mathbf{B} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{C} = (-3, 2, 5)$ (fig. 60).

565. Calcular el volumen del tetraedro ABCD, siendo $\mathbf{A} = (1, 4, -1)$, $\mathbf{B} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{C} = (3, -4, 2)$, $\mathbf{D} = (5, 0, 1)$.

566. Hallar la ecuación del plano vectorial incidente con el vector $\mathbf{z} = (4, -2, 1)$ y perpendicular al plano determinado por los vectores $\mathbf{x} = (3, -2, 3)$, $\mathbf{y} = (4, -1, 3)$.

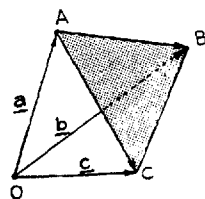


Fig. 60.

§ 4. EL ESPACIO EUCLIDEO

1. **El plano euclídeo.**—En lo que sigue supondremos que el sistema de referencia $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es métrico, esto es, tal que $\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{u}_2^2 = 1$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. Por consiguiente, el producto escalar de dos vectores: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2$, $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2$, viene dado por:

$$(1) \quad \mathbf{x} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

de donde,

(2)

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

(3)

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}.$$

Las fórmulas (2) y (3) permiten resolver todos los problemas de medida de distancias y ángulos en el plano euclídeo.

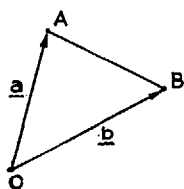


Fig. 61.

1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ (fig. 61):

$$(4) \quad \text{dist.}(A, B) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

2. VECTOR PARALELO A UNA RECTA.—Si la recta viene dada en forma explícita:

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda d_1, \\ x_2 = a_2 + \lambda d_2, \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \frac{x_1 - a_1}{d_1} = \frac{x_2 - a_2}{d_2},$$

el vector $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ es paralelo a la recta.

Si la recta viene dada por su ecuación implícita:

$$(6) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0,$$

si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ son dos puntos de la recta (6) se verificará que el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ será paralelo a la recta (6). Ahora bien, por ser (6) incidente con A y B se verifica:

$$(7) \quad \begin{cases} u_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 = 0 \\ u_0 + u_1 b_1 + u_2 b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 (b_1 - a_1) + u_2 (b_2 - a_2) = 0.$$

De (7) se deduce que

$$(8) \quad \mathbf{b} - \mathbf{a} = \lambda (u_2, -u_1),$$

luego los vectores (8) son paralelos a la recta (6).

3. VECTOR PERPENDICULAR A UNA RECTA.—Si $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es un vector paralelo a una recta, el vector $\mathbf{v}$ tal que

$$\mathbf{v}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{v} = (b_2 - a_2, a_1 - b_1)$$

será perpendicular a la recta. Si la recta viene dada en forma explícita (5), se verifica que

$$(9) \quad \mathbf{v} = (a_2, -a_1) \perp \text{a la recta (5).}$$

Si la recta viene dada en forma implícita (6), se verifica:

$$(10) \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2) \perp \text{a la recta (6).}$$

Al vector unitario y perpendicular a una recta le llamaremos *vector normal a la recta*.

EJERCICIOS:

567. Hallar vectores paralelos a las siguientes rectas: a) A B. $\mathbf{A} = (3, -2)$, $\mathbf{B} = (1, 1)$.
 b) $x_1 = 5 - 3\lambda$, $x_2 = 1 + 4\lambda$. c) $2 + 5x_1 - 7x_2 = 0$. d) $x_2 = 4x_1 - 1$.
 568. Hallar vectores perpendiculares a las rectas del ejercicio anterior.
 569. Hallar vectores unitarios y perpendiculares a las rectas del ejercicio 567.

4. ANGULO DE DOS RECTAS.—Se llama *ángulo de dos rectas* al menor de los dos ángulos suplementarios que forman las dos rectas. Por consiguiente, el ángulo de dos rectas es menor o igual a un recto y su coseno es positivo.

Sean las rectas r y s .

a) $\mathbf{r}$ es un vector paralelo a r y $\mathbf{s}$ es un vector paralelo a s . De (3) se deduce:

$$(11) \quad \cos(r, s) = \left| \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{s}|} \right|.$$

Por consiguiente, la *condición de perpendicularidad* de las dos rectas es:

$$(12) \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 0.$$

EJERCICIOS:

570. Calcular el ángulo de las rectas A B y C D, $\mathbf{A} = (2, 1)$, $\mathbf{B} = (3, 4)$, $\mathbf{C} = (1, -1)$, $\mathbf{D} = (5, 3)$.

571. Calcular el ángulo de las rectas A B, $A = (3, 1)$, $B = (5, -3)$ y

$$r) \begin{cases} x_1 = 2 - 2\lambda, \\ x_2 = 1 + 3\lambda. \end{cases}$$

572. Calcular el ángulo de las rectas r y s ,

$$r) \begin{cases} x_1 = 3 - 2\lambda \\ x_2 = 2 + 5\lambda \end{cases} \quad s) \quad 3 - 2x_1 + 4x_2 = 0.$$

573. Calcular el ángulo de las rectas r y s ,

$$r) \quad 4 + 5x_1 - 6x_2 = 0; \quad s) \quad 3 - 2x_1 + x_2 = 0.$$

574. Ecuación de la recta incidente con $P = (2, -5)$ y perpendicular a la recta A B, $A = (1, 3)$, $B = (-2, 5)$.

575. Ecuación de la recta incidente con el punto de intersección de la recta $r) -2 + 4x_1 - x_2 = 0$, $s) 1 + 2x_1 + 3x_2 = 0$ y perpendicular a la recta $t) 4 - 5x_1 + 2x_2 = 0$.

b) $\mathbf{r}$ es un vector perpendicular a r y $\mathbf{s}$ un vector perpendicular a s . El ángulo que forman $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ es igual o suplementario al ángulo de las rectas r y s , pero si se toma el valor absoluto de $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, éste será igual al coseno del ángulo que forman las rectas r y s , luego:

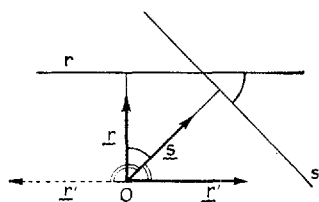


Fig. 62.

$$(13) \quad \cos(r, s) = \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}|}{|\mathbf{r}| |\mathbf{s}|}.$$

Por consiguiente, la *condición de perpendicularidad* será: (13') $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 0$.

EJERCICIOS:

576. Ángulo que forman las rectas r y s : $r) 3 - 2x_1 + 5x_2 = 0$, $s) 4 + 3x_1 - 2x_2 = 0$.

577. Hallar las ecuaciones de las rectas incidentes con el punto $P = (1, 1)$ de la recta $r) 2 - 3x_1 + x_2 = 0$ y que forman con ella ángulos iguales al ángulo que forman las rectas $a)$ y $b)$:

$$a) \quad 4 - 2x_1 + 4x_2 = 0, \quad b) \quad 3 + 3x_1 - 4x_2 = 0.$$

578. Hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta

$$u) \quad 3 - 4x_1 + 3x_2 = 0,$$

en la simetría de eje

$$e) \quad 1 + x_1 + 2x_2 = 0$$

c) $\mathbf{r}'$ es un vector paralelo a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ un vector perpendicular a s . El ángulo $(\mathbf{r}', \mathbf{s})$ es complementario del ángulo de las dos rectas, o es igual a este ángulo más un recto:

$$(\mathbf{r}', \mathbf{s}) = \frac{\pi}{2} \pm (r, s),$$

en cualquiera de los casos es

$$(14) \quad \text{sen } (r, s) = |\cos (\mathbf{r}', \mathbf{s})| = \frac{|\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}|}{|\mathbf{r}'| |\mathbf{s}|} \quad (r, s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, la *condición de perpendicularidad* en este caso es

$$(14') \quad \mathbf{r}' \parallel \mathbf{s}.$$

EJERCICIOS:

579. Calcular el ángulo de las rectas r y s :

$$r) \quad x_1 = 4 + 5\lambda, \quad x_2 = 1 - 2\lambda; \quad s) \quad 3 + 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

580. Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto $A = (4, -5)$ respecto de la recta $e) 2 - 3x_1 + 2x_2 = 0$.

581. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del cuadrado una de cuyas diagonales es AC , $A = (1, 2)$, $C = (4, 8)$.

582. Hallar las ecuaciones de la simetría de eje e :

$$e: \quad e_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 = 0.$$

5. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.—Se llama *ecuación normal* de la recta a la ecuación

$$(15) \quad n_0 + n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0$$

tal que el vector normal $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ sea unitario, esto es,

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = 1.$$

Por consiguiente, dada la ecuación general de una recta:

$$(16) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0,$$

para obtener la ecuación normal basta dividir por el módulo del vector perpendicular $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Por tanto:

$$(17) \quad n_0 = \frac{u_0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad n_1 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad n_2 = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}.$$

Llamando α al ángulo que forma el eje x_1 con la normal a la recta por el origen, y recordando que $|\mathbf{n}| = 1$, resulta que:

$$n_1 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \cos \alpha, \quad n_2 = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \sin \alpha = \cos \beta.$$

A $(\cos \alpha, \cos \beta) = (n_1, n_2)$ se les llaman *cosenos directores de la recta*.

Si X es un punto arbitrario de la recta (15) y P es el punto de intersección de la perpendicular a u trazada por el origen O (fig. 63), se verifica que:

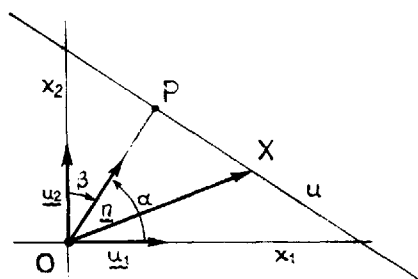


Fig. 63.

$$(18) \quad \text{dist. } (O, P) = \text{dist. } (O, u) = [OX]$$

$$|\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x})| = |\mathbf{x}| |\mathbf{n}| |\cos(\alpha)| = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}|$$

$$= |n_1 x_1 + n_2 x_2| = |-n_0| = \left| \frac{-u_0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right|.$$

De (18) se deduce que: *la distancia del origen de coordenadas a una recta u es igual al valor absoluto del término independiente de su ecuación normal*. En algunas ocasiones interesa distinguir los puntos de un semiplano de los del otro, de los dos cuyo borde es la recta; para ello, conviene emplear distancias con signo, estableciendo la siguiente:

DEFINICIÓN 1.—Se llama *distancia orientada del origen de coordenadas a una recta r* , al término independiente de su ecuación normal. (Obsérvese que igualmente se podría haber definido al término independiente cambiado de signo.)

Sea la recta u , de ecuación (16) y el punto P , de coordenadas (p_1, p_2) . Sea Q

el pie de la perpendicular trazada a u por P y B y A los pies de la perpendicular trazada por O a u y a su paralela v trazada por P (fig. 64). La ecuación de v es:

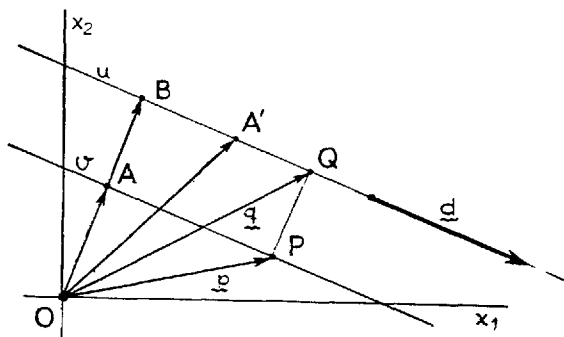


Fig. 64.

(19)

$$-u_1 p_1 - u_2 p_2 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0,$$

las ecuaciones normales de u y de v son, por tanto:

$$u: \frac{u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 0, \quad v: \frac{-u_1 p_1 - u_2 p_2 + u_1 x_1 + u_2 x_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 0,$$

de donde:

$$(20) \quad \text{dist. (O, } u) = \frac{u_0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad \text{dist. (O, } v) = \frac{-u_1 p_1 - u_2 p_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}.$$

por consiguiente, teniendo en cuenta (20), resulta:

$$(21) \quad \begin{aligned} \text{dist. (P, } u) &= \text{dist. (P, } Q) = \text{dist. (A, B) = dist. (O, B) - dist. (O, A) \\ &= \text{dist. (O, } u) - \text{dist. (O, } v) = \frac{u_0 + u_1 p_1 + u_2 p_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}. \end{aligned}$$

La distancia dada por (21) es distancia orientada, si se desea obtener la distancia ordinaria habrá que tomar el valor absoluto.

EJERCICIOS:

583. Calcular la distancia orientada del punto $P = (-3, 2)$ a la recta $r: -1 + x_1 + 4x_2 = 0$, y decir si P se encuentra en el mismo o en distinto semiplano que el origen de coordenadas.

584. Demostrar que el producto de un lado de un triángulo por la altura correspondiente a dicho lado es constante.

Si la recta u viene definida en forma paramétrica, dícese que las *ecuaciones paramétricas*

$$(22) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda d_1, \\ x_2 = a_2 + \lambda d_2, \end{cases}$$

son *normales* cuando el vector $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ es unitario: $|\mathbf{d}| = 1$. Si $\mathbf{p}$ es el vector de posición del punto P y $\mathbf{q}$ el del punto Q (fig. 64), pie de la perpendicular trazada por P a u , el vector $[\overrightarrow{PQ}]$ será perpendicular al vector $\mathbf{d}$, luego:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{PQ}] \cdot \mathbf{d} = 0 &\Leftrightarrow (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{d} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{d} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{a} + [(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}] \mathbf{d}, \end{aligned}$$

luego:

$$(23) \quad \text{dist. (P, u)} = \text{dist. (P, Q)} = |\overrightarrow{PQ}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}| = \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2} \\ = \sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 - [(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}]^2}.$$

6. ÁREA DE UN TRIÁNGULO.—Sea el triángulo A B C, siendo (a_1) , (b_1) , (c_1) las coordenadas de A, B, C, respectivamente, se verifica que

$$(24) \quad \text{ár. (A B C)} = \frac{1}{2} \text{dist. (B C)}, \quad \text{dist. (A, B C)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

El área definida por (24) es un área orientada, esto es, con signo; si se desea el área en sentido ordinario habrá que tomar el valor absoluto del último miembro de (24).

Si dos triángulos pertenecen a la misma orientación, o dicho de modo ordinario, tienen la misma orientación, sus áreas tienen el mismo signo, y recíprocamente.

EJERCICIOS:

585. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado.

586. ¿Es toda ecuación de la forma

$$x_1^2 + x_2^2 - 2a x_1 - 2b x_2 + c = 0,$$

la ecuación de una circunferencia? (Se supone, como siempre, que el sistema de referencia es ortonormal.)

587. Hallar los puntos comunes a dos circunferencias.

588. Comprobar que los puntos A, B, C, D son vértices de un trapecio y calcular su área. $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, $D = (c_1 + \lambda(b_1 - a_1), c_2 + \lambda(b_2 - a_2))$.

589. Comprobar que el área de un cuadrilátero convexo cuyas diagonales son A C y B D viene dada por:

$$\text{ár. (A B C D)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 \end{vmatrix}.$$

590. Como es sabido, se llama *elipse* al conjunto de puntos de un plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F y F', llamados focos, es constante. Hallar la ecuación de la elipse.

591. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de las rectas

$$a: a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

$$b: b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0.$$

592. Hallar la ecuación de la hipérbola. (Hipérbola es el conjunto de puntos de un plano tal que el valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.)

593. Se llama *Ovaló de Cassini* al conjunto de puntos del plano tal que el producto de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Hallar la ecuación de los óvalos de Cassini.

594. Un *óvalo de Descartes* es el conjunto de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos, F, F' , multiplicadas por números fijos a, b , dan suma o diferencia constante. Hallar la ecuación de un óvalo de Descartes.

7. CAMBIO DE COORDENADAS CARTESIANAS.—Sean $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $R' = \{O'; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dos sistemas de referencia métricos en el plano: $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$. Sea X un punto arbitrario del plano, de coordenadas (x_1, x_2) respecto de R y (x_1^*, x_2^*) respecto de R' . Sea

$$(25) \quad [\overrightarrow{O'O}] = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2,$$

$$(26) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{u}_2 = a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2. \end{cases}$$

se verifica que

$$[\overrightarrow{O'X}] = [\overrightarrow{O'O}] + [\overrightarrow{OX}]$$

de donde

$$\begin{aligned} x_1^* \mathbf{v}_1 + x_2^* \mathbf{v}_2 &= a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + x_1 (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2) + x_2 (a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2) \\ &= (a_1 + a_{11} x_1 + a_{21} x_2) \mathbf{v}_1 + (a_2 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2) \mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene:

$$(27) \quad (1, x_1^*, x_2^*) = (1, x_1, x_2) A; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, en el caso actual resulta, multiplicando $\mathbf{u}_i$, en (26), por $\mathbf{v}_j$:

$$(28) \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = a_{ij} \mathbf{v}_j^2 = a_{ij}; \quad i, j = 1, 2.$$

Llamando φ al ángulo que forma $\mathbf{u}_1$ con $\mathbf{v}_1$, pueden presentarse los casos siguientes (fig. 65):

a) (Fig. 65, a)). La orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ es la misma que la orientación $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. En este caso se verifica que:

$$a_{11} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = |\mathbf{u}_1| |\mathbf{v}_1| \cos \varphi = \cos \varphi, \quad a_{12} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{u}_1| |\mathbf{v}_2| \cos (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = -\sin \varphi$$

$$a_{21} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = |\mathbf{u}_2| |\mathbf{v}_1| \cos (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) = \sin \varphi, \quad a_{22} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \cos (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = \cos \varphi.$$

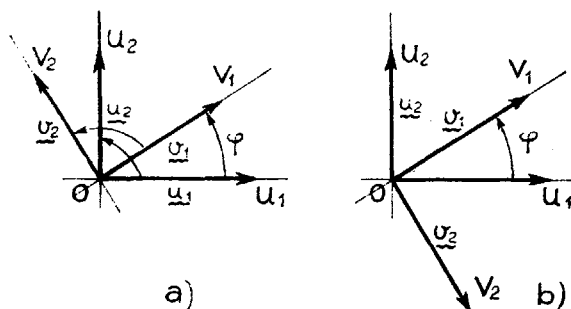


Fig. 65.

con lo que la matriz A se escribe en la siguiente forma:

$$(29) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad |A| = 1.$$

b) (Fig. 65 b)). La orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ es opuesta a la orientación $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. En este caso se verifica que:

$$a_{11} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \cos \varphi, \quad a_{12} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \cos (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = \sin \varphi.$$

$$a_{21} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \cos (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) = \sin \varphi, \quad a_{22} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \cos (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = \cos (\pi - \varphi) = -\cos \varphi,$$

con lo que la matriz A es la siguiente:

$$(30) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad |A| = -1.$$

EJERCICIOS:

505. Escribir las fórmulas de cambio de coordenadas correspondientes al paso del sistema métrico $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, al sistema métrico $R^* = \{O'; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, siendo orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{orientación } (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1} = \frac{\pi}{4}$, coordenadas de $O' = (-3, 5)$.

596. Hallar las fórmulas del cambio de coordenadas correspondientes al paso del sistema métrico $R = \{O; u_1, u_2\}$, al $R^* = \{O'; v_1, v_2\}$, sabiendo que el nuevo eje x_1^* tiene por ecuación, respecto de R ,

$$5 + 3x_1 - 4x_2 = 0,$$

que el eje x_2^* es el perpendicular al anterior por el punto $(5, 1)$, que el ángulo $u_1 v_1$ es agudo y que la orientación (u_1, u_2) es la misma que la (v_1, v_2) .

8. COORDENADAS POLARES EN EL PLANO EUCLÍDEO.—Sea x una semirrecta de origen O (fig. 66) y un sentido positivo de recorrido, σ , en el haz de semirrectas de origen O . Si X es un punto del plano, distinto de O , se pueden asignar a X dos números (ρ, φ) , siendo ρ la distancia de X a O y φ el ángulo, contado en el sentido positivo, de la semirrecta origen x , con la semirrecta OX . Por consiguiente, se verifica que

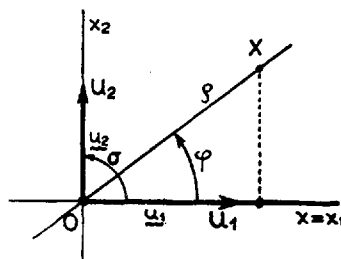


Fig. 66.

$$(31) \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Al par de números (ρ, φ) se les llama coordenadas polares de X respecto del sistema de referencia polar (O, x, σ) . Al punto O se le llama *polo* del sistema de referencia y a la semirrecta x *origen*. A cada punto distinto del polo le corresponde un único par de números que verifiquen (31). Al polo le corresponden infinitos pares $(0, \varphi)$, ya que φ puede tomar cualquier valor que verifique (31).

En ocasiones conviene tomar otros campos de variación de ρ y φ . Así, se puede tomar:

$$(32) \quad -\infty < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < \pi,$$

con el convenio de que cuando ρ es negativo, el punto se halla en la semirrecta opuesta a la semirrecta correspondiente al ángulo φ y a una distancia de O igual a $|\rho|$.

Si se toma un sistema de referencia ortonormal cuyo origen sea O , el semieje positivo de las x_1 coincide con x , y el semieje positivo de las x_2 sea tal que $\widehat{u_1 u_2} = +\frac{\pi}{2}$, si las coordenadas de X respecto de $R = \{O; u_1, u_2\}$ con (x_1, x_2) , se verifica que

$$(33) \quad \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi, \\ x_2 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

en donde ρ y φ están acotados por (31) o por (32), indistintamente. De (33) se deduce:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \operatorname{sen} \varphi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1}, \end{array} \right.$$

en donde φ y φ están acotados por (31). Para determinar φ es preciso atender a los signos de x_1 y x_2 .

EJERCICIOS:

597. Calcular las coordenadas polares del punto $P = (-2, -2)$.

598. Calcular las coordenadas polares del punto $P = (\sqrt{3}, -1)$.

599. Sea c una circunferencia de radio r , PO uno de sus diámetros, y la tangente en O , PZ una recta variable y Z el segundo punto de intersección con la circunferencia e Y el punto de intersección de PZ con la tangente y. A un lado y otro de Y se toman, en la recta PY , segmentos $YX = YX' = PZ$. Se llama cisoide de Diocles al conjunto de los puntos X y X' cuando varía la recta PZ . Hallar la ecuación de la cisoide.

600. *Conchoide de la recta o de Nicomedes* es el conjunto de los puntos X del plano tales que $XY = l$, siendo OY una recta variable incidente con O , Y el punto de intersección de esta recta con una recta fija y , no incidente con O , y X un punto incidente con la recta variable OY . Hallar la ecuación de la conchoide.

2. El espacio euclídeo.—Supondremos que el sistema de referencia $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es métrico, esto es, que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$.

Sean $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + y_3 \mathbf{u}_3$ dos vectores libres del espacio, se verificarán las siguientes fórmulas fundamentales:

(1)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

(2)

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3,$$

(3)

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$(4) \quad \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

que permiten medir distancias y ángulos en el espacio euclídeo.

1. DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $X = (x_1, x_2, x_3)$.

$$(5) \quad \text{dist.}(A, X) = |\overrightarrow{AX}| = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}.$$

EJERCICIOS:

601. Hallar la ecuación del conjunto de puntos del espacio cuyas distancias a un punto fijo, A , es igual a r . Este conjunto se llama superficie esférica de centro A y radio r .

602. ¿Son todas las ecuaciones de la forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2a_1 x_1 - 2a_2 x_2 - 2a_3 x_3 + a_4 = 0,$$

ecuaciones de una superficie esférica?

2. VECTOR PARALELO A UNA RECTA.—A) La recta viene dada en forma explícita:

$$(6) \quad r: \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda d_1, \\ x_2 = a_2 + \lambda d_2, \\ x_3 = a_3 + \lambda d_3. \end{cases}$$

El vector $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ es paralelo a la recta r .

B) La recta viene dada en forma implícita:

$$(7) \quad r: \begin{cases} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \\ v_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Por tratarse de una recta, el rango de la matriz de los coeficientes es dos. Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son dos puntos de r , el vector $[\overrightarrow{AB}]$ tiene la dirección de r , pero $[\overrightarrow{AB}]$ verifica las relaciones:

$$\begin{cases} u_1(b_1 - a_1) + u_2(b_2 - a_2) + u_3(b_3 - a_3) = 0, \\ v_1(b_1 - a_1) + v_2(b_2 - a_2) + v_3(b_3 - a_3) = 0, \end{cases}$$

de donde resulta que el vector:

$$(8) \quad \mathbf{d} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

tiene la dirección de la recta $\mathbf{r}$.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *ángulo de dos rectas* al menor de los ángulos que forman las dos rectas. Por consiguiente, el ángulo de dos rectas no es obtuso.

EJERCICIOS:

603. Calcular el ángulo de las siguientes rectas:

$$a) \begin{cases} x_1 = 2 - 3\lambda, \\ x_2 = 1 + 2\lambda, \\ x_3 = 4 - \lambda. \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 = 4\lambda, \\ x_2 = -3 + \lambda, \\ x_3 = 5 + 2\lambda. \end{cases}$$

604. Calcular el ángulo de las rectas: a) del ejercicio anterior, y

$$c) \begin{cases} 2 + x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 1 + 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

605. Calcular el ángulo de la recta c) del ejercicio anterior y la recta:

$$r) \begin{cases} 4 + 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3 - x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

606. Hallar las ecuaciones de la recta perpendicular y secante a la recta a) del ejercicio 603 e incidente con el plano:

$$\pi) \quad 5 + 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 0.$$

3. VECTOR PERPENDICULAR A UN PLANO.—A) *El plano está definido por sus ecuaciones explícitas:*

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1, \\ x_2 = a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2, \\ x_3 = a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3. \end{cases}$$

De (9) se deduce que los vectores $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ son paralelos al plano (9) y no paralelos entre sí, luego *el vector*:

$$(10) \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right),$$

es perpendicular al plano (9).

B) El plano está definido implícitamente por la ecuación:

$$(11) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Si $Y = (y_1, y_2, y_3)$ es otro punto del plano (11), se verifica:

$$u_0 + u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0,$$

y restando de (11), será:

$$u_1 (x_1 - y_1) + u_2 (x_2 - y_2) + u_3 (x_3 - y_3) = 0,$$

que expresa que el vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es perpendicular a todos los vectores $[\overrightarrow{YX}]$ de plano, luego es normal al plano:

$$(12) \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \perp (11).$$

DEFINICIÓN 2.—Se llama *ángulo de dos planos* al menor de los diedros que forman.

De esta definición se deduce que si $\mathbf{u} \perp u$ y $\mathbf{v} \perp v$, siendo u y v dos planos, se verifica que:

$$(13) \quad \cos(u, v) = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}.$$

Por consiguiente, la condición necesaria y suficiente de perpendicularidad de dos planos u y v es que (14) $u \perp v \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{u} \perp u, \mathbf{v} \perp v$.

EJERCICIOS:

607. Calcular el ángulo del plano ABC con el plano π , siendo $A = (1, -2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (-1, 5, 1)$,

$$\pi) \begin{cases} x_1 = 1 + 2\lambda + \mu, \\ x_2 = 2 - \lambda + 2\mu, \\ x_3 = -1 + 3\lambda + \mu. \end{cases}$$

608. Calcular el ángulo del plano π del ejercicio anterior con el plano:

$$\sigma) \quad 4 - 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

609. Ecuación del plano incidente con la recta a) del ejercicio 603 y perpendicular al plano σ del ejercicio 608.

610. Ecuación del plano incidente con la recta a) del ejercicio 604 y perpendicular al plano π del ejercicio 607.

611. Ecuaciones de los planos bisectores de los diedros formados por los planos de las ecuaciones de la recta a) del ejercicio 605.

612. Hallar las ecuaciones de los planos incidentes con la recta r que resulta de hacer $\mu = 0$ en la ecuación del plano π del ejercicio 607 y que forman con él ángulos de 30° .

4. ANGULO DE RECTA Y PLANO.—Se llama *ángulo de una recta r y un plano π* , al menor de los ángulos que forma

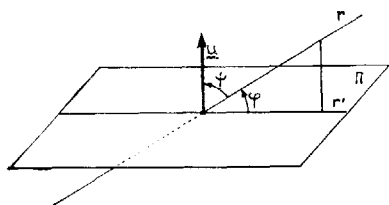


Fig. 67.

la recta con las rectas del plano. Este ángulo es, por tanto, el ángulo que forma la recta con su proyección ortogonal sobre el plano.

Si r' (fig. 67) es la proyección ortogonal de r sobre el plano π y u un vector normal al plano, se verifica que el ángulo φ , que forma la recta con el plano, es complementario del ángulo ψ que forma la recta con el vector u normal al plano; luego, si r es un vector paralelo a la recta, será:

$$(14) \quad \text{sen}(r, \pi) = \text{sen } \varphi = \cos(\psi) = |\cos(r, u)| = |\cos(r, u)| = \frac{|r \cdot u|}{|r||u|}.$$

La condición de perpendicularidad de la recta r y el plano π , será:

$$(15) \quad r \perp \pi \Leftrightarrow r \parallel u \Leftrightarrow r = \lambda u \Leftrightarrow r \times u = 0.$$

EJERCICIOS:

613. Calcular el ángulo que forma la recta a) del ejercicio 603 con el plano σ del ejercicio 608.

614. Calcular el ángulo de la recta a) del ejercicio 603 con el plano π del ejercicio 607.

615. Calcular el ángulo de la recta c) del ejercicio 604 con el plano π del ejercicio 606.

616. Ecuación del plano incidente con el punto $P = (5, -2, 4)$ y perpendicular a la recta b) del ejercicio 603.

617. Ecuación del plano incidente con el punto $Q = (-3, 6, 7)$ y perpendicular a la recta r del ejercicio 605.

618. Ecuaciones de la recta incidente con el punto $A = (-7, 3, -4)$ y perpendicular al plano π del ejercicio 606.

619. Ecuaciones de la recta incidente con el punto $B = (4, -8, 9)$ y perpendicular al plano π del ejercicio 607.

5. ECUACIÓN NORMAL DE PLANO.—La ecuación

$$(16) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

se llama *normal*, cuando el vector normal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es unitario. Por consiguiente, dada la ecuación

$$(17) \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

para obtener la ecuación normal del plano (17) bastará dividir por el módulo del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, esto es, la ecuación normal del plano (17) es:

$$(18) \quad \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 0.$$

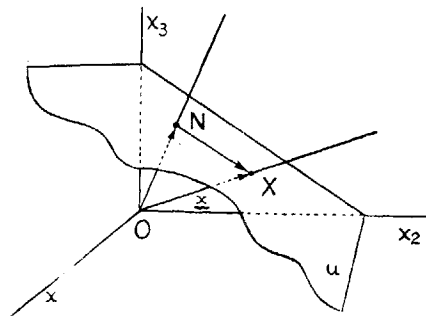


Fig. 68.

Si (16) es la ecuación normal del plano u (fig. 68), y si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, siendo $\mathbf{x}$ el vector de posición de un punto X del plano u , la ecuación (16) proporciona:

$$(19) \quad |u_0| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{x}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = [OX] \cdot \cos(\widehat{ONOX}) = [ON],$$

siendo ON la normal al plano trazada por O , luego: *El valor absoluto del término independiente de la ecuación normal del plano es igual a la distancia del origen de coordenadas al plano.*

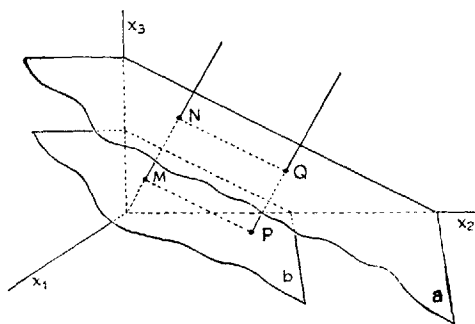


Fig. 69.

plano paralelo al plano a trazado por P . Se verifica (fig. 69)

$$(20) \quad \begin{aligned} \text{dist.}(P, a) &= \text{dist.}(P, Q) = \text{dist.}(M, N) \\ &= |\text{dist.}(ON) - \text{dist.}(OM)| = |\text{dist.}(O, a) - \text{dist.}(O, b)|. \end{aligned}$$

Se llama *distancia orientada* del origen de coordenadas al plano u al término independiente de su ecuación normal.

6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.—Sea el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y el plano a (17), sea b el

Ahora bien, el plano paralelo a a trazado por P es

$$(21) \quad -a_1 p_1 - a_2 p_2 - a_3 p_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

y su ecuación normal es:

$$(22) \quad \frac{-a_1 p_1 - a_2 p_2 - a_3 p_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 0,$$

luego

$$\text{dist. } (O, a) = \frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \text{dist. } (O, b) = \frac{-a_1 p_1 - a_2 p_2 - a_3 p_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

de donde, en virtud de (20),

$$(23) \quad \text{dist. } (P, a) = \left| \frac{a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|.$$

Se llama *distancia orientada del punto P al plano a* , al número:

$$(24) \quad \text{dist. } (P, a) = \frac{a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

EJERCICIOS:

620. Hallar la distancia del punto $P = (3, -1, 4)$ al plano π del ejercicio 607.

621. Hallar la distancia de la recta a a la recta b del ejercicio 603.

622. Calcular la distancia de la recta c del ejercicio 604 a la recta r del ejercicio 605.

623. Dado el tetraedro de vértices A, B, C, D , siendo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ y $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$, los vectores de posición de A, B, C, D , respectivamente, calcular la distancia de un vértice al plano de la cara opuesta.

624. Calcular la distancia entre dos aristas opuestas del tetraedro del ejercicio anterior.

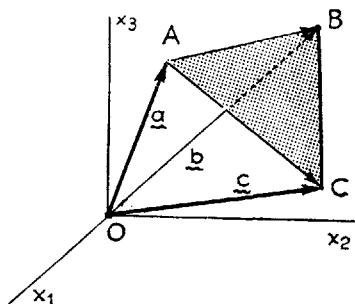


Fig. 70.

7. ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN EL ESPACIO.—Sea el triángulo ABC (fig. 70) y sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ los vectores de posición de A, B y C , respectivamente. Se verifica:

$$(25) \quad \text{área } (ABC) = \frac{1}{2} | [\overrightarrow{AB}] \times [\overrightarrow{AC}] |$$

$$= \frac{1}{2} | (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) |$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}}^2}$$

8. VOLUMEN DEL TETRAEDRO.—Sea el tetraedro $A B C D$ y sean

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3), \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$$

los vectores de posición de A, B, C, D , respectivamente. Trazando por los vértices del tetraedro planos paralelos a las caras opuestas, se obtiene el paralelepípedo $B C F D A E G H$ (fig. 71), cuyo volumen es el doble del prisma triangular $B C D A E H$ y el volumen de éste es, a su vez, el triple del volumen del tetraedro $A B C D$, luego:

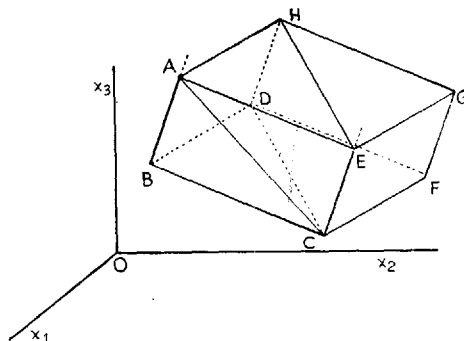


Fig. 71.

$$(26) \quad \text{vol. } (A B C D) = \frac{1}{6} \text{ vol. } (B C F D A E G H) = \frac{1}{6} \{ [\vec{B C}], [\vec{B D}], [\vec{B A}] \}$$

$$= \frac{1}{6} \{ \mathbf{c} - \mathbf{b}, \mathbf{d} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

El volumen definido por (26) viene afectado por un signo, por lo que se llama *volumen orientado*. Los tetraedros igualmente orientados tienen el volumen del mismo signo. Si se desea el volumen en el sentido ordinario, debe tomarse el valor absoluto de (26).

Teniendo en cuenta el ejercicio 624, resulta la siguiente expresión del volumen de un tetraedro:

$$(27) \quad \text{vol. } (A B C D) = \frac{1}{6} | [\vec{A B}] \times [\vec{C D}] | \text{ dist. } (A B, C D).$$

EJERCICIOS:

625. Calcular el volumen de un tetraedro $A B C D$ tal que $\text{dist. } (A B) = 2$, $\text{dist. } (C, D) = 3$ y las ecuaciones de $A B$ y $C D$ son:

$$A B: \begin{cases} 1 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad C D: \begin{cases} 2 + x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ -1 + 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

626. Calcular las alturas de un tetraedro conocidas las ecuaciones de los planos de sus caras.

9. CAMBIO DE COORDENADAS CARTESIANAS.—Sean $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $R' = \{O'; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dos sistemas de referencia métricos en el espacio: $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$. Sea X un punto arbitrario del espacio, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) respecto de R y (x_1^*, x_2^*, x_3^*) respecto de R' . Sea

$$(28) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{O'O} &= a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3, \\ (29) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 &= a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2 + a_{13} \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{u}_2 &= a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2 + a_{23} \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{u}_3 &= a_{31} \mathbf{v}_1 + a_{32} \mathbf{v}_2 + a_{33} \mathbf{v}_3. \end{cases} \end{aligned}$$

de

$$\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX},$$

se deduce que

$$\begin{aligned} x_1^* \mathbf{v}_1 + x_2^* \mathbf{v}_2 + x_3^* \mathbf{v}_3 &= a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 + x_1 (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2 + a_{13} \mathbf{v}_3) \\ &\quad + x_2 (a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2 + a_{23} \mathbf{v}_3) + x_3 (a_{31} \mathbf{v}_1 + a_{32} \mathbf{v}_2 + a_{33} \mathbf{v}_3), \end{aligned}$$

de donde:

$$(30) \quad (1, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, x_1, x_2, x_3) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, de (29) se deduce, multiplicando escalarmente por $\mathbf{v}_j$:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = a_{i1} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_j + a_{i2} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_j + a_{i3} \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_j = a_{ij},$$

y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = |\mathbf{u}_i| |\mathbf{v}_j| \cos(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \cos(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j),$$

resulta:

$$(31) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) & \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) & \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3) \\ 0 & \cos(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) & \cos(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) & \cos(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3) \\ 0 & \cos(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1) & \cos(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2) & \cos(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3) \end{pmatrix}.$$

De los nueve ángulos que figuran en la matriz A sólo hay tres independientes. Para obtenerlos, tomaremos representantes $\overrightarrow{OU_1}$, $\overrightarrow{OU_2}$, $\overrightarrow{OU_3}$, $\overrightarrow{OV_1}$, $\overrightarrow{OV_2}$ y $\overrightarrow{OV_3}$ de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, respectivamente (fig. 72). Sea OW_1 la recta de intersección de los planos OU_1U_2 y OV_1V_2 . Tomaremos en esta recta un vector unitario $\overrightarrow{OW_1}$ tal que el sentido $(\mathbf{u}_1, [\overrightarrow{OW_1}])$ sea igual al sentido $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Sea $\mathbf{w}_1 = [\overrightarrow{OW_1}]$ y sea $\mathbf{w}_2$ un vector unitario, perpendicular a $\mathbf{w}_1$, incidente con el plano $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y tal que orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{orientación}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$. Finalmente, sea $\mathbf{w}_3$ un vector unitario perpendicular a $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ y tal que orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \text{orientación}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, de donde $\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3$.

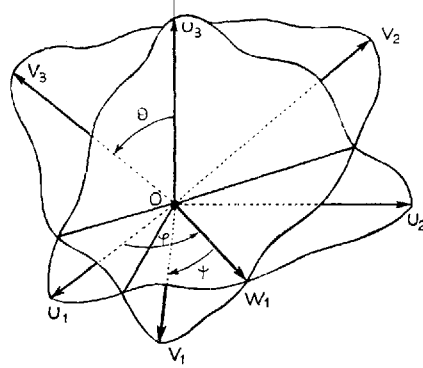


Fig. 72.

Sea $\mathbf{t}$ un vector unitario perpendicular a $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{v}_3$ y tal que orientación $(\mathbf{w}_1, \mathbf{t}, \mathbf{v}_3) = \text{orientación}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ y, finalmente, sea $\mathbf{s}$ un vector unitario perpendicular a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$, tal que orientación $(\mathbf{v}_1, \mathbf{s}, \mathbf{v}_3) = \text{orientación}(\mathbf{w}_1, \mathbf{t}, \mathbf{v}_3)$. Se verifica, por tanto, que:

$$\begin{aligned} \text{orientación}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) &= \text{orientación}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \text{orientación}(\mathbf{w}_1, \mathbf{t}, \mathbf{v}_3) \\ &= \text{orientación}(\mathbf{v}_1, \mathbf{s}, \mathbf{v}_3), \end{aligned}$$

de donde resulta que:

$$(32) \quad \begin{cases} \text{orientación}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \text{orientación}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \Rightarrow \mathbf{s} = \mathbf{v}_2 \\ \text{orientación}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \neq \text{orientación}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \Rightarrow \mathbf{s} = -\mathbf{v}_2. \end{cases}$$

El paso del sistema de referencia R al R' se puede efectuar en los siguientes pasos intermedios:

$$(33) \quad \begin{aligned} R \rightarrow R_1 = \{O; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} &\rightarrow R_2 = \{O; \mathbf{w}_1, \mathbf{t}, \mathbf{v}_3\} \rightarrow \\ R_3 = \{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{s}, \mathbf{v}_3\} &\rightarrow R_4 = \{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \rightarrow R'. \end{aligned}$$

Sea X un punto arbitrario, sus coordenadas respecto de R, R_1, R_2, R_3, R_4 y R' son

$$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3), (t_1, t_2, t_3), (s_1, s_2, s_3), (x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$

respectivamente.

Llamando φ al ángulo $(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)$, se verifica que

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1) = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) = \varphi, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_3) = (\mathbf{w}_2, \mathbf{u}_3) = \frac{\pi}{2},$$

(recuérdese que $\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3$), luego las ecuaciones (30), correspondientes al cambio $R \rightarrow R_1$, serán:

$$(34) \quad (1, y_1, y_2, y_3) = (1, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llamando θ al ángulo $(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3)$, resulta:

$$(\mathbf{u}_3, \mathbf{t}) = (\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}_3, \mathbf{t}) = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) + (\mathbf{w}_3, \mathbf{v}_3) = \frac{\pi}{2}$$

$$+ \theta, \quad (\mathbf{w}_2, \mathbf{t}) = (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) + (\mathbf{w}_3, \mathbf{t}) = \frac{\pi}{2} + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \theta, \quad (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{t}) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) = (\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1) = \frac{\pi}{2},$$

luego las fórmulas (30) correspondientes al cambio $R_1 \rightarrow R_2$ son:

$$(35) \quad (1, z_1, z_2, z_3) = (1, y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Poniendo $\psi = (\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1)$, resulta:

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{s}) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{s}) = \psi + \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_3) = \frac{\pi}{2},$$

$$(\mathbf{t}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{t}, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1) = -\frac{\pi}{2} + \psi, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{s}) = (\mathbf{t}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{s})$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} + \psi\right) + \frac{\pi}{2} = \psi, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{v}_3) = \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{s}) = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3) = 0,$$

luego las fórmulas (30) correspondientes al cambio $\mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_3$ son:

$$(36) \quad (1, t_1, t_2, t_3) = (1, z_1, z_2, z_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si designamos por ϵ a $+1$ ó a -1 , para comprender las dos alternativas (32), las fórmulas (30) correspondientes al cambio $\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_4$ son:

$$(37) \quad (1, s_1, s_2, s_3) = (1, t_1, t_2, t_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, las fórmulas (30) proporcionan, para el cambio $\mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}'$:

$$(38) \quad (1, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, s_1, s_2, s_3) \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$(39) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & -\epsilon (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) & \sin \varphi \sin \theta \\ 0 & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \epsilon (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) & -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \sin \psi \sin \theta & \epsilon \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

en donde $\varepsilon = 1$ cuando orientación $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \text{orientación}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ y $\varepsilon = -1$, en caso contrario. Los ángulos φ , ψ y θ se llaman *ángulos de Euler*.

10. COORDENADAS CILÍNDRICAS.—Se llaman *coordenadas cilíndricas de un*

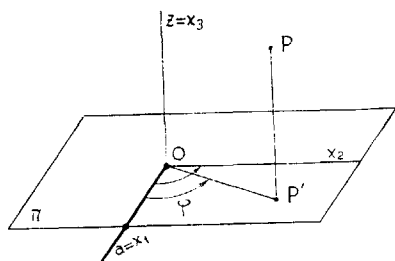


Fig. 73.

punto P del espacio, a los tres números (r, φ, z) obtenidos a partir de P del siguiente modo: Sea un plano π y en él un sistema de referencia polar (O, a) ; sea, finalmente, Oz una semirrecta perpendicular a π en O. El punto P queda determinado por las coordenadas polares de su proyección ortogonal P' sobre el plano π y por la distancia z de P a π , tomada con signo + si P está

en el mismo semiespacio que Oz respecto de π , y con signo — en caso contrario.

Las acotaciones de las tres variables pueden ser las siguientes:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Si se toma el origen a como semieje positivo x_1 , se elige Ox_2 como semieje positivo de modo que el ángulo Ox_1, Ox_2 tenga el sentido positivo del sistema de referencia polar y se toma $Ox_3 = z$; en el sistema ortonormal cartesiano así obtenido, se verifica que si las coordenadas de P son (x_1, x_2, x_3) , se tienen las siguientes relaciones:

$$(40) \quad \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi \\ x_3 = z. \end{cases} \quad (41) \quad \begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1} \\ z = x_3 \end{cases}$$

11. COORDENADAS POLARES.—Sea π un semiplano de borde x_3 , sea ω una orientación en el haz de semiplanos de base x_3 . Sea Oa una semirrecta contenida en la recta x_3 y sea ω' el sentido definido en el haz de semirrectas de base O, situado en el plano π , por el ángulo (Oa, Ob) , siendo Ob la semirrecta perpendicular a x_3 situada en el semiplano π .

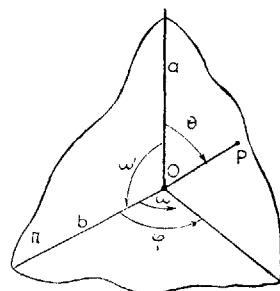


Fig. 74.

El punto P queda determinado por: a) El semiplano del haz de base x_3 que lo contiene. b) La semirrecta OP , situada en el semiplano anterior. c) El segmento $[OP]$, si-

tuado en esta semirrecta. El semiplano de a) queda determinado por el ángulo $\varphi = (\pi, x_3 P)$. La semirrecta OP queda determinada por el ángulo $\theta = (a, OP)$. El punto P queda determinado en la semirrecta OP por la distancia $(OP) = \rho$.

Los tres números (ρ, φ, θ) se llaman coordenadas polares de P respecto del sistema de referencia polar $(\pi, Oa, \omega, \omega')$. Las acotaciones de las variables son:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Si se toma como sistema cartesiano ortonormal el O, x_1, x_2, x_3 , siendo Ox_3 la semirrecta Oa ; Ox_1 la semirrecta Ob y Ox_2 la perpendicular a las anteriores y tal que $(Ox_1, Ox_2) = \omega$, se verifica que, si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de P respecto de este sistema cartesiano:

$$(42) \quad \begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ x_2 = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ x_3 = \rho \cos \theta \end{cases} \quad (43) \quad \begin{cases} \rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \end{cases}$$

EJERCICIOS:

627. Calcular las fórmulas del cambio de coordenadas, correspondientes al nuevo sistema de referencia ortonormal formado por los planos:

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0,$$

$$1 + x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$13x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0,$$

como planos x_2^*, x_3^* ; x_3^*, x_1^* ; x_1^*, x_2^* , respectivamente.

628. Calcular los ángulos de Euler correspondientes al cambio anterior.

629. Calcular las coordenadas polares del punto $P = (3, -4, -\sqrt{11})$.

3. Programación lineal.—Se presentan en la técnica, en la industria, etcétera, problemas en los que se trata de hallar un punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de un espacio afin n -dimensional, que pertenezca a una región convexa R , de dicho espacio, y que haga máxima o mínima una función lineal $f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, que se acostumbra a designar con el nombre de *función de costo*. La región convexa, R , viene determinada generalmente

Siempre que se puedan expresar todas las relaciones (1) distintas de las (2) en función de dos únicas variables, puede emplearse el método gráfico usado en el ejercicio 630, que es el más rápido. Además, conviene observar que el método gráfico es exacto, lo que no sucede ordinariamente, porque, como se ha podido ver en el mencionado ejercicio, el máximo o el mínimo de la función lineal es siempre un punto del borde de la región R , y generalmente un vé-

632. Hallar el máximo y el mínimo de $g(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 4$ en la región R del ejercicio anterior.

633. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2$ en la región

$$R: \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 12 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

634. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2$ en la región convexa

$$R: \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 8 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

635. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 4x_2 + x_3 - 4$ en la región convexa

$$R: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

636. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x_1, x_2, x_3) = 12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 60$ en la misma región convexa del ejercicio anterior.

En los ejercicios anteriores se observa que la región R, cuando es finita, tiene como vértices puntos linealmente independientes en el sentido afín. A la figura convexa de un espacio afín engendrada por $r + 1$ puntos linealmente independientes, se le llama un *simplex* r -dimensional. Los simples unidimensionales son los segmentos, los bidimensionales los triángulos, los tridimensionales los tetraedros, etc. Por esta razón, el método que vamos a estudiar se conoce con el nombre de *método del simplex*.

El sistema de ecuaciones (4) define una variedad lineal, que puede ser el conjunto vacío. Para que el problema tenga solución es necesario que la variedad lineal, L, definida por el sistema de ecuaciones (4) sea distinta del conjunto vacío, o lo que es lo mismo, que el sistema (4) sea compatible, esto es, que

$$(6) \quad r(A) = r(B), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$x_1 = \dots = x_{m-1} = x_{m+1} = 0$ proporcione otro vértice del simplex, es necesario y suficiente que los segundos miembros sean todos no negativos. Esto es:

$$(13) \quad \delta_1 - \delta_{m_1} \frac{\delta_{1, m+1}}{\delta_{m_1, m+1}} \geq 0, \dots, \delta_{m-1} - \delta_m \frac{\delta_{m-1, m+1}}{\delta_{m, m+1}} \geq 0, \quad \frac{\delta_m}{\delta_{m, m+1}} \geq 0$$

y estas condiciones son equivalentes a

$$(14) \quad \frac{b_m}{b_{m, m+1}} = \min. \text{ de los números positivos de } \left\{ \frac{b_1}{b_{1, m+1}}, \dots, \frac{b_m}{b_{m, m+1}} \right\}$$

Si se verifica esta condición, el sistema (12), que escribiremos en la forma:

[illegible]

es equivalente al sistema (12). Ahora bien, la función de costo se puede expresar mediante las variables que no intervienen en la base, ya que únicamente interesan los valores de la función de costo en el simplex R , y en R es

$$(16) \quad \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(b_1 - b_{1m+1} x_{m+1} - \dots - b_{1n} x_n, \dots, \\ &\quad b_m - b_{mm+1} x_{m+1} - \dots - b_{mn} x_n, x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &= F(x_{m+1}, \dots, x_n) = d_0 + d_{m+1} x_{m+1} + \dots + d_n x_n, \end{aligned}$$

y, análogamente:

$$(17) \quad f(x_1, \dots, x_n) = f(b'_1 - b'_{1m} x_m - \dots - b'_{1n} x_n, \dots, x_m, b'_{m+1} - b'_{m+1m} x_m - \dots - b'_{m+1n} x_n, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ \doteq G(x_m, x_{m+2}, \dots, x_n) = d_0 + d_{m+1} (b'_{m+1} - b'_{m+1m} x_m - b'_{m+1m+2} x_{m+2} - \dots - b'_{m+1n} x_n) + \dots + d_n x_n.$$

Si $P = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ es el vértice proporcionado por (11) y $Q = (b'_1, \dots, b'_{m-1}, 0, b'_{m+1}, 0, \dots, 0)$ es el vértice proporcionado por (15), el valor de la función de costo en estos vértices será, en virtud de (16) y (17),

$$f(P) = f(b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0) = F(0, \dots, 0) = d_0,$$

$$f(Q) = f(b'_1, \dots, b'_{m-1}, 0, b'_{m+1}, 0, \dots, 0) = G(0, \dots, 0) = d_0 + d_{m+1} b'_{m+1}.$$

de donde:

$$f(Q) = f(P) + d_{m+1} \frac{b_m}{b_{m, m+1}},$$

pero, en virtud de (14), es $\frac{b_m}{b_{m, m+1}} > 0$, luego:

$$f(Q) < f(P) \Leftrightarrow d_{m+1} < 0.$$

Por consiguiente, para pasar del vértice P a otro vértice en el que la función de costo tome un valor menor es necesario y suficiente elegir como nueva variable, x_{m+1} , para formar parte de la base factible, una variable que en la función de costo, expresada mediante las variables que no intervienen en la base de P, esto es, en $F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ tenga coeficiente, d_{m+1} , negativo. Si todas las variables de F tuviesen coeficiente positivo, el vértice P haría mínima a la función de costo. En caso contrario, se elegiría como variable para pasar de la base de (11) a la de (15) aquella que tuviese menor coeficiente negativo. Repitiendo este proceso, que es finito por ser finito el número de vértices, se llegará al vértice que hace mínima a la función de costo, caso que dicha solución exista.

EJERCICIOS:

637. Hallar el punto que hace mínima la función de costo $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 - 2x_2 + x_3 - 1$ en la región

$$R: \begin{cases} 5x_1 + 3x_3 - 15 \leq 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

638. Hallar el punto de la región R que hace máxima la función de costo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2$, siendo

$$R: \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \leq 18 \\ 4x_2 + 8x_3 + x_4 \leq 24 \\ 5x_1 + 6x_3 + 2x_4 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

DETERMINACIÓN DE UN VÉRTICE DEL SIMPLEX R.—La solución del problema de programación lineal queda reducida a hallar un primer vértice del simplex

se deduce que

$$x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0.$$

Por consiguiente, el problema de hallar un vértice de R se reduce a minimizar la función de costo (22) sobre R^* . Si el mínimo hallado para f^* es cero, el punto correspondiente será vértice de R , si el mínimo de f^* es distinto de cero, R no posee vértices, luego es el conjunto vacío y el problema inicial no tiene solución.

EJERCICIOS:

639. Hallar el punto que hace mínima a la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 + 2x_2 - x_3 - 4$$

en la región:

$$R: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

CAPITULO CUARTO

FORMAS CUADRATICAS. CONICAS. CUADRICAS

§ 1. FORMAS BILINEALES. FORMAS CUADRATICAS

1. Formas bilineales.—Sean V_n y V_m dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo K . Se llama *forma bilineal sobre $V_n \times V_m$* a toda aplicación:

$$(1) \quad V_n \times V_m \xrightarrow{A} K, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} A \mathbf{y} = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K,$$

tal que,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \dots \in V_n, \quad \mathbf{y}, \mathbf{y}' \dots \in V_m,$$

se verifique que

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. (\mathbf{x} + \mathbf{x}') A \mathbf{y} = \mathbf{x} A \mathbf{y} + \mathbf{x}' A \mathbf{y}. \\ 2. \mathbf{x} A (\mathbf{y} + \mathbf{y}') = \mathbf{x} A \mathbf{y} + \mathbf{x} A \mathbf{y}'. \\ 3. (\lambda \mathbf{x}) A \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} A \mathbf{y}) = \mathbf{x} A (\lambda \mathbf{y}), \quad \forall \lambda \in K. \end{array} \right.$$

Sea A una forma bilineal sobre $V_n \times V_m$ y supongamos $\mathbf{y}$ fijo, la forma A define un homomorfismo (Def. 27, 6, § 1, Cap. II) de V_n en K , que designaremos por $d(\mathbf{y})$.

$$(3) \quad d(\mathbf{y})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} A \mathbf{y}.$$

Análogamente, para cada $\mathbf{x} \in V_n$, se puede definir el homomorfismo:

$$(4) \quad V_m \xrightarrow{s(\mathbf{x})} K: \quad s(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = \mathbf{x} A \mathbf{y}.$$

EJERCICIO:

640. Demostrar que $d(\mathbf{y})$ es un homomorfismo.

Recordando (Def. 34, 9, § 1, Cap. II) que el conjunto de todos los homomorfismos de V_n en K forman el espacio dual V_n^* de V_n , y representando a los vectores de V_n^* mediante negritas con asterisco, resulta que:

$$(5) \quad d(y) = \mathbf{x}^* \in V_n^*.$$

Análogamente,

$$(6) \quad s(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^* \in V_m^*.$$

La aplicación:

$$(7) \quad V_m \xrightarrow{d} V_n^*,$$

definida por (5) es un homomorfismo y lo mismo vale para la aplicación

$$(8) \quad V_n \xrightarrow{s} V_m^*,$$

definida por (6).

EJERCICIO:

641. Demostrar que d y s son homomorfismos.

A los homomorfismos d y s les llamaremos *homomorfismos asociados por la derecha y por la izquierda*, respectivamente, a la forma bilineal A .

Se dice que la forma bilineal A es *degenerada por la izquierda* cuando existe un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{a} A \mathbf{y} = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in V_m.$$

Análogamente, A es *degenerada por la derecha* cuando existe un vector $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{x} A \mathbf{b} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Una forma se dice que *no es degenerada* cuando no lo es ni por la derecha ni por la izquierda.

De

$$d(y) = d(y') \Leftrightarrow d(y - y') = \mathbf{0} \Leftrightarrow d(y - y')(\mathbf{x}) = 0$$

$$\forall \mathbf{x} \in V, \Leftrightarrow \mathbf{x} A (y - y') = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

se deduce que:

1. A no es degenerada por la derecha $\iff d$ es un homomorfismo inyectivo. Por consiguiente:

2. A no es degenerada $\iff d$ y s son homomorfismos inyectivos.

3. Si A es una forma bilineal sobre $V \times V$, no degenerada, se verifica que d y s son isomorfismos.

En efecto, por el teorema anterior:

$$V \xrightarrow{d} V^* \quad y \quad V \xrightarrow{s} V^*$$

son homomorfismos inyectivos, luego $\dim. (\text{im. } d) = \dim. V$ y como $\dim. V = \dim. V^*$, resulta que $\text{im. } (d) = V^*$; análogamente: $\text{im. } (s) = V^*$.

Dada la forma bilineal A , se dice que el vector $\mathbf{x}$ de V_n es *ortogonal* al vector $\mathbf{y}$ de V_m , respecto de A , y se escribe: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando $\mathbf{x} A \mathbf{y} = 0$; esto es:

$$(9) \quad \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0.$$

4. Si E es una parte de V_n , se verifica que el conjunto, E^0 , de todos los vectores de V_m ortogonales a todos los vectores de E , es una variedad lineal de V_m , llamada *variedad ortogonal* a E .

DEMOSTRACIÓN.—1.º) $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in E^0 \iff \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0, \mathbf{x} A \mathbf{y}' = 0, \forall \mathbf{x} \in E \implies \mathbf{x} A \mathbf{y} - \mathbf{x} A \mathbf{y}' = 0, \forall \mathbf{x} \in E \iff \mathbf{x} A (\mathbf{y} - \mathbf{y}') = 0, \forall \mathbf{x} \in E \iff, \mathbf{y} - \mathbf{y}' \in E^0$.

2.º) $\mathbf{y} \in E^0$ y $\lambda \in K \iff \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{x} \in E, \lambda \in K \implies \lambda (\mathbf{x} A \mathbf{y}) = \mathbf{x} A (\lambda \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{x} \in E \iff \lambda \mathbf{y} \in E^0$.

5. Si E y F son dos partes de V_n , se verifica:

1.º) $E \subset F \implies E^0 \supset F^0$.

2.º) $(E \cup F)^0 = E^0 \cap F^0$.

3.º) $(E \cap F)^0 \supset E^0 \cup F^0$.

4.º) $(L(E))^0 = E^0$.

5.º) Si L es una variedad lineal de V_n , se verifica que $L \subset L^{00}$.

DEMOSTRACIÓN.—1.º) $\mathbf{y} \in F^0 \iff \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{x} \in F \implies \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{x} \in E \iff \mathbf{y} \in E^0$.

2.º) $E \subset E \cup F, F \subset E \cup F \implies E^0 \supset (E \cup F)^0, F^0 \supset (E \cup F)^0 \implies E^0 \cap F^0 \supset (E \cup F)^0$. Sea $\mathbf{y} \in E^0 \cap F^0 \implies \mathbf{y} \in E^0$ e $\mathbf{y} \in F^0 \iff \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0$,

$\forall \mathbf{x} \in E; \mathbf{x}' A \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{x}' \in F \implies \mathbf{x}'' A \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{x}'' \in E \cup F \iff \mathbf{y} \in (E \cup F)^0.$

3.º) $E \cap F \subset E, E \cap F \subset F \implies (E \cap F)^0 \supset E^0, (E \cap F)^0 \supset F^0 \implies (E \cap F)^0 \supset E^0 \cup F^0.$

4.º) $E \subset L(E) \implies (L(E))^0 \subset E^0.$ Si $\mathbf{y} \in E^0 \implies \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{x} \in E.$ Si $\mathbf{x} \in L(E) \implies \mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_r \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_i \in E, i = 1, \dots, r \implies \mathbf{x} A \mathbf{y} = \lambda_1 (\mathbf{x}_1 A \mathbf{y}) + \dots + \lambda_r (\mathbf{x}_r A \mathbf{y}) = 0.$

5.º) $\forall \mathbf{x} \in L \text{ y } \forall \mathbf{y} \in L^0 \implies \mathbf{x} A \mathbf{y} = 0 \implies \mathbf{x} \in L^{00}.$

6. Si A es una forma bilineal no degenerada sobre $V \times V$ y L es una variedad lineal de V , se verifica que:

a) $\dim. L^0 = \dim. (V) - \dim. L.$

b) $L^{00} = L.$

DEMOSTRACIÓN.—a) Sea B la restricción de A a $L \times V$. La forma B subordina una forma bilineal C , en $L/V^0 \times V/L^0$, sin más que poner $C(\mathbf{x} + V^0, \mathbf{y} + L^0) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. La forma C no es degenerada, pues si fuese $C(\mathbf{x} + V^0, \mathbf{y} + L^0) = 0, \forall \mathbf{x} + V^0 (\forall \mathbf{y} + L^0)$, sería $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{x} \in L (\mathbf{y} \in V)$, luego existiría un $\mathbf{y}$ ortogonal a L y no perteneciente a L^0 (existiría un $\mathbf{x}$ ortogonal a V y no perteneciente a V^0). Por ser C no degenerada se verifica, en virtud de 3, que los homomorfismos asociados a C son isomorfismos, luego:

$$V/L^0 \approx (L/V^0)^*,$$

siendo $(L/V^0)^*$ el espacio dual (Def. 34. 9. § 1. Cap. II) de L/V^0 . De $\dim. (L/V^0)^* = \dim. (L/V^0)$ y $V^0 = \{0\}$, resulta, en virtud del isomorfismo anterior, que (51. 7. § 1. Cap. II)

$$\dim. (V) - \dim. (L^0) = \dim. L.$$

b) De $L \subset L^{00}$ y $\dim. L^{00} = \dim. (V) - \dim. L^0 = \dim. (V) - [\dim. (V) - \dim. (L)] = \dim. L$, resulta $L = L^{00}.$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FORMA BILINEAL.—Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V_n y $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ una base de V_m . Sea A una forma bilineal sobre $V_n \times V_m$ y sea

$$(10) \quad \mathbf{u}_i A \mathbf{v}_j = a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Si $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$ e $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_m \mathbf{v}_m$ son dos vectores arbitrarios de V_n y V_m , respectivamente, se verifica que

$$\begin{aligned} (11) \quad \mathbf{x} A \mathbf{y} &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i \right) A \left(\sum_{j=1}^m y_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_i y_j (\mathbf{u}_i A \mathbf{v}_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij} x_i y_j = (x_i) (a_{ij}) (y_j)', \end{aligned}$$

en donde

$$(x_i) = (x_1, \dots, x_n), \quad (y_j) = (y_1, \dots, y_m), \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La matriz (a_{ij}) se llama *matriz de la forma bilineal respecto de las bases B y B'*.

EJERCICIOS:

642. Dada la forma bilineal A:

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)',$$

hallar las ecuaciones de los homomorfismos d y s asociados por la derecha y por la izquierda.

643. Si $E = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $\mathbf{a} = (1, -3)$, $\mathbf{b} = (-2, 6)$, escribir las ecuaciones de E^0 , respecto de la forma bilineal del ejercicio anterior.

644. Sea la forma bilineal B:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)'.$$

Si $E = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $F = \{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$, hallar las ecuaciones de E^0 , F^0 , $(E \cup F)^0$, $(L(E) \cap L(F))^0$, siendo $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0, -3)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1, -4)$, $\mathbf{d} = (5, 0, 0, 4)$, $\mathbf{e} = (4, -1, -1, 8)$.

Si (11) es la expresión analítica de la forma bilineal A, las ecuaciones de los homomorfismos asociados a A son.

$$(12) \quad s(\mathbf{x}): \quad (y_1^*, \dots, y_m^*) = (x_1, \dots, x_n) (a_{ij})$$

$$(13) \quad d(\mathbf{y}): \quad (x_1^*, \dots, x_n^*) = (a_{ij}) (y_1, \dots, y_m)'.$$

Sean $B_1 = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ y $B'_1 = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m\}$ otras bases de V_n y V_m , respectivamente, y sean

$$(14) \quad (x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) T, \quad (y_1, \dots, y_m) = (y'_1, \dots, y'_m) S, \quad |T| \neq 0, \quad |S| \neq 0,$$

las fórmulas del cambio de base. La expresión de la aplicación bilineal A , respecto de las bases B_1 y B'_1 será:

$$(15) \quad \mathbf{x} A \mathbf{y} = (x'_i) (b_{ij}) (y'_j), \quad (b_{ij}) = T (a_{ij}) S'.$$

DEFINICIÓN 1.—Dada la forma bilineal A , sobre $V \times V$, si $\mathbf{x}$ es un vector de V y L una variedad lineal de V , se dice:

1.º) $\mathbf{x}$ es un *vector isótropo* cuando $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}$ respecto de A , esto es, cuando $\mathbf{x} A \mathbf{x} = 0$.

2.º) L es una *variedad lineal isótropa* cuando existe un vector $\mathbf{x} \in L$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} \perp L$, esto es: $\mathbf{x} A \mathbf{y} = 0$, $\forall \mathbf{y} \in L$.

3.º) L es una *variedad lineal totalmente isótropa* cuando $L \subset L^0$.

DEFINICIÓN 2.—Si L y L' son dos variedades lineales del espacio vectorial V , se llama *suma*, y se representa por $L + L'$, a la variedad lineal:

$$L + L' = \mathcal{L}(L \cup L')$$

engendrada por la unión (conjuntista) de las variedades lineales L y L' . Se dice que $L + L'$ es suma directa de las variedades L y L' , y se escribe $L \oplus L'$ cuando $L \cap L' = \{\mathbf{0}\}$ (Def. 20, 5, § 3, Cap. I).

De la definición anterior se deduce:

$$(16) \quad L + L' = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}', \quad \mathbf{x} \in L, \quad \mathbf{x}' \in L'\}.$$

La expresión $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} \in L$, $\mathbf{x}' \in L'$ de los vectores de $L \oplus L'$ es única.

En efecto, si $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{z} + \mathbf{z}'$, $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in L$, $\mathbf{x}', \mathbf{z}' \in L'$, resulta que $\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{z}' - \mathbf{x}' \in L \cap L' = \{\mathbf{0}\}$, luego $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, $\mathbf{x}' = \mathbf{z}'$.

3. Si L es una variedad lineal no isótropa de V , se verifica que V es suma directa de L y L^0 :

$$(17) \quad V = L \oplus L^0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea A_L la restricción de A a L . A_L es una forma bilineal sobre $L \times L$. Como L no es isótropa se verifica que no existe ningún vector $\mathbf{x} \in L$ tal que $\mathbf{x} A \mathbf{y} = 0$, para todo $\mathbf{y} \in L$, luego s_L es (1) inyectivo. Por ser A_L una forma sobre $L \times L$, se verifica que s_L es un homomorfismo inyectivo de L en L^* . Como la dimensión de L^* es igual a la dimensión de L , resulta que s_L es un isomorfismo. Sea $\mathbf{x}$ un vector arbitrario de V . $s(\mathbf{x})$ es un homomorfismo de V en K , que subordina un homomorfismo, $\mathbf{y}^*_L$, de L en K ; por consiguiente, $\mathbf{y}^*_L \in L^*$, luego por ser s_L un isomorfismo de L sobre L^* existe un único vector $\mathbf{x}' \in L$ tal que $s_L(\mathbf{x}') = \mathbf{y}^*_L$, luego $s(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = s(\mathbf{x}')(\mathbf{y})$, para todo $\mathbf{y} \in L$, luego $\mathbf{x} A \mathbf{y} = \mathbf{x}' A \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{y} \in L$, de donde $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A \mathbf{y} = 0$, $\forall \mathbf{y} \in L$, luego $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \perp L$, esto es, $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{x}'' \in L^\circ$, de donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$, $\mathbf{x}' \in L$, $\mathbf{x}'' \in L^\circ$ y como $L \cap L^\circ = \{\mathbf{0}\}$, por ser L no isótropa, queda probado el teorema.

EJERCICIOS:

645. Dada la forma bilineal A sobre $V \times V$ definida por:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

1.º) Comprobar que la variedad lineal L no es isótropa:

$$L = \begin{cases} x_1 = \lambda + \mu \\ x_2 = -\lambda + 2\mu \\ x_3 = 2\lambda - \mu \\ x_4 = 3\lambda. \end{cases}$$

2.º) Hallar una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ de V tal que $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ sea base de L y $\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ sea base de L° .

3.º) Hallar las ecuaciones de la forma bilineal respecto de B .

2. Formas cuadráticas.—Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo K . Se llama *forma cuadrática* sobre V a una aplicación Q :

$$(1) \quad V \xrightarrow{Q} K,$$

tal que:

1.º Para todo $\lambda \in K$ y todo $\mathbf{x} \in V$ se verifica que:

$$Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}).$$

2.º La aplicación A :

$$(2) \quad V \times V \xrightarrow{A} K: \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}),$$

es una aplicación bilineal de $V \times V$ en K , llamada *forma bilineal asociada a la forma cuadrática Q* .

Una forma bilineal A se llama *simétrica* cuando, para todo par $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se verifica que $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

1. La forma bilineal asociada a una forma cuadrática es simétrica.

En efecto,

$$A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = Q(\mathbf{y} + \mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

2. Si A es la forma bilineal asociada a la forma cuadrática Q , se verifica que

$$(3) \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Q(2\mathbf{x}) - 2Q(\mathbf{x}) = 2Q(\mathbf{x}).$$

En lo que sigue supondremos que el cuerpo de los números racionales es un subcuerpo del cuerpo K , base de V .

De (3) se deduce que:

$$(4) \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

3. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de V y (a_{ij}) es la matriz de A respecto de B , se verifica que:

$$a_{ij} = A(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = A(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = a_{ji},$$

esto es, la matriz (a_{ij}) correspondiente a la forma bilineal asociada a una forma cuadrática es una matriz simétrica:

$$(5) \quad (a_{ij})' = (a_{ij}).$$

De (4) se deduce:

$$(6) \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_1, \dots, x_n) (a_{ij}) (x_1, \dots, x_n)',$$

siendo $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$, por lo que diremos que $\frac{1}{2} (a_{ij})$ es la matriz de la forma cuadrática Q respecto de la base B .

DEFINICIÓN 1.—Un espacio vectorial V en el que se ha definido una forma cuadrática Q se llama un *espacio vectorial cuadrático*. Si A es la forma bilineal asociada al espacio vectorial cuadrático (V, Q) , se llama *núcleo* de (V, Q) , o simplemente de Q , al conjunto N de los vectores $\mathbf{x}$ tales que:

$$(7) \quad N = \{ \mathbf{x} \mid A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \forall \mathbf{y} \in V \},$$

o lo que es lo mismo:

$$(8) \quad N = V^0,$$

en donde la ortogonalidad se refiere a la forma bilineal asociada a la forma cuadrática.

De 3, 1, se deduce que N es una variedad lineal.

4. Si N es el núcleo de la forma cuadrática Q , se verifica que

$$(9) \quad V/N \xrightarrow{\overline{Q}} K, \quad \overline{Q}(\mathbf{x} + N) = Q(\mathbf{x}),$$

es una forma cuadrática sobre V/N , que llamaremos subordinada por Q .

DEMOSTRACIÓN.—a) $\overline{Q}$ es una aplicación. En efecto, $\mathbf{x} + N = \mathbf{x}' + N$
 $\iff \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y} \in N \implies$

$$\begin{aligned} \overline{Q}(\mathbf{x}' + N) &= Q(\mathbf{x}') = Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} A(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) = \overline{Q}(\mathbf{x} + N). \end{aligned}$$

$$b) \quad \overline{Q}(\lambda(\mathbf{x} + N)) = \overline{Q}(\lambda \mathbf{x} + N) = Q(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) = \lambda^2 \overline{Q}(\mathbf{x} + N).$$

c) $\bar{A}(\mathbf{x} + \mathbf{N}, \mathbf{y} + \mathbf{N}) = \bar{Q}((\mathbf{x} + \mathbf{N}) + (\mathbf{y} + \mathbf{N})) - \bar{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{N}) - \bar{Q}(\mathbf{y} + \mathbf{N})$
 $= Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una forma bilineal sobre V/N .

EJERCICIOS:

646. Dada la forma cuadrática:

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3, x_4)',$$

hallar la forma bilineal asociada y las ecuaciones paramétricas y no paramétricas de su núcleo.

647. Hallar la expresión de la forma cuadrática del ejercicio anterior respecto de una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ tal que $\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ sea una base del núcleo.

648. Hallar la expresión de la forma cuadrática $\bar{Q}$ subordinada por Q en V/N , respecto de la base $\{\mathbf{u}_1 + \mathbf{N}, \mathbf{u}_2 + \mathbf{N}\}$ de V/N , siendo $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ los vectores del ejercicio anterior.

DEFINICIÓN 2.—Sea Q una forma cuadrática sobre el espacio vectorial V . Se dice que el vector $\mathbf{x}$ es *singular* cuando $Q(\mathbf{x}) = 0$. Se dice que la *variedad lineal* L es *singular* cuando existe un vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, perteneciente a L y ortogonal a L (*). Una variedad L se llama *totalmente singular* cuando todos sus vectores son singulares. Una variedad L se llama *regular* cuando no contiene ningún vector singular. Una forma cuadrática se llama *ordinaria* cuando su núcleo es $\{\mathbf{0}\}$; en caso contrario se llama *degenerada*. Una forma cuadrática se llama *uniforme* o *definida* cuando no existe ningún vector singular.

5. La forma cuadrática Q es ordinaria $\iff$ La forma bilineal asociada A es no degenerada. Es consecuencia inmediata de la definición de núcleo (definición 1).

6. Si Q es una forma cuadrática degenerada y $\bar{Q}$ la forma subordinada por Q en V/N , siendo N el núcleo, se verifica que $\bar{Q}$ es una forma cuadrática ordinaria.

(*) Recuérdese que el cuerpo base del espacio vectorial contiene al cuerpo de los números racionales.

DEMOSTRACIÓN.—Si $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathbf{N}}$, siendo $\bar{\mathbf{N}}$ el núcleo de $\bar{Q}$ se verificará:

$$0 = \bar{A}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in V,$$

siendo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{N}$, $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{N}$, luego $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ y $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{N} = \bar{\mathbf{0}}$.

7. Si V es un espacio vectorial n -dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales (*) y Q una forma cuadrática definida sobre V , existe en V una base $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ tal que la matriz de Q relativa a la base B es la matriz unidad o la opuesta a la matriz unidad.

DEMOSTRACIÓN.—Sea A la forma bilineal asociada a Q . De (4) se deduce que no existe ningún vector isótropo respecto de A y, como consecuencia, no existe ninguna variedad lineal isótropa respecto de A . Sea $\mathbf{v}_1$ un vector arbitrario de V y $[\mathbf{v}_1]$ la recta vectorial engendrada por $\mathbf{v}_1$. La recta $[\mathbf{v}_1]$ no es isótropa, luego, en virtud de **3, 1**, se verifica que:

$$(10) \quad V = [\mathbf{v}_1] \oplus [\mathbf{v}_1]^\perp.$$

Sea Q_1 la restricción de Q a $[\mathbf{v}_1]^\perp$. Q_1 será también una forma cuadrática definida, por lo que se podrá aplicar a $[\mathbf{v}_1]^\perp$ el mismo razonamiento. Por inducción, resulta inmediatamente que existe una base $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ tal que:

$$(11) \quad V = [\mathbf{v}_1] \oplus \dots \oplus [\mathbf{v}_n], \quad \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Se verifica que

$$(12) \quad \text{signo } Q(\mathbf{v}_i) = \text{signo } Q(\mathbf{v}_j), \quad i, j = 1, \dots, n$$

En efecto, supongamos que

$$Q(\mathbf{v}_i) = a > 0 \quad \text{y} \quad Q(\mathbf{v}_j) = b < 0.$$

Como en el cuerpo de los números reales (Teor. **2, 4**, § **1**, Cap. V) existe la raíz cuadrada de todo número positivo, se verificará que existen los números reales:

$$\alpha = \sqrt{a}, \quad \beta = \sqrt{-b},$$

(*) Véase más adelante (**2**, § **1**, Cap. V) las propiedades de los números reales.

y se verificaría que

$$\begin{aligned} Q(\beta \mathbf{v}_i + \alpha \mathbf{v}_j) &= A(\beta \mathbf{v}_i, \alpha \mathbf{v}_j) + Q(\beta \mathbf{v}_i) + Q(\alpha \mathbf{v}_j) \\ &= \alpha \beta A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) + \beta^2 Q(\mathbf{v}_i) + \alpha^2 Q(\mathbf{v}_j) = -\alpha \beta + \alpha \beta = 0, \end{aligned}$$

ya que, por ser $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ es $A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$. Luego, el vector $\beta \mathbf{v}_i + \alpha \mathbf{v}_j$ sería singular y Q no sería definida.

Finalmente, Si $Q(\mathbf{v}_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, poniendo $\alpha_i = \sqrt{Q(\mathbf{v}_i)}$, $i = 1, \dots, n$, y $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, la matriz de Q respecto de $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es la matriz unidad. Si $Q(\mathbf{v}_i) < 0$, $i = 1, \dots, n$, poniendo $\beta_i = \sqrt{-Q(\mathbf{v}_i)}$, y $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\beta_i} \mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, la matriz de Q respecto de la base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es la matriz unidad.

8. Si Q es una forma cuadrática definida sobre el espacio vectorial real V , y si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ son dos bases construidas de acuerdo con el teorema anterior, se verifica que si la matriz de Q respecto de B es la matriz unidad también lo es respecto de B' , y si es la opuesta de matriz unidad lo mismo sucede a la matriz respecto de B' .

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que el valor de la forma cuadrática en un vector $\mathbf{x}$ no depende de la base elegida y si la matriz de la forma cuadrática respecto de la base B es la matriz unidad, el valor de la forma cuadrática en $\mathbf{x}$ es una suma de cuadrados y, por tanto, un número positivo, mientras que si la matriz es la opuesta a la matriz unidad el valor de la forma cuadrática en $\mathbf{x}$ es una suma de números negativos y, por tanto, un número negativo.

COROLARIO.—Si una forma cuadrática definida sobre un espacio vectorial real toma valor positivo (negativo) en un vector, en todos los vectores toma valor positivo (negativo), por lo que se le llama forma cuadrática definida positiva (negativa).

DEFINICIÓN 3.—Se llama rango de una forma cuadrática Q sobre el espacio vectorial V , a la dimensión del espacio V/N , siendo N el núcleo de V .

9. Si Q es una forma cuadrática sobre el espacio vectorial V , de dimensión n , se verifica que

$$(13) \quad Q \text{ es ordinaria} \Leftrightarrow \text{rango}(Q) = n.$$

EJERCICIOS:

649. Dada la forma cuadrática:

$$Q: (x_1, x_2, x_3) A (x_1, x_2, x_3)', \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

hallar una base respecto de la cual la forma cuadrática Q posea una matriz diagonal.

10. Si Q es una forma cuadrática sobre el espacio vectorial V de dimensión n , sobre el cuerpo K , existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada a la forma cuadrática Q es diagonal.

DEMOSTRACIÓN.—Sea N el núcleo de Q y $\bar{Q}$ la forma cuadrática subordinada por Q en $\bar{V} = V/N$. Se verifica que (6) $\bar{Q}$ es una forma cuadrática ordinaria, luego existe un vector $\bar{u}_1$ de $\bar{V}$, no singular, pues en caso contrario se verificaría que

$$\bar{x} \bar{A} \bar{y} = \bar{Q}(\bar{x} + \bar{y}) - \bar{Q}(\bar{x}) - \bar{Q}(\bar{y}) = 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{V},$$

luego $\bar{Q}$ no sería ordinaria. Sea $[\bar{u}_1]$ la recta vectorial de $\bar{V}$ engendrada por $\bar{u}_1$ y sea $[\bar{u}_1]^\circ$ la variedad ortogonal correspondiente. Por ser $[\bar{u}_1]$ no isotrópica respecto de $\bar{A}$, el teorema 3 de 1 establece que

$$(14) \quad \bar{V} = [\bar{u}_1] \oplus [\bar{u}_1]^\circ.$$

Por inducción, se obtiene que

$$(15) \quad \bar{V} = [\bar{u}_1] \oplus \dots \oplus [\bar{u}_r].$$

Si $u_i \in \bar{u}_i = u_i + N$, $i = 1, \dots, r$, se verifica que (Teor. 51, 7, § 1, Cap. II)

$$V = [u_1] \oplus \dots \oplus [u_r] \oplus N,$$

y si $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ es una base arbitraria de N , se verifica que $u_i \perp u_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, $u_k \perp u_k$, $k = r+1, \dots, n$, luego si

$$A(u_i, u_j) = 2a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

se verificará que $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ii} = 0$, $i = r + 1, \dots, n$, con lo que la expresión de Q respecto de la base $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ será:

$$(16) \quad Q: (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n)'.$$

COROLARIO.—*El número de elementos distintos de cero de la matriz diagonal correspondiente a una forma cuadrática es igual al rango de la forma cuadrática.*

3. Descomposición de Witt de un espacio vectorial cuadrático.

Signatura.—Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K que contiene como subcuerpo al de los números racionales. Sea Q una forma cuadrática ordinaria sobre V , sea Λ la forma bilineal asociada a Q .

1. *Sea L una variedad lineal totalmente singular de dimensión máxima r , respecto de la forma cuadrática Q . Existe otra variedad lineal L' , totalmente singular, tal que: 1.º $\dim. (L') = \dim. (L)$. 2.º $L' \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea M una variedad lineal totalmente singular tal que $M \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}$. La variedad M existe siempre, ya que puede ser la variedad $\{\mathbf{0}\}$. Por el carácter maximal de L , se verifica que $\dim. (M) \leq \dim. (L)$. Si $\dim. (M) = \dim. (L)$, el teorema está demostrado, luego supongamos que $\dim. (M) < \dim. (L)$, o bien, $M = \{\mathbf{0}\}$.

a) $M^0 \not\subset M + L^0$. En efecto, de **6** de **1** se deduce:

$$\dim. (M + L^0)^0 = n - \dim. (M + L^0).$$

Ahora bien, si $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ es una base de M y $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ una base de L^0 , $B'' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ es un sistema de generadores de $M + L^0$. Estos vectores son linealmente independientes, pues si existiese una relación de la forma

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0},$$

sería

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r = -(\mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{v}_s) \in M \cap L^0.$$

de donde

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{u}_r = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0},$$

y por ser $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$ bases, sería $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$. Por consiguiente, $(\alpha) \dim. (M + L^0) = \dim. (M) + \dim. L^0$. Recordando de nuevo el teorema 6 de 1, resulta:

$$\dim. (M + L^0)^0 = n - \dim. (M) - \dim. (L^0) = \dim. (L) - \dim. (M).$$

Por otra parte, del teorema 5, 2.º y 4.º de 1 y del teorema 6, b) de 1, resulta:

$$\dim. (M + L^0)^0 = \dim. (M^0 \cap L)$$

de donde

$$(17) \quad \dim. L - \dim. M = \dim. (M^0 \cap L).$$

Ahora bien, si fuese $M^0 \subset M + L^0$ se deduciría:

$$(18) \quad M \supset (M + L^0)^0 = M^0 \cap L \Rightarrow M^0 \cap L \subset M \cap L \subset M \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}.$$

De (17) y (18) resulta la contradicción:

$$\dim. L - \dim. M = 0.$$

b) $M + L^0 = (M^0 \cap L)^0$. En efecto, de 3.º 5, 1 se deduce que

$$(18) \quad M + L^0 \subset (M^0 \cap L)^0,$$

pero de (α) y de 6, 1, resulta que

$$(19) \quad \dim. (M + L^0) = \dim. M + \dim. L^0 = n + \dim. M - \dim. L,$$

y de (17):

$$(20) \quad \dim. (M^0 \cap L)^0 = n - \dim. (M^0 \cap L) = n - \dim. L + \dim. M.$$

De (18), (19) y (20) resulta que

$$(21) \quad M + L^0 = (M^0 \cap L)^0.$$

c) *Existe un vector $\mathbf{x}$ tal que: 1.º) $\mathbf{x} \in M^0$. 2.º) $\mathbf{x} \notin M + L^0$. 3.º) $\mathbf{x}$ es singular.*

En virtud de a) existe un vector $\mathbf{x}'$ tal que $\mathbf{x}' \in M^0$, $\mathbf{x}' \notin M + L^0$. En virtud de (21) resulta que $\mathbf{x}' \notin (M^0 \cap L)^0$, luego existe un vector $\mathbf{x}''$ de $M^0 \cap L$ no ortogonal a $\mathbf{x}'$:

$$(22) \quad A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \neq 0, \quad \mathbf{x}'' \in M^0 \cap L.$$

Sea

$$(23) \quad a = -\frac{Q(\mathbf{x}')}{A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}.$$

Se verifica que $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + a\mathbf{x}''$ cumple las condiciones pedidas, ya que.

$$Q(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}' + a\mathbf{x}'') = A(\mathbf{x}', a\mathbf{x}'') + Q(\mathbf{x}') + a^2 Q(\mathbf{x}'') = aA(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + Q(\mathbf{x}') = 0,$$

ya que $Q(\mathbf{x}'') = 0$, por pertenecer $\mathbf{x}''$ a L y ser L totalmente singular. Además, evidentemente, $\mathbf{x} \in M^0$ y si $\mathbf{x} \in M + L^0$, como $\mathbf{x}'' \in M^0 \cap L$, teniendo en cuenta (21) y que $\mathbf{x}'' \in L$, y que, por tanto, es singular, resultaría:

$$0 = A(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + A(\mathbf{x}'', \mathbf{x}'') = A(\mathbf{x}', \mathbf{x}''),$$

en contradicción con (22), luego $\mathbf{x} \notin M + L^0$.

d) La variedad lineal $P = M + [\mathbf{x}]$, siendo $[\mathbf{x}]$ la recta vectorial engendrada por $\mathbf{x}$ verifica: 1.º $\dim. (P) = \dim. (M) + 1$. 2.º Es totalmente singular. 3.º $P \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}$. En efecto: 1.º $\mathbf{x} \notin M + L^0 \Rightarrow \mathbf{x} \notin M$. 2.º $\mathbf{z} \in P \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} + b\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in M$, $\Rightarrow Q(\mathbf{z}) = Q(\mathbf{y} + b\mathbf{x}) = A(\mathbf{y}, b\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}) + Q(b\mathbf{x}) = bA(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$. 3.º Recordando que $M \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}$, resulta que

$$\mathbf{z} \in P \cap L^0 \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} + c\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M; \quad \mathbf{z} \in L^0 \Rightarrow$$

$$c\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y} \in M \cap L^0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y}$$

de donde $\mathbf{y} \in L^0$, y como $\mathbf{y} \in M$, sería $\mathbf{y} \in L^0 \cap M = \{\mathbf{0}\}$, luego $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ y por tanto $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ y $P \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}$.

Observando que la existencia del vector $\mathbf{x}$ exige que $M + L^0 \neq V$, lo que equivale a $M^0 \cap L \neq \{\mathbf{0}\}$, que en virtud de (17) implica que $\dim. L > \dim. M$, el proceso podrá continuarse hasta que $\dim. M = \dim. L$.

2. Si L y L' son variedades lineales totalmente singulares, tales que:

a) $\dim. (L) = \dim. (L')$. b) $L' \cap L^0 = \{\mathbf{0}\}$, se verifica que $L + L'$ no es singular.

DEMOSTRACIÓN.

$$(L + L') \cap (L + L')^0 = (L + L') \cap L^0 \cap L'^0$$

Ahora bien, se verifica que

$$(L + L') \cap L^0 = L + (L' \cap L^0) = L.$$

En efecto, recordando que $L \subset L^0$, si $\mathbf{x} \in (L + L') \cap L^0$, será $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$, $\mathbf{y} \in L$, $\mathbf{y}' \in L'$, de donde $\mathbf{y}' = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in L^0$, luego $\mathbf{y}' \in L' \cap L^0$, y $\mathbf{x} \in L + (L' \cap L^0)$. Si $\mathbf{x} \in L + (L' \cap L^0)$, será $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$, $\mathbf{y} \in L$, $\mathbf{y}' \in L' \cap L^0$, de donde $\mathbf{x} \in (L + L') \cap L^0$.

Luego:

$$(L + L') \cap (L + L')^0 = L \cap L'^0.$$

Ahora bien, de 3.º 5, 1 resulta que

$$\dim. (L \cap L'^0)^0 \geq \dim. (L^0 + L') = \dim. L^0 + \dim. L',$$

por ser $L^0 \cap L' = \{0\}$, luego:

$$\begin{aligned} \dim. (L \cap L'^0) &= n - \dim. (L \cap L'^0)^0 \leq n - (\dim. L^0 + \dim. L') \\ &= n - (n - \dim. L + \dim. L) = 0, \end{aligned}$$

luego

$$L \cap L'^0 = \{0\} \quad \text{y} \quad (L + L') \cap (L + L')^0 = \{0\},$$

que prueba que $L + L'$ no es singular.

3. Si L y L' son variedades lineales totalmente singulares tales que $\dim. (L) = \dim. (L')$ y $L' \cap L^0 = \{0\}$, existe una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ de L y una base $\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{2r}\}$ de L' , tales que $A(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{2r+1-j}) = \delta_{ij}$, siendo $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $\delta_{ii} = 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ una base arbitraria de L , sea (64, 9, § 1, Cap. II) $B_1^* = \{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_r^*\}$ la base dual de L^* , $\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$. Por ser Q una forma cuadrática ordinaria, la forma bilineal asociada A es no degenerada y si fuese $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para $\mathbf{y} \in L'$ y para todo $\mathbf{x} \in L$, sería $\mathbf{y} \in L^0$, y como $L' \cap L^0 = \{0\}$ sería $\mathbf{y} = 0$, luego el homomorfismo $L' \xrightarrow{d} L^*$ es inyectivo y, como $\dim. L' = \dim. L = \dim. L^*$, es un isomorfismo, luego poniendo $\mathbf{u}_{2r+1-i} = d^{-1} \mathbf{u}_i^*$, los vectores $B_2 = \{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{2r}\}$ forman una base de L' . Ahora bien, se verifica que

$$A(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{2r+1-j}) = d(\mathbf{u}_{2r+1-j})(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j^*(\mathbf{u}_i) = \delta_{ij}$$

4. Si Q es una forma cuadrática ordinaria sobre V y A su forma bilineal asociada, se verifica que

$$(24) \quad V = L \oplus L' \oplus M$$

siendo L y L' totalmente singulares y de dimensión máxima respecto de esta propiedad y la restricción de Q a M es una forma cuadrática, Q_1 , definida.

DEMOSTRACIÓN.—Si en V no existe ningún vector singular el teorema es trivial, basta tomar $L = L' = \{0\}$. Supongamos que existan vectores singulares y sea L una variedad lineal totalmente singular de dimensión máxima, r . En virtud de 1 existe otra variedad totalmente singular L' de dimensión r y $L \cap L' = \{0\}$, ya que $L \subset L^\circ$. En virtud de 2, $L + L'$ es no singular y, en virtud de 3, 1 se verifica que

$$V = (L \oplus L') \oplus (L \oplus L')^\circ.$$

Sea $M = (L \oplus L')^\circ$. En M no existe ningún vector singular, ya que si $\mathbf{x} \in M$ fuese singular, esto es $Q(\mathbf{x}) = 0$, la variedad $L + [\mathbf{x}]$, siendo $[\mathbf{x}]$ la recta vectorial engendrada por $\mathbf{x}$, sería totalmente singular. En efecto, un vector arbitrario de $L + [\mathbf{x}]$ es de la forma $a\mathbf{y} + b\mathbf{x}$, $a, b \in K$, y sería:

$$Q(a\mathbf{y} + b\mathbf{x}) = A(a\mathbf{y}, b\mathbf{x}) + Q(a\mathbf{y}) + Q(b\mathbf{x}) = a b A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + a^2 Q(\mathbf{y}) + b^2 Q(\mathbf{x}).$$

y por ser $\mathbf{x} \in (L \oplus L')^\circ$ es $A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, por ser $\mathbf{y} \in L$ es $Q(\mathbf{y}) = 0$ y por hipótesis sería $Q(\mathbf{x}) = 0$, luego

$$Q(a\mathbf{y} + b\mathbf{x}) = 0 \quad \forall a\mathbf{y} + b\mathbf{x} \in L + [\mathbf{x}].$$

5. Si Q es una forma cuadrática ordinaria sobre V , siendo V un espacio vectorial real n -dimensional, existe una base $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2r}, \mathbf{u}_{2r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ tal que la matriz A de la forma cuadrática Q respecto de B es de la forma:

$$(25) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} J & O \\ \hline O & \varepsilon I \end{array} \right), \quad J = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline & 1 \\ \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \end{array} \right), \quad \varepsilon = +1, 0, -1$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_r$

e I , la matriz unidad de $n - 2r$ filas y columnas.

en donde I_r e I_{n-r} son las matrices unidad de órdenes r y $n-r$, respectivamente, y J_r es la matriz de orden r análoga a la matriz J de (25), la matriz A (25) se transforma en

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & J_r \\ \hline J_r - I_r & \end{array} \right) A \left(\begin{array}{c|c} I_r & J_r \\ \hline J_r - I_r & \end{array} \right) = B,$$

y la matriz B es una matriz diagonal en la que los r primeros números de la diagonal principal son 2, los r siguientes son -2 y los $n-r$ restantes son 1, cuando en (25) es $\varepsilon = 1$, y -1 cuando en (25) es $\varepsilon = -1$. Efectuando el cambio de base consistente en sustituir los $2r$ primeros vectores por sus productos por $\sqrt{2}$, resulta la matriz con unos y -1 . Para terminar de demostrar el teorema queda únicamente por probar que el signo de ε en (25) no depende de la base elegida para obtener la forma canónica (25). En efecto, sean $V = L \oplus L' \oplus M$, $M = (L \oplus L')^\circ$ y $V = H \oplus H' \oplus N$, $N = (H \oplus H')^\circ$ dos descomposiciones de Witt distintas. La restricción, Q_1 , de Q a $L \oplus M$ es una forma cuadrática semidefinida, ya que si $z \in L \oplus M$, será $z = x + y$, $x \in L$, $y \in M$; y como $M = (L \oplus L')^\circ$, será y ortogonal a x : $x A y = 0$, y, por tanto, $Q(z) = Q(x+y) = x A y + Q(x) + Q(y) = Q(y)$. Por la misma razón, la restricción, Q_2 , de Q a $H \oplus N$ es también una forma cuadrática semidefinida. Ahora bien, por ser $n-2r > 0$, es $n + (n-2r) > n$ y $\dim(L \oplus M) + \dim(H \oplus N) = 2n - 2r = n + (n-2r) > n$, luego, $(L \oplus M) \cap (H \oplus N) \neq \emptyset$. Si $x \in (L \oplus M) \cap (H \oplus N)$, será $Q_1(x) = Q_2(x) = Q(x) \neq 0$, por ser L y H variedades totalmente singulares de dimensión máxima y distintas.

DEFINICIÓN 1.—Al número de unos de la forma canónica (26), que queda unívocamente determinado por la forma cuadrática Q , se le llama *signatura lineal* de la forma cuadrática Q .

EJERCICIOS:

650. Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) A (x_1, x_2, x_3, x_4)', \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

651. Hallar el par de variedades lineales totalmente singulares correspondientes a la descomposición de Witt de la forma cuadrática del ejercicio anterior.

4. Cálculo del rango y de la signatura de una forma cuadrática real.—Sea la forma cuadrática real.

$$(1) \quad Q(\mathbf{x}): \quad (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)', \quad A = A'.$$

1. Existe un cambio de base en el espacio, definido por las fórmulas:

$$(2) \quad (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Omega, \quad |\Omega| \neq 0, \quad \Omega \Omega' = I,$$

mediante el cual la forma cuadrática (1) se reduce a su forma diagonal (*).

Sea

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} = \Omega A \Omega'.$$

Sumando la igualdad (3) a la

$$(4) \quad \lambda I = \Omega (\lambda I) \Omega',$$

resulta que

$$(5) \quad \left| \begin{array}{ccc} b_1 - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & b_n - \lambda \end{array} \right| = |\Omega (A - \lambda I) \Omega'| = |A - \lambda I| |\Omega \Omega'| = |A - \lambda I|.$$

La igualdad (5) prueba que los elementos de la diagonal de la matriz diagonal B son la raíces del polinomio:

$$(6) \quad |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \sum_{i>j} a_{ij} \lambda^{n-2} + \dots + |A|,$$

llamado *polinomio secular*, y a sus raíces *valores propios*, de la forma cuadrática (1). Sea

$$(7) \quad \boxed{1, \quad \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \sum_{i<j}^n a_{ij}, \quad \dots, |A|}$$

(*) Para la demostración puede verse, p. e., ABELLANAS, *Geometría básica*.

la sucesión de los cocientes del polinomio secular (6) alternativamente cambiados de signo, llamada *sucesión secular*. Sea P el número de permanencias en los signos de la sucesión (7) (si en ella figura algún cero intermedio se le puede atribuir el signo que se desee, + o -). Se verifica que si t es el número de términos nulos de la sucesión secular contados de derecha a izquierda hasta el primer término distinto de cero, es

$$(8) \quad \text{rango } (Q(\mathbf{x})) = n - t, \quad \text{signatura lineal } (Q(\mathbf{x})) = P.$$

DEFINICIÓN 1.—Una forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ se llama *semidefinida positiva* (*semidefinida negativa*) cuando, para todo $\mathbf{x} \in V$ se verifica que $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ ($Q(\mathbf{x}) \leq 0$). Una forma se llama *indefinida* cuando existen dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tales que $Q(\mathbf{x}) > 0$ y $Q(\mathbf{y}) < 0$.

2. a) La forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ es *definida positiva* $\iff \text{rango } (Q(\mathbf{x})) = \text{signatura lineal } (Q(\mathbf{x})) = n$.

b) La forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ es *definida negativa* $\iff \text{rango } (Q(\mathbf{x})) = n, \text{signatura lineal } (Q(\mathbf{x})) = 0$.

c) La forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ es *semidefinida positiva* $\iff \text{rango } (Q(\mathbf{x})) = \text{signatura lineal } (Q(\mathbf{x}))$.

d) La forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$ es *semidefinida negativa* $\iff \text{rango } (Q(\mathbf{x})) = r, \text{signatura lineal } (Q(\mathbf{x})) = 0$.

EJERCICIOS:

652. Calcular el rango y la signatura lineal de las siguientes formas cuadráticas:

$$\text{a) } \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}', \quad \text{b) } \mathbf{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}'.$$

653. Averiguar si son definidas o semidefinidas las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{x} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}', & \quad \text{b) } \mathbf{x} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \text{c) } \mathbf{x} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}', & \quad \text{d) } \mathbf{x} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -4 \\ 7 & -4 & -13 \end{pmatrix} \mathbf{x}'. \end{aligned}$$

§ 2. CONICAS

1. Cónicas. Reducción de la ecuación de una cónica.—Se llaman cónicas a las curvas del plano representadas, respecto de un sistema de referencia, R , métrico, por una ecuación de segundo grado con dos variables, tal como la siguiente:

$$(1) \quad a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

El primer miembro de esta ecuación se puede escribir empleando la notación matricial del siguiente modo:

$$(2) \quad (1, x, y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

siendo:

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A'.$$

Por brevedad pondremos:

$$(4) \quad \mathbf{x} = (1, x, y), \quad \text{y por tanto,} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

con lo que (2) se escribirá en la forma:

$$(5) \quad \mathbf{x} A \mathbf{x}' = 0.$$

REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA CÓNICA.—Para estudiar estas líneas vamos a reducir su ecuación a la forma más sencilla posible; es decir, vamos a ver si podemos efectuar una transformación de coordenadas tal que la ecuación (1) se transforme en otra más simple.

Como toda transformación de coordenadas ortogonales en coordenadas ortogonales se compone de un giro y una traslación de ejes, efectuaremos sucesivamente estas dos transformaciones.

I *Giro de ejes*.—Sea el giro de ecuación:

$$(6) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* G, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

mediante el que la ecuación (5) se transforma en

$$(7) \quad \mathbf{x}^* A^* \mathbf{x}^{*'} = 0, \quad A^* = G A G',$$

$$(8) \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \cos \omega - a_{02} \sin \omega & \\ a_{10} \cos \omega - a_{20} \sin \omega & a_{11} \cos^2 \omega - 2 a_{12} \sin \omega \cos \omega + a_{22} \sin^2 \omega & \\ a_{10} \sin \omega + a_{20} \cos \omega & (a_{11} - a_{22}) \sin \omega \cos \omega & + a_{12} (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \\ & a_{01} \sin \omega + a_{02} \cos \omega & \\ & (a_{11} - a_{22}) \sin \omega \cos \omega + a_{12} (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) & \\ & a_{11} \sin^2 \omega + 2 a_{12} \sin \omega \cos \omega + a_{22} \cos^2 \omega & \end{pmatrix}.$$

Siempre se puede determinar ω de forma que $a_{12}^* = 0$, ya que

$$a_{12}^* = \frac{1}{2} (a_{11} - a_{22}) \sin 2\omega + a_{12} \cos 2\omega,$$

y anulándolo se obtiene:

$$(9) \quad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 a_{12}}{a_{22} - a_{11}},$$

ecuación que posee solución en ω para cualquier valor de a_{12} , a_{11} , a_{22} . Determinando ω mediante la ecuación (9), la matriz (8) adquiere la forma:

$$(10) \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{00}^* & a_{01}^* & a_{02}^* \\ a_{10}^* & a_{11}^* & 0 \\ a_{20}^* & 0 & a_{22}^* \end{pmatrix}.$$

II. *Traslación de ejes*.—Efectuemos ahora la traslación de ejes:

$$(11) \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{**} T, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

con lo que la ecuación (7) se transformará en

$$(12) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**'} = 0, \quad A^{**} = T^* A^* T.$$

Pongamos:

$$\mathbf{a} = (1, a, b), \quad \mathbf{a}^* = \mathbf{a} (a_{00}^*, a_{01}^*, a_{02}^*)' = a_{00}^* + a_{01}^* a + a_{02}^* b, \\ \mathbf{a}^{*1} = \mathbf{a} (a_{10}^*, a_{11}^*, a_{12}^*)' = a_{10}^* + a_{11}^* a + a_{12}^* b, \quad \mathbf{a}^{*2} = \mathbf{a} (a_{20}^*, a_{21}^*, a_{22}^*)' = a_{20}^* + a_{21}^* a + a_{22}^* b,$$

con lo que se podrá escribir:

$$(13) \quad A^{**} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} A^* \mathbf{a}' & \mathbf{a}^{*1} & \mathbf{a}^{*2} \\ \mathbf{a}^{*1} & \mathbf{a}_{11}^* & \mathbf{a}_{12}^* \\ \mathbf{a}^{*2} & \mathbf{a}_{21}^* & \mathbf{a}_{22}^* \end{pmatrix}, \quad a_{12}^* = 0.$$

Representaremos por A_{ij} , A_{ij}^* , A_{ij}^{**} a los adjuntos de a_{ij} , a_{ij}^* , a_{ij}^{**} en A , A^* , A^{**} , respectivamente. Pueden presentarse ahora dos casos:

1.º $A_{00}^* \neq 0$. Como $A_{00}^* = a_{11}^* a_{22}^*$, se deduce que $a_{11}^* \neq 0$, $a_{22}^* \neq 0$. En este caso el sistema:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{a}^{*1} \equiv a_{10}^* + a_{11}^* a = 0, \\ \mathbf{a}^{*2} \equiv a_{20}^* + a_{22}^* b = 0, \end{cases}$$

posee solución única $\left(a = -\frac{a_{10}^*}{a_{11}^*}, \quad b = -\frac{a_{20}^*}{a_{22}^*} \right)$. Tomando para a y b estos valores en (11), la matriz (13) se reduce a

$$(15) \quad A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix},$$

que se llama *matriz reducida de la cónica*. La ecuación (12) se escribirá, por tanto, en la siguiente forma:

$$(16) \quad a_{00}^{**} + a_{11}^{**} x^{**2} + a_{22}^{**} y^{**2} = 0,$$

que se llama *ecuación reducida de la cónica*. La ecuación (16) nos indica que los nuevos ejes de coordenadas x^{**} e y^{**} , son ejes de simetría de la curva dada, por lo que se les llama simplemente *ejes de la cónica*. El punto de intersección de ambos, esto es, el nuevo origen de coordenadas O^{**} , será centro de simetría de la curva, y se le denomina *centro de la cónica*. Las cónicas correspondientes a este caso se llaman *cónicas con centro único*, y la ecuación (16) se llama *ecuación reducida de las cónicas con centro único*.

2.º $A_{00}^* = 0$. En este caso uno, por lo menos, de los dos factores a_{11}^* , y a_{22}^* de A_{00}^* será nulo. Supongamos que sólo sea nulo uno de ellos, por

ejemplo, $a_{11}^* = 0$, $a_{22}^* \neq 0$. En estas hipótesis puede ocurrir que $a_{10}^* \neq 0$ o que $a_{10}^* = 0$. En el primer caso el sistema

$$(17) \quad \begin{cases} \mathbf{a} \mathbf{A}^* \mathbf{a}' \equiv a_{00}^* + a_{22}^* b^2 + 2 a_{10}^* a + 2 a_{20}^* b = 0, \\ a_{02}^{**} \equiv a_{02}^* + a_{22}^* b = 0, \end{cases}$$

posee la única solución:

$$(18) \quad a = -\frac{A_{11}^*}{2 a_{10}^* a_{22}^*}, \quad b = -\frac{a_{02}^*}{a_{22}^*}.$$

Tomando estos valores para a y b en (11), la matriz $\mathbf{A}^{**}$ toma la forma:

$$(19) \quad \mathbf{A}^{**} = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}^{**} & 0 \\ a_{10}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix},$$

que se llama *matriz reducida de la cónica dada*, correspondiente al caso considerado. La ecuación (12) se escribirá ahora del siguiente modo:

$$(20) \quad 2 a_{01}^{**} x^{**} + a_{22}^{**} y^{**2} = 0,$$

En el caso en que $a_{10}^* = 0$, siendo $a_{22}^* \neq 0$ se puede tomar b solución de la segunda ecuación (17), y dando a a un valor arbitrario, se obtiene la matriz reducida:

$$(21) \quad \mathbf{A}^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} \end{pmatrix}$$

a la que corresponde la siguiente ecuación reducida de la cónica:

$$(22) \quad a_{00}^{**} + a_{22}^{**} y^{**2} = 0.$$

Finalmente, si $a_{11}^* = a_{22}^* = 0$ se pueden calcular a y b de infinitos modos para que $\mathbf{a} \mathbf{A}^* \mathbf{a}' = 0$, con lo que se obtiene la ecuación

$$(23) \quad a_{01}^{**} x^{**} + a_{02}^{**} y^{**} = 0.$$

Resumiendo: efectuando una transformación de ejes ortogonales en ejes ortogonales se puede reducir la ecuación (1) de cualquier cónica a una de las formas reducidas (16), (20), (22) o (23).

A las cónicas correspondientes a la forma reducida (16) se les llama *cónicas con centro único* y a las correspondientes al caso $A_{00}^* = 0$ [(20), (22), (23)] se les llama de *tipo parabólico*.

2. Invariantes métricos de una cónica.—De la segunda igualdad (7), de la segunda igualdad (12) y observando que $|G| = 1$, $|T| = 1$, resulta que

$$(24) \quad |A| = |A^{**}|.$$

Se comprueba también inmediatamente que $A_{00}^* = A_{00}$ y $A_{00}^{**} = A_{00}^*$, de donde resulta que

$$(25) \quad A_{00} = A_{00}^{**}.$$

Finalmente, de (8) se deduce:

$$\begin{aligned} a_{11}^* + a_{22}^* &= a_{11} \cos^2 \omega - 2 a_{12} \sin \omega \cos \omega + a_{22} \sin^2 \omega \\ &+ a_{11} \sin^2 \omega + 2 a_{12} \sin \omega \cos \omega + a_{22} \cos^2 \omega = a_{11} + a_{22} \end{aligned}$$

y de (13) que $a_{11}^{**} = a_{11}^*$, $a_{22}^{**} = a_{22}^*$; por consiguiente:

$$(26) \quad a_{11} + a_{22} = a_{11}^{**} + a_{22}^{**}.$$

Las igualdades (24), (25) y (26) prueban que al efectuar una transformación de coordenadas rectangulares en coordenadas rectangulares, las expresiones

(27)

$$|A|, A_{00}, a_{11} + a_{22}$$

no varían. (Aun cuando el razonamiento que acabamos de efectuar se refiere al caso particular que directamente nos interesa, la propiedad es válida para cualquier transformación de coordenadas rectangulares en coordenadas

rectangulares.) Por esta razón, a las expresiones (27) se les llama *invariantes métricos de las cónicas*.

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CÓNICAS.—A. *Cónicas con centro*.—Los invariantes (27) permiten calcular fácilmente los coeficientes de la ecuación reducida (16), ya que $|A^{**}| = a_{00}^{**} a_{11}^{**} a_{22}^{**}$, $A_{00}^{**} = a_{11}^{**} a_{22}^{**}$, de donde teniendo en cuenta las igualdades (24), (25) y (26), resulta:

$$(28) \quad a_{00}^{**} = \frac{|A|}{A_{00}}, \quad a_{11}^{**} a_{22}^{**} = A_{00}, \quad a_{11}^{**} + a_{22}^{**} = a_{11} + a_{22}.$$

De las dos últimas se deduce que a_{11}^{**} y a_{22}^{**} son las raíces de la ecuación

$$(29) \quad x^2 - (a_{11} + a_{22})x + A_{00} = 0.$$

B. *Cónicas de tipo parabólico*.—Si se trata de una *parábola* propiamente tal, es decir, de la ecuación reducida (20), resulta que

$$(30) \quad a_{22}^{**} = a_{11} + a_{22}, \quad a_{01}^{**} = \pm \sqrt{\frac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}}.$$

En el caso del *par de rectas paralelas* (22) es

$$(31) \quad a_{22}^{**} = a_{11} + a_{22},$$

pero como en este caso es $|A^{**}| = 0$, se pierden los dos primeros invariantes. Para calcular a_{00}^{**} basta observar que por ser en este caso $a^{*1} = a^{*2} = a_{11}^{**} = a_{21}^{**} = 0$, y por ser siempre $a_{11}^{**} = a_{11}^{*}, a_{22}^{**} = a_{22}^{*}$ resulta que $a^{*1} = a_{10}^{*} = 0$, $a^{*2} = a_{20}^{*} + a_{22}^{*} b = 0$, de donde, teniendo en cuenta (31), se deduce:

$$(32) \quad a_{00}^{**} = a^{*} A^{*} a^{*'} = a_{00} + a_{02}^{*} b = a_{00} - \frac{a_{02}^{*2}}{a_{22}^{*}} = \frac{A_{11}}{a_{22}} = \frac{A_{11} + A_{22}}{a_{11} + a_{22}}.$$

En el caso (13) no se trata propiamente de una cónica, sino de una recta.

3. Estudio particular de las cónicas.

ELIPSE (fig. 75).—Consideremos ahora el caso en que en (16) se verifique que $\text{sig}(a_{11}^{**}) = \text{sig}(a_{22}^{**}) \neq \text{sig}(a_{00}^{**})$. En tal caso, poniendo $-\frac{a_{00}^{**}}{a_{11}^{**}} = a^2$, $-\frac{a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}} = b^2$, la ecuación (16) se escribe en la forma:

$$(33) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en donde a las variables x^{**} e y^{**} se les ha vuelto a llamar x, y . La cónica representada por la ecuación (33) se llama *elipse*. Los números a y b se llaman semiejes de la elipse, y al número $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (en la hipótesis de ser $a > b$) se le llama *distancia focal*. Los puntos $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ se llaman *focos* de la elipse. La propiedad fundamental de la elipse, que se toma generalmente para definirla, es la siguiente: *la suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los dos focos es constante*. A las distancias $r = XF$, $r' = XF'$ de un punto X de la elipse a los focos se les llama *radios vectores* de X . Sean (x, y) las coordenadas de X . Por ser X punto de la elipse entre x e y , se verificará la relación (33), es decir, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$. Llevando este valor a las expresiones

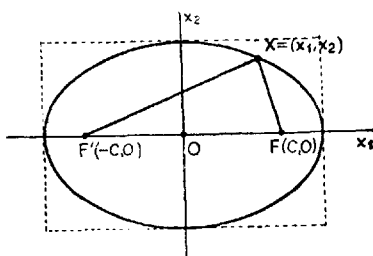


Fig. 75.

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

y efectuando operaciones, resulta:

$$(34) \quad r = \frac{1}{a} (a^2 - cx), \quad r' = \frac{1}{a} (a^2 + cx).$$

Sumando estas dos igualdades miembro a miembro se obtiene $r + r' = 2a$, que es la propiedad enunciada.

Las ecuaciones $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ representan también una elipse, como se comprueba sin más que sustituirlas en (33), y se llaman *ecuaciones paramétricas* de la elipse. Estas ecuaciones permiten dibujar puntos de la elipse.

En el caso en que $\text{sig}(a_{11}^{**}) = \text{sig}(a_{22}^{**}) = \text{sig}(a_{00}^{**})$ la ecuación (16) se puede escribir en la forma:

$$(35) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

y la cónica se llama *elipse imaginaria*, por no poseer ningún punto real.

HIPÉRBOLA (fig. 76).—Cuando en (16) se verifica que $\text{sig}(a_{11}^{**}) \neq \text{sig}(a_{22}^{**})$ la ecuación (16) se puede escribir en una de las formas siguientes:

$$(36) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1,$$

siendo $a^2 = \pm \frac{a_{00}^{**}}{a_{11}^{**}}$, $b^2 = \mp \frac{a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}}$. Las dos cónicas representadas por las ecuaciones (36) se llaman *hipérbolas conjugadas*. Hallando las intersecciones de las rectas $y = \lambda x$, que pasan por el centro, con la hipérbola, se obtienen los puntos

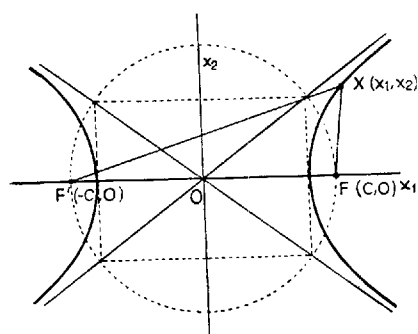


Fig. 76.

$$\left(\pm \frac{a b}{\sqrt{\pm (b^2 - a^2 \lambda^2)}}, \pm \frac{a b \lambda}{\sqrt{\pm (b^2 - a^2 \lambda^2)}} \right).$$

Esto indica que las dos rectas:

$$(37) \quad y = \pm \frac{b}{a} x$$

separan las rectas, incidentes con el centro, secantes a la hipérbola de las exteriores. Las rectas (37) se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Por consiguiente, las dos hipérbolas conjugadas poseen las mismas asíntotas. Las dos rectas (37) se pueden representar conjuntamente mediante la ecuación:

$$(38) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Consideremos una de las hipérbolas (36), por ejemplo la

$$(39) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y vamos a demostrar: *el valor absoluto de la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola (39) a los puntos $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, llamados focos, es constante.*

En efecto, sea $X = (x, y)$ un punto arbitrario de (39), y $r = XF$, $r' = XF'$. Como en el caso de la elipse, se obtiene:

$$(40) \quad r = \frac{1}{a} (c x - a^2), \quad r' = \frac{1}{a} (c x + a^2).$$

de donde:

$$(41) \quad |r - r'| = 2a,$$

que es lo que se quería probar. Esta propiedad sirve para definir geométricamente a la hipérbola.

PAR DE RECTAS NO PARALELAS.—En la ecuación (16) se verifica siempre que $a_{11}^{**} \neq 0$ y $a_{22}^{**} \neq 0$, porque $a_{11}^{**} a_{22}^{**} = A_{00}^{**} = A_{00}^* = A_{00} \neq 0$, en virtud de la hipótesis; pero puede suceder que sea $a_{00}^{**} = 0$. En este caso la ecuación (16) se puede escribir en una de las dos formas siguientes:

$$(42) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

$$(43) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

según que a_{11}^{**} y a_{22}^{**} tengan distinto o el mismo signo, respectivamente. La ecuación (42) representa al par de rectas reales

$$(44) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

y la ecuación (43) representa el par de rectas imaginarias:

$$(45) \quad \frac{x}{a} + i \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - i \frac{y}{b} = 0.$$

Tanto las rectas (44) como las (45) se cortan en el punto real $(0, 0)$, es decir, en el origen de coordenadas. Los ejes de coordenadas son las bisectrices de los ángulos formados por las rectas (44) y, por extensión, se llaman también bisectrices de los ángulos formados por las rectas (45). Resumiendo: *una cónica puede estar formada por dos rectas que se cortan. Las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas se llaman ejes de la cónica y ésta se dice que es reducible o que se descompone en dicho par de rectas.*

PARÁBOLA.—Consideremos ahora el caso en que la cónica se pueda poner en la forma reducida (20), siendo $a_{22}^{**} \neq 0$. Entonces, la ecuación (20) se podrá escribir del siguiente modo:

$$(46) \quad y^2 = 2 p x, \quad p = -\frac{a_{01}^{**}}{a_{22}^{**}}$$

y la cónica se llama *parábola*. La ecuación (46) muestra que el eje x es un eje de simetría de la parábola, por lo que se le llama simplemente *eje de la parábola*. Al punto $F = \left(\frac{p}{2}, 0 \right)$ se le llama *foco de la parábola*, y a la recta $x = -\frac{p}{2}$, *directriz* de la misma. Vamos a demostrar la siguiente propiedad fundamental de la parábola.

Los puntos de una parábola equidistan del foco y de la directriz. En efecto, sea $X = (x, y)$

un punto arbitrario de la parábola, y B el pie de la perpendicular trazada desde X a la directriz. Se verifica que $XB = x + \frac{p}{2}$ (véase fig. 77), y teniendo en cuenta la ecuación (46):

$$XF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = x + \frac{p}{2}.$$

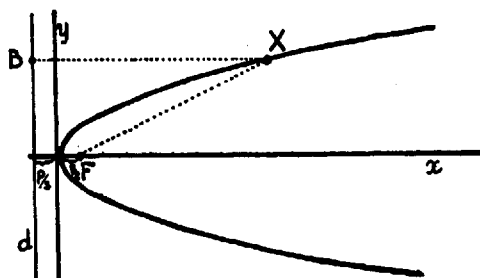


Fig. 77.

Si en la ecuación (46) se efectúa una traslación de ejes, se obtiene una ecuación de la forma:

$$(47) \quad x = a_0 y^2 + a_1 y + a_2,$$

y si en (47) se permutan entre sí los ejes de las x y de las y , se obtiene:

$$(48) \quad y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2;$$

luego, las ecuaciones de la forma (47) y (48) representan parábolas cuyos ejes son paralelos al eje de las x y al eje de las y , respectivamente.

PAR DE RECTAS PARALELAS.—Si la ecuación de la cónica admite la expresión reducida (22), ésta se puede poner de la siguiente forma:

$$(49) \quad y^2 = \pm a^2, \quad a = \sqrt{\left| \frac{a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}} \right|}$$

en donde el signo $+$ corresponde al caso en que $\text{sig}(a_{00}^{**}) = (a_{22}^{**})$ y el signo $-$ al caso en que $\text{sig}(a_{00}^{**}) \neq \text{sig}(a_{22}^{**})$. En el primer caso (49) representa a las dos rectas $y = \pm a$, que son dos rectas paralelas cuya paralela media es el eje x . En el segundo caso, (49) representa a las rectas imaginarias $y = \pm i a$, que se consideran también como paralelas al eje x .

RECTAS COINCIDENTES.—En el caso particular en que sea $a = 0$, la ecuación (22) se reduce a

$$(50) \quad y^2 = 0,$$

que representa dos rectas coincidentes con el eje x .

4. Clasificación afín y métrica de las cónicas.—Acabamos de ver que una cónica puede ser de uno de los siguientes tipos: *elipse* (33), *elipse imaginaria* (35), *hipérbola* (36), *par de rectas reales no paralelas* (42), *par de rectas imaginarias no paralelas* (43), *parábola* (46), *par de rectas paralelas* (49) (*signo +*), *par de rectas imaginarias paralelas* (49) (*signo -*) y *par de rectas coincidentes* (50). Estos tipos se llaman afines porque gozan de la propiedad de que si se transforma una cónica mediante una afinidad cualquiera, la cónica transformada sigue perteneciendo al mismo tipo que la dada. Se presenta la cuestión de averiguar a cuál de estos tipos pertenece una cónica dada por su ecuación general (2). Para ello recordemos que los coeficientes de su ecuación reducida se pueden calcular mediante los invariantes (27), por lo que comenzaremos por calcular estos tres invariantes. En las ecuaciones reducidas se observa que $|A^{**}|$ es distinto de cero únicamente en las elipses, hipérbolas y parábolas, que se llaman cónicas irreducibles, mientras que en los restantes tipos es $|A^{**}| = 0$, llamándose a las cónicas de estos tipos *reducibles* o *degeneradas*. Si $|A| = |A^{**}| \neq 0$, pueden ocurrir dos subcasos: $A_{00} \neq 0$ o $A_{00} = 0$. En el primero la cónica será una cónica con centro, y en el segundo una parábola. Si $A_{00} \neq 0$, para distinguir si se trata de una elipse o de una hipérbola basta recordar que esto depende de que a_{11}^{**} y a_{22}^{**} tengan o no el mismo signo, y como estos coeficientes son las raíces de la ecuación (29), tendrán el mismo signo cuando $A_{00} > 0$, ya que $A_{00} = a_{11}^{**} a_{22}^{**}$, mientras que si $A_{00} < 0$ tendrán distinto signo. Luego si $A_{00} > 0$, se trata de una elipse (real o imaginaria), y si $A_{00} < 0$, de una hipérbola. Para distinguir si se trata de una elipse real o imaginaria, basta recordar (28) y (29). Por tratarse de elipse es $A_{00} > 0$, luego $\text{sig}(a_{00}^{**}) = \text{sig}|A|$, y por ser las dos raíces de (29) del mismo signo, será el de su suma y ésta (véase la ecuación (29)) es igual a $a_{11} + a_{22}$; por consiguiente, si $\text{sig}|A| = \text{sig}(a_{11} + a_{22})$, la elipse será imaginaria, y si $\text{sig}|A| \neq \text{sig}(a_{11} + a_{22})$, será real.

Supongamos ahora que $|A| = 0$, es decir, que se trata de una cónica reducible. Si $A_{00} \neq 0$, será una cónica con centro único, y como las únicas cónicas con centro único reducibles son los pares de rectas, reales o imaginarias, no paralelas, a uno de estos dos tipos pertenecerá la cónica dada. Para distinguirlos basta repetir el razonamiento hecho anteriormente respecto de los signos de a_{11}^{**} y a_{22}^{**} , es decir, si $A_{00} < 0$ se tratará de rectas reales, y si $A_{00} > 0$, de rectas imaginarias. Supongamos ahora que $|A| = 0$ y $A_{00} = 0$. En este caso, si $A_{11} + A_{22} \neq 0$ se obtienen, en virtud de (32), dos rectas paralelas. De (31) y (32) se deduce que $a_{00}^{**} a_{22}^{**} = A_{11} + A_{22}$, luego, si $A_{11} + A_{22} > 0$ serán dos rectas imaginarias y si $A_{11} + A_{22} < 0$ dos rectas reales. Si $A_{11} + A_{22} = 0$ será $a_{00}^{**} = 0$, luego las rectas coincidirán.

Podemos resumir todo esto en el siguiente cuadro, que indica el proceso a seguir para obtener la

CLASIFICACION AFÍN

$$\begin{array}{l}
 |A| \neq 0 \\
 \text{Cónica} \\
 \text{irreducible}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 A_{00} \neq 0 \\
 \text{Cónica} \\
 \text{con centro} \\
 \text{único}
 \end{array}
 \right\}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 A_{00} > 0 \\
 \text{Elipse} \\
 A_{00} < 0 \\
 \text{Hipérbola}
 \end{array}
 \right\}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \text{sig } |A| = \text{sig } (a_{11} + a_{22}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Elipse imaginaria} \\ \text{Elipse real} \end{array} \right. \\
 \text{sig } |A| \neq \text{sig } (a_{11} + a_{22})
 \end{array}
 \right.
 \left. \begin{array}{l}
 A_{00} = 0 \\
 \text{Parábola}
 \end{array}
 \right.
 \right.$$

$$\begin{array}{l}
 |A| = 0 \\
 \text{Cónica} \\
 \text{reducible}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 A_{00} \neq 0 \\
 \text{rectas no} \\
 \text{paralelas} \\
 A_{00} = 0 \\
 \text{rectas} \\
 \text{paralelas}
 \end{array}
 \right\}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 A_{00} > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Par de rectas imaginarias no paralelas} \\ \text{Par de rectas reales} \end{array} \right. \\
 A_{00} < 0 \\
 A_{11} + A_{22} \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A_{11} + A_{22} > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Rectas imaginarias} \\ \text{Rectas reales} \end{array} \right. \\ A_{11} + A_{22} < 0 \\ A_{11} + A_{22} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Rectas coincidentes} \end{array} \right.
 \end{array}
 \right.
 \right.$$

Desde el punto de vista métrico se presentan algunos subtipos interesantes de los anteriores tipos afines. Un subtipo métrico de la elipse es la circunferencia. Para que se presente este subtipo, las dos raíces de (29) deben ser iguales, es decir, $(a_{11} + a_{22})^2 - 4A_{00} = 0$. Ahora bien, $(a_{11} + a_{22})^2 - 4A_{00} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$, y como para que una suma de números no negativos sea nula deben serlo todos los sumandos, resulta de aquí que $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$.

Un subtipo métrico de la hipérbola es la llamada *equilátera*, es decir, la hipérbola cuyas asíntotas son perpendiculares. De (26) se deduce que para que esto suceda debe ser $\frac{b^2}{a^2} = -1$, pero como $\frac{b^2}{a^2} = \frac{a_{22}^{**}}{a_{11}^{**}}$ resulta que la condición de hipérbola equilátera es $a_{11}^{**} + a_{22}^{**} = 0$, o bien, en virtud de (16), $a_{11} + a_{22} = 0$. Finalmente, un subtipo métrico de la cónica formada por dos rectas no paralelas es el caso en que las rectas sean perpendiculares. Como en el caso de la hipérbola equilátera, para que esto suceda debe ser $a_{11} + a_{22} = 0$.

Si a la clasificación afín se le añade la siguiente subclasificación, se obtiene la *clasificación métrica*.

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \text{Si } a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0 \text{ y } |A| \neq 0, \text{ la cónica es una circunferencia (real o imaginaria).} \\
 \text{Si } a_{11} + a_{22} = 0 \text{ no siendo nulos los dos términos y } |A| \neq 0, \\
 \quad \text{la cónica es una hipérbola equilátera.} \\
 \text{Si } a_{11} + a_{22} = 0 \text{ no siendo nulos los dos términos y } |A| = 0, \\
 \quad \text{la cónica son dos rectas perpendiculares.}
 \end{array}
 \right.$$

EJERCICIO:

654. Clasificar y hallar la ecuación reducida de las siguientes cónicas:

- a) $13x^2 + 5y^2 + 4xy - 26x - 22y + 23 = 0$,
- b) $6x^2 + xy - 7x - 2y^2 + 7y - 5 = 0$,
- c) $4x^2 + y^2 - 4xy + 1 = 0$,
- d) $25x^2 - 20xy + 20x + 4y^2 - 8y + 3 = 0$,
- e) $xy = 1$,
- f) $6x^2 + xy - 7x - 2y^2 + 7y + 1 = 0$,
- g) $4x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$,
- h) $x^2 + y^2 = 0$.

§ 3. CUADRICAS

1. Cuádricas. Ecuaciones reducidas.—Se llama *cuádrica* al conjunto de los puntos del espacio euclídeo representado por una ecuación de segundo grado con tres variables, como la siguiente:

$$(1) \quad a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

La ecuación (1) puede escribirse en forma matricial del siguiente modo:

$$(2) \quad \mathbf{x} A \mathbf{x}' = 0, \quad \mathbf{x} = (1, x, y, z), \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = A' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La matriz A la descompondremos en cajas del siguiente modo:

$$(3) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a \\ \hline a' & A_0 \end{array} \right), \quad a = (a_{01}, a_{02}, a_{03}), \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sea $R = \{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ un sistema de referencia en el espacio. Se trata de hallar otro respecto del cual la ecuación (1) se transforme en otra con el menor número posible de términos no nulos. Este problema lo trataremos en dos fases. En la primera pasaremos del sistema de referencia R al sistema

$\mathbb{R}^* = \{O; \mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*\}$, que tiene el mismo origen que el anterior. Las fórmulas correspondientes al cambio de sistema $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ son:

$$(4) \quad (1, x, y, z) = (1, x^*, y^*, z^*) \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & \omega \end{array} \right), \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix},$$

siendo $O = (0, 0, 0)$. Mediante la transformación (4) la cuádrica (2) se transforma en:

$$(5) \quad (1, x^*, y^*, z^*) \left(\begin{array}{c|c} a_{00} & a \omega' \\ \hline \omega a' & \omega A_0 \omega' \end{array} \right) (1, x^*, y^*, z^*)' = 0.$$

De (2), (3) y (5) resulta que el cambio de coordenadas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ produce la transformación de la expresión de la forma cuadrática

$$(x, y, z) A_0 (x, y, z)'$$

en la expresión

$$(x^*, y^*, z^*) A_0^* (x^*, y^*, z^*)', \quad A_0^* = \omega A_0 \omega'.$$

Ahora bien, en virtud de 1, 4, § 1, existe un cambio de base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \rightarrow (\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*)$ tal que la matriz A_0^* sea una matriz diagonal y la matriz ω sea una matriz ortogonal:

$$(6) \quad \omega \omega' = I,$$

siendo I la matriz unidad. Supondremos elegida la base $\mathbf{B}^* = \{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*\}$ de modo que:

$$(7) \quad A_0^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & & \\ & a_{22}^* & \\ & & a_{33}^* \end{pmatrix},$$

sea diagonal y que ω sea ortogonal. Pondremos, por tanto:

$$(8) \quad A^* = \left(\frac{a_{00}}{\omega \, a'} \middle| \frac{a \, \omega'}{A_0^*} \right) = \left(\frac{a_{00}^*}{a_{10}^*} \middle| \frac{a_{01}^* \, a_{02}^* \, a_{03}^*}{a_{11}^*} \right), \quad \begin{cases} a_{00}^* = a_{00} \\ a_{01}^* = a_{01} \omega_{11} + a_{02} \omega_{21} + a_{03} \omega_{31} \\ a_{02}^* = a_{01} \omega_{12} + a_{02} \omega_{22} + a_{03} \omega_{32} \\ a_{03}^* = a_{01} \omega_{13} + a_{02} \omega_{23} + a_{03} \omega_{33} \end{cases}$$

Los tres elementos $(a_{11}^*, a_{22}^*, a_{33}^*)$ son las raíces (1, 4, § 1) del polinomio secular:

$$(9) \quad |A_0 - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \sum_{i=1}^3 a_{ii} \lambda^2 - \sum_{i < j}^{1, 2} a_{ij} \lambda + A_{00},$$

en donde a_{ij} es el menor principal de segundo orden cuya matriz contiene en la diagonal principal los elementos a_{ii} y a_{jj} y A_{00} es el adjunto de a_{00} en la matriz A (3).

TRASLACIÓN DE EJES.—En segundo lugar, efectuaremos el siguiente cambio de sistema de referencia, llamado traslación de ejes:

$$(10) \quad R^* = \{O; u_1^*, u_2^*, u_3^*\} \rightarrow R^{**} = \{O^*; u_1^{**}, u_2^{**}, u_3^{**}\}.$$

Las ecuaciones correspondientes a la traslación (10) son:

$$(11) \quad \begin{cases} x^* = x^{**} T, \quad x^* = (1, x^*, y^*, z^*), \quad x^{**} = (1, x^{**}, y^{**}, z^{**}), \\ T = \left(\frac{1}{0} \middle| \frac{t_1 \, t_2 \, t_3}{0 \, 1 \, 0 \, 0} \right) = \left(\frac{1}{0} \middle| \frac{t}{1} \right), \quad t = (t_1, t_2, t_3). \end{cases}$$

Efectuando la traslación de ejes (11), la ecuación (8) de la cuádrica toma la siguiente forma:

$$(12) \quad x^{**} A^{**} x^{**'} = 0, \quad A^{**} = T A^* T' = \left(\frac{a_{00} + t a_0^{*'} + a_0^* t' + t A_0^* t'}{a_0^{*'} + A_0^* t'} \middle| \frac{a_0^* + t A_0^*}{A_0^*} \right),$$

siendo $a_0^* = (a_{01}^*, a_{02}^*, a_{03}^*)$.

El sistema

$$(13) \quad a^*_{00} + t A^*_{00} = 0: \quad a^*_{01} + t_1 a^*_{11} = 0, \quad a^*_{02} + t_2 a^*_{22} = 0, \quad a^*_{03} + t_3 a^*_{33} = 0,$$

tiene solución única en t_1, t_2, t_3 cuando las tres raíces de la ecuación secular sean distintas de cero. A las cuádricas con sus tres valores propios distintos de cero se les llama *cuádricas con centro único*.

ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CUÁDRICAS CON CENTRO ÚNICO.—Tomando para t_1, t_2, t_3 los valores dados por (13), la ecuación de una cuádrica con centro único puede escribirse en la siguiente forma:

$$(14) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**} = 0, \quad A^{**} = \begin{pmatrix} a^{**}_{00} & 0 \\ 0 & A^{**}_0 \end{pmatrix},$$

siendo

$$(15) \quad A^*_0 = A^{**}_0 = \begin{pmatrix} a^*_{11} & & \\ & a^*_{22} & \\ & & a^*_{33} \end{pmatrix},$$

y $a^*_{11}, a^*_{22}, a^*_{33}$ los tres valores propios de la cuádrica. Atendiendo a los signos de estos valores propios, se obtienen las siguientes cuádricas con centro único:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Elipsoide imaginario: } \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} + \frac{z^{**2}}{c^2} = -1, \\ a = \sqrt{\frac{a^{**}_{00}}{a^{**}_{11}}}, \quad b = \sqrt{\frac{a^{**}_{00}}{a^{**}_{22}}}, \quad c = \sqrt{\frac{a^{**}_{00}}{a^{**}_{33}}}. \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Elipsoide real (fig. 78): } \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} + \frac{z^{**2}}{c^2} = 1, \\ a = \sqrt{\frac{-a^{**}_{00}}{a^{**}_{11}}}, \quad b = \sqrt{\frac{-a^{**}_{00}}{a^{**}_{22}}}, \quad c = \sqrt{\frac{-a^{**}_{00}}{a^{**}_{33}}}. \end{array} \right.$$

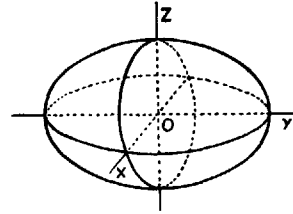


Fig. 78.

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hiperboloide elíptico: } \frac{x^{**2}}{a^2} - \frac{y^{**2}}{b^2} - \frac{z^{**2}}{c^2} = 1, \\ a = \sqrt{\frac{-a^{**}_{00}}{a^{**}_{11}}}, \quad b = \sqrt{\frac{a^{**}_{00}}{a^{**}_{22}}}, \\ c = \sqrt{\frac{a^{**}_{00}}{a^{**}_{33}}}. \end{array} \right.$$

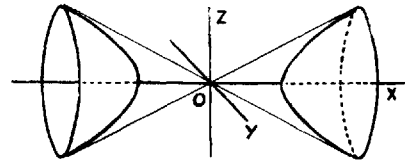


Fig 79.

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \text{Hiperboloide hiperbólico: } \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} - \frac{z^{**2}}{c^2} = 1, \\ a = \sqrt{\frac{-a_{00}^{**}}{a_{11}^{**}}}, \quad b = \sqrt{\frac{-a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}}}, \quad c = \sqrt{\frac{a_{00}^{**}}{a_{33}^{**}}}. \end{array} \right.$$

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \text{Cono imaginario: } \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} + \frac{z^{**2}}{c^2} = 0, \\ a = \sqrt{\frac{1}{a_{11}^{**}}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{a_{22}^{**}}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{a_{33}^{**}}}. \end{array} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \text{Cono real: } \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} - \frac{z^{**2}}{c^2} = 0, \\ a = \sqrt{\frac{1}{a_{11}^{**}}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{a_{22}^{**}}}, \quad c = \sqrt{\frac{-1}{a_{33}^{**}}}. \end{array} \right.$$

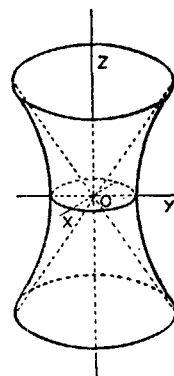


Fig. 80.

Se llama *rango de una cuádrica* al rango de la matriz de su ecuación. Para justificar esta definición, vamos a probar el siguiente

TEOREMA 2.—*El rango de la matriz de una cuádrica no depende del sistema de referencia empleado para escribir su ecuación.*

DEMOSTRACIÓN.—Efectuando la transformación de coordenadas

$$(22) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \mathbf{M}, \quad |\mathbf{M}| \neq 0,$$

la ecuación (1) se transforma en la siguiente:

$$(23) \quad \mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x}^* = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}'.$$

Ahora bien, los vectores que forman las filas de la matriz $\mathbf{M} \mathbf{A}$ son combinaciones lineales de los vectores que forman las filas de la matriz $\mathbf{A}$; luego el rango de $\mathbf{M} \mathbf{A}$ será menor o igual que el de $\mathbf{A}$. Análogamente las columnas de $\mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}'$ dependen linealmente de las columnas de $\mathbf{M} \mathbf{A}$; luego el rango de $\mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}'$ será menor o igual al rango de $\mathbf{M} \mathbf{A}$. De todo esto se deduce

$$(24) \quad \text{rango}(\mathbf{B}) = \text{rango}(\mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}') \leq \text{rango}(\mathbf{A}).$$

Ahora bien, por ser $|\mathbf{M}| \neq 0$, de (23) se deduce que

$$(25) \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{M}'^{-1}$$

y aplicando el mismo razonamiento anterior a (25), se obtiene

$$(26) \quad \text{rango}(A) = \text{rango}(M^{-1} B M'^{-1}) \leq \text{rango}(B),$$

de (24) y (26) resulta el teorema.

A las cuádricas de rango cuatro se les llama *cuádricas ordinarias*.

Se llaman *paraboloides* las cuádricas ordinarias con un valor propio igual a cero.

ECUACIONES REDUCIDAS DE LOS PARABOLOIDES.—Suponiendo que $a_{33}^* = 0$, las ecuaciones (13) permiten calcular unívocamente t_1 y t_2 , obteniéndose la siguiente ecuación:

$$(27) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**} = 0, \quad A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^* & 0 \\ a_{03}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $|A^{**}| \neq 0$, por ser cuatro el rango de los paraboloides, y como $|A^{**}| = -a_{03}^{**2} a_{11}^* a_{22}^*$, será $a_{03}^{**} \neq 0$. De (12) se deduce que

$$a_{00}^{**} = a_{00}^* + 2(a_{01}^* t_1 + a_{02}^* t_2 + a_{03}^* t_3) + a_{11}^* t_1^2 + a_{22}^* t_2^2,$$

y se puede dar a t_3 el valor

$$(28) \quad t_3 = -\frac{a_{00}^* + a_{11}^* t_1^2 + a_{22}^* t_2^2 + 2(a_{01}^* t_1 + a_{02}^* t_2)}{2a_{03}^*} = -\frac{a_{00}^* + a_{01}^* t_1 + a_{02}^* t_2}{2a_{03}^*},$$

con lo que resulta $a_{00}^{**} = 0$ y la siguiente ecuación reducida de los paraboloides

$$(29) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**} = 0, \quad A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{03}^* \\ 0 & a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^* & 0 \\ a_{03}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A^{**}| = -a_{03}^{*2} a_{11}^* a_{22}^* \neq 0.$$

Según los signos de las raíces de la ecuación secular se obtienen los dos tipos siguientes de paraboloides:

(30) *Paraboloide elíptico* (fig. 81):

$$z^{**} = \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2}, \quad a = \sqrt{\frac{-2a_{03}^*}{a_{11}^*}}, \quad b = \sqrt{\frac{-2a_{03}^*}{a_{22}^*}}.$$

(31) *Paraboloides hiperbólico* (fig. 82):

$$z^{**} = \frac{x^{**2}}{a^2} - \frac{y^{**2}}{b^2}, \quad a = \sqrt{\frac{-2a_{03}^*}{a_{11}^*}}, \quad b = \sqrt{\frac{2a_{03}^*}{a_{22}^*}}.$$

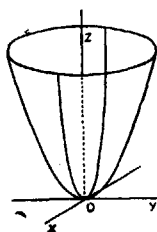


Fig. 81.

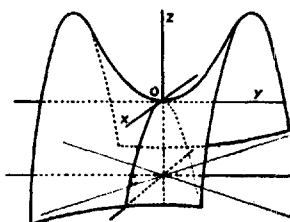


Fig. 82.

ECUACIONES REDUCIDAS DE LOS CILINDROS NO PARABÓLICOS.—Si en (27) es $a_{03}^* = 0$, no se puede efectuar la reducción correspondiente al valor (28) de t_3 y se obtienen, cuando $a_{00}^{**} \neq 0$, los *cilindros no parabólicos* siguientes:

(32) *Cilindro imaginario*:

$$\frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} = -1, \quad a = \sqrt{\frac{a_{00}^{**}}{a_{11}^{**}}}, \quad b = \sqrt{\frac{a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}}}.$$

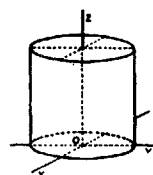


Fig. 83.

(33) *Cilindro elíptico* (fig. 83):

$$\frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} = 1, \quad a = \sqrt{\frac{-a_{00}^{**}}{a_{11}^{**}}}, \quad b = \sqrt{\frac{-a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}}}.$$

(34) *Cilindro hiperbólico* (fig. 84):

$$\frac{x^{**2}}{a^2} - \frac{y^{**2}}{b^2} = 1, \quad a = \sqrt{\frac{-a_{00}^{**}}{a_{11}^{**}}}, \quad b = \sqrt{\frac{a_{00}^{**}}{a_{22}^{**}}}.$$

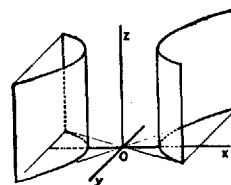


Fig. 84.

Estos tres cilindros poseen la ecuación conjunta

$$(35) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**} = 0, \quad A^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^{**} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ECUACIONES REDUCIDAS DE LOS PARES DE PLANOS SECANTES.—Si en (35) es $a_{00}^{**} = 0$, se obtiene la cuádrica

$$(36) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**'} = 0, \quad A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

que está formada por dos planos no paralelos, que, según los signos de a_{11}^* y a_{22}^* , pueden ser

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pares de planos secantes imaginarios: } \frac{x^{**2}}{a^2} + \frac{y^{**2}}{b^2} = 0, \\ a = \sqrt{\frac{1}{a_{11}^*}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{a_{22}^*}}. \end{array} \right.$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pares de planos secantes reales: } \frac{x^{**2}}{a^2} - \frac{y^{**2}}{b^2} = 0, \\ a = \sqrt{\frac{1}{a_{11}^*}}, \quad b = \sqrt{\frac{-1}{a_{22}^*}}. \end{array} \right.$$

Si la ecuación secular tiene dos raíces nulas, $a_{22}^* = a_{33}^* = 0$, el sistema (13) queda reducido a una única ecuación, que permite reducir a cero a_{01}^{**} , que dando (12) en la forma

$$(39) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**'} = 0, \quad A^{**} = T A^* T' = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & a_{02}^{**} & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^* & 0 & 0 \\ a_{20}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$(40) \quad a_{00}^{**} = a_{00} + 2(t_1 a_{01}^* + t_2 a_{02}^* + t_3 a_{03}^*) + t_1^2 a_{11}^*.$$

Si una, por lo menos, de las a_{02}^* y a_{03}^* es distinta de cero, se puede calcular en (40), t_2 o t_3 , de modo que $a_{00}^{**} = 0$, y queda la siguiente ecuación reducida:

$$(41) \quad \mathbf{x}^{**} A^{**} \mathbf{x}^{**'} = 0, \quad A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02}^{**} & a_{03}^{**} \\ 0 & a_{11}^* & 0 & 0 \\ a_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ a_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que da lugar a los siguientes tipos de cuádricas:

CILINDRO PARABÓLICO Y PARES DE PLANOS PARALELOS.—Si ambos a_{02}^* y a_{03}^* son distintos de cero, no puede reducirse más la ecuación (41) mediante una traslación. Efectuando otro giro de ejes:

$$(42) \quad \mathbf{x}^{**} = \mathbf{y} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hline \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix},$$

la ecuación (41) se transforma en la siguiente:

$$(43) \quad \mathbf{y} \mathbf{D} \mathbf{y}' = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{H} \mathbf{A}^{**} \mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{21} a_{02}^{**} + \theta_{31} a_{03}^{**}, & \theta_{22} a_{02}^{**} + \theta_{32} a_{03}^{**}, & \theta_{23} a_{02}^{**} + \theta_{33} a_{03}^{**} \\ \hline a_{11}^* & \theta_{11}^2 & a_{11}^* \theta_{11} & \theta_{21} & a_{11}^* \theta_{11} & \theta_{31} \\ * & a_{11}^* \theta_{21} & \theta_{11} & a_{11}^* \theta_{21}^2 & a_{11}^* \theta_{21} & \theta_{31} \\ a_{11}^* & \theta_{11} & \theta_{31} & a_{11}^* \theta_{21} & \theta_{31} & a_{11}^* \theta_{31}^2 \end{pmatrix}.$$

Eligiendo $\theta_{21} = \theta_{31} = 0$, $\theta_{11} = 1$, $\theta_{12} = \theta_{13} = 0$, $\theta_{22} = \cos \varphi$, $\theta_{23} = -\sin \varphi$, $\theta_{32} = \sin \varphi$, $\theta_{33} = \cos \varphi$ y $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{03}^*}{a_{02}^*}$, resulta:

$$(44) \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que se obtiene la siguiente *ecuación reducida de los cilindros parabólicos* (fig. 85):

$$(45) \quad x^{**2} = 2 p y^{**}; \quad 2 p = -\frac{d}{a_{11}^*}$$

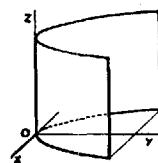


Fig. 85.

Si en (39) son $a_{02}^{**} = a_{03}^{**} = 0$, se obtienen *pares de planos paralelos*:

$$(46) \quad x^{**} \mathbf{A}^{**} x^{**'} = 0, \quad \mathbf{A}^{**} = \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que según los signos de a_{00}^{**} y a_{11}^* , dan lugar a los casos siguientes:

$$(47) \quad \text{Par de planos paralelos reales:} \quad x^{**2} = a^2, \quad a = \sqrt{\frac{-a_{00}^{**}}{a_{11}^*}}.$$

$$(48) \quad \text{Par de planos paralelos imaginarios:} \quad x^{**2} = -a^2, \quad a = \sqrt{\frac{a_{00}^{**}}{a_{11}^*}}.$$

Si en (46) es $a_{00}^{**} = 0$, se obtiene:

$$(49) \quad \text{Par de planos coincidentes:} \quad x^{**2} = 0.$$

Finalmente, si las tres raíces de la ecuación secular son nulas, la ecuación de la cuádrica se reduce a

$$\mathbf{x} \begin{pmatrix} a_{00}^{**} & a_{01}^{**} & a_{02}^{**} & a_{03}^{**} \\ a_{10}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{20}^{**} & 0 & 0 & 0 \\ a_{30}^{**} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}' = 0$$

que representa un plano.

2. Invariantes métricos de las cuádricas.—Para hallar la ecuación reducida de una cuádrica se emplean ciertas funciones de sus coeficientes, que permanecen invariantes frente a transformaciones de coordenadas, llamadas *invariantes*. Vamos a determinar únicamente invariantes de las cuádricas relativos a transformaciones de coordenadas métricas en métricas, por lo que les llamaremos *invariantes métricos de las cuádricas*. Las fórmulas de transformación de coordenadas métricas en métricas son:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}' \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \left(\frac{1}{0} \middle| \frac{\mathbf{a}}{\Omega} \right), \quad \mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3), \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix}, \\ \Omega \Omega' = \mathbf{I}, \quad |\mathbf{T}| = |\Omega| = \pm 1. \end{array} \right.$$

Mediante ellas se transforma la forma cuadrática (2) en

$$(51) \quad \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x}^{**}, \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}',$$

de donde, tomando determinantes y teniendo en cuenta (50),

$$(52) \quad |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|.$$

que es el *primer invariante métrico*. Ahora bien, llamando A_0 a la matriz que se obtiene al tachar en A la primera fila y la primera columna, y dando análoga significación a A_0^* respecto de A^* , de (51) se deduce que

$$(53) \quad A_0^* = \Omega A_0 \Omega',$$

de donde, tomando determinantes,

$$(54) \quad |A_0^*| = |A_0|, \quad \text{o bien,} \quad A_{00}^* = A_{00}$$

ya que $|A_0|$ es el adjunto de a_{00} en la matriz A , y análogamente $|A_0^*|$. (54) es el *segundo invariante métrico de las cuádricas*. Ahora bien, de (53) se deduce, por ser Ω una matriz ortogonal,

$$(55) \quad A_0^* - \lambda I = \Omega A_0 \Omega' - \lambda I = \Omega (A_0 - \lambda I) \Omega',$$

de donde, tomando determinantes:

$$(56) \quad |A_0^* - \lambda I| = |A_0 - \lambda I|,$$

que expresa: *el polinomio secular de una cuádrica es un invariante métrico*. Ahora bien, de

$$|A_0 - \lambda I| = A_{00} - \lambda \sum_{i=1}^3 a_{ii} + \lambda^2 \sum_{i=1}^3 a_{ii} - \lambda^3,$$

siendo a_{ii} el adjunto de a_{ii} en A_0 , se deduce que

$$(57) \quad \sum_{i=1}^3 a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}^*$$

y

$$(58) \quad \sum_{i=1}^3 a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}^*$$

son también invariantes métricos de las cuádricas. Los cuatro invariantes métricos:

$$(59) \quad \boxed{I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad J = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad K = A_{00}, \quad L = |A|}$$

permiten calcular las ecuaciones reducidas de las cuádricas en todos los casos, excluidos los cilindros y pares de planos.

INVARIANTES MÉTRICOS PROPIOS DE LOS CILINDROS Y PARES DE PLANOS.—Para los cilindros y pares de planos, exclusivamente, son invariantes métricos las siguientes expresiones (*):

$$(60) \quad \bar{K} = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \quad \bar{J} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{30} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Reducción de la ecuación de una cuádrica.

REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAS CUÁDRICAS CON CENTRO ÚNICO.—Para obtener la ecuación reducida de las cuádricas con centro único (14), basta resolver la ecuación secular

$$A_{00} - \lambda \sum_{i=1}^3 a_{ii} + \lambda^2 \sum_{i=1}^3 a_{ii} - \lambda^3 = 0,$$

con lo que se obtienen a_{11}^* , a_{22}^* , a_{33}^* , y para calcular a_{00}^{**} basta observar que $|A^{**}| = a_{00}^{**} a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* = |A|$ y como $a_{11}^* a_{22}^* a_{33}^* = |A_0^{**}| = |A_0| = A_{00}$, resulta:

$$a_{00}^{**} = \frac{|A|}{A_{00}},$$

con lo que (14) se puede escribir en la forma

$$(61) \quad x^{**} A^{**} x^{**'} = x^{**} \begin{pmatrix} \frac{|A|}{A_{00}} & & & \\ & a_{11}^* & & \\ & & a_{22}^* & \\ & & & a_{33}^* \end{pmatrix} x^{**'}.$$

REDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LOS PARABOLOIDES.—De (29) y (59) se deduce

$$-a_{03}^{*2} a_{11}^* a_{22}^* = |A|, \quad a_{11}^* a_{22}^* = J, \quad a_{11}^* + a_{22}^* = I.$$

(*) P. ABELLANAS: *Geometría básica*, cap. IV, § 30.

luego

$$a_{03}^* = \pm \sqrt{-\frac{|A|}{J}}, \quad a_{11}^*, a_{22}^* \text{ raíces de } \lambda^2 - I\lambda + J = 0.$$

REDUCCIÓN DE LOS CILINDROS NO PARABÓLICOS Y PARES DE PLANOS NO PARALELOS.—Para calcular a_{00}^{**} , a_{11}^* , a_{22}^* en (35) se dispone ahora de los invariantes (59) y (60), y se obtiene

$$I = a_{11}^* + a_{22}^*, \quad J = a_{11}^* a_{22}^*, \quad \tilde{K} = a_{00}^{**} a_{11}^* a_{22}^*,$$

de donde

$$a_{00}^{**} = \frac{\tilde{K}}{J}, \quad a_{11}^*, a_{22}^* \text{ raíces de } \lambda^2 - I\lambda + J = 0.$$

REDUCCIÓN DEL CILINDRO PARABÓLICO.—Para calcular d y a_{11}^* en (44) se dispone de las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{K} = -d^2 a_{11}^*, \quad I = a_{11}^*.$$

de donde

$$a_{11}^* = I, \quad d = \pm \sqrt{-\frac{\tilde{K}}{I}}.$$

PAR DE PLANOS PARALELOS.—La reducción en este caso se obtiene, en virtud de (46), (59) y (60), de

$$I = a_{11}^*, \quad \tilde{J} = a_{00}^{**} a_{11}^*,$$

de donde $a_{11}^* = I$, $a_{00}^{**} = \tilde{J}/I$.

4. Clasificación afín de las cuádricas.—En muchas cuestiones interesa únicamente averiguar la clase a la que pertenece una cuádrica dada, sin necesidad de obtener su ecuación reducida. Los invariantes (59) y (60) permiten resolver inmediatamente esta cuestión. Se comienza por calcular el invariante $L = |A|$. Si $L \neq 0$, se trata de una cuádrica ordinaria. Para que los tres valores propios sean distintos de cero debe ser $K = A_{00} \neq 0$. En caso contrario, la cuádrica será paraboloide. Para terminar la clasificación de las cuádricas ordinarias con centro único es necesario conocer los signos de los valores propios y del término independiente. Para ello comenzaremos por demostrar el siguiente:

LEMA.—*Todas las raíces de la ecuación secular son reales.*

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de (1, 4, § 1), existe un cambio de base en el espacio vectorial representado por una matriz ortogonal ((2), 1. c.) Ω , mediante el cual se reduce la ecuación de la cuádrica a forma diagonal. Como los elementos de la diagonal son números reales por proceder del producto, $\Omega A \Omega'$, de tres matrices reales, y son las raíces de la ecuación secular (1. c.), queda probado el lema.

Aplicando el corolario 2.º del teorema de Descartes (véase más adelante) a la ecuación secular

$$(62) \quad -\lambda^3 + I \lambda^2 - J \lambda + K = 0,$$

para lo que se forma la sucesión

$$(63) \quad \boxed{K, J, I, 1},$$

llamada *sucesión secular*, y llamando p al número de raíces positivas, n al de raíces negativas, V al número de variaciones de signo y P al número de permanencias de signo en (63), se verifica que

$$(64) \quad s = |p - n| = |P - V|.$$

al número s dado por (64) se le llama *signatura de la cuádrica*.

Pueden presentarse los siguientes casos:

1.º $s = 3$. De (62) se deduce que $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = K$, y como las tres λ_i tienen el mismo signo, será $\text{sig}(\lambda_i) = \text{sig} K$. Por consiguiente, si $\text{sig} |A|/A_{00} = \text{sig} A_{00}$, será *elipsoide imaginario*, y si $\text{sig} |A|/A_{00} \neq \text{sig} A_{00}$ será *elipsoide real*. Que equivale a: $|A| > 0$ *elipsoide imaginario*. $|A| < 0$ *elipsoide real*.

2.º $s = 1$. Como $K = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$; si $K > 0$, dos valores propios serán negativos y el tercero positivo, y si $K < 0$, uno será negativo y dos positivos. Por consiguiente, si $\text{sig} |A|/A_{00} = \text{sig} A_{00}$, se obtiene el *hiperboloide hiperbólico*, y si $\text{sig} |A|/A_{00} \neq \text{sig} A_{00}$, el *hiperboloide elíptico*.

3.º Sea $K = 0$. El paraboloide es elíptico o hiperbólico, según que las dos raíces del polinomio $\lambda^2 - I \lambda + J$ tengan el mismo o distinto signo, y como ambas son reales, esto depende del signo de J , luego si $J > 0$, *paraboloide elíptico*, y si $J < 0$, *paraboloide hiperbólico*.

4.º Supondremos en lo que sigue que $L = |A| = 0$. La *cuádrica* se

llama en este caso *con puntos singulares*. Si $K \neq 0$, la cuádrica es un cono; cuando $s = 3$, es *cono imaginario*, y si $s = 1$, *cono real*.

5.º Si $L = K = 0$, se trata de un *cilindro o de planos*. $J > 0$ será *cilindro elíptico o pares de planos imaginarios no paralelos*. Si $\text{sig } \tilde{K} = \text{sig } I$, será *cilindro imaginario*; si $\text{sig } \tilde{K} \neq \text{sig } I$, *cilindro real*. Si $\tilde{K} = 0$, será *un par de planos imaginarios conjugados no paralelos*.

6.º Si $L = K = 0$, $J < 0$, la cuádrica es un *cilindro hiperbólico o un par de planos reales no paralelos*. Si $\tilde{K} \neq 0$, se trata de *cilindro hiperbólico*, y si $\tilde{K} = 0$, *par de planos reales no paralelos*.

7.º Si $L = K = J = 0$, se trata de un *cilindro parabólico o pares de planos paralelos*. Si $\tilde{K} \neq 0$, *cilindro parabólico*. Si $\tilde{K} = 0$, *planos paralelos*. Si $\tilde{J} > 0$, *planos paralelos imaginarios conjugados*. Si $\tilde{J} < 0$, *planos paralelos reales y distintos*. Si $\tilde{J} = 0$, *planos coincidentes*.

8.º Si $L = K = J = I = 0$, *un único plano*.

Se puede resumir toda la clasificación de las cuádricas en el cuadro de la página siguiente.

EJERCICIOS:

655. Clasificar y hallar las ecuaciones reducidas de las siguientes cuádricas, referidas a un sistema de referencia métrico:

$$\text{a) } x \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} x' = 0 \quad \text{b) } x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} x' = 0.$$

$$\text{c) } x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} x' = 0. \quad \text{d) } x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} x' = 0.$$

$$\text{e) } x \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x' = 0. \quad \text{f) } x \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x' = 0.$$

CLASIFICACIÓN AFÍN DE LAS CUÁDRICAS

388

§ 8. CUÁDRICAS

[Capítulo IV]

$I_1 = A \neq 0$ Cuádrica ordinaria	$K = A_{00} \neq 0$ Cuádrica con centro único	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Signatura} = 3 \\ \text{Elipsoide} \end{array} \right\} \begin{cases} A > 0: & \text{elipsoide imaginario} \\ A < 0: & \text{elipsoide real} \end{cases}$
	$K = A_{00} = 0$ Paraboloide	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Signatura} = 1 \\ \text{Hiperboloide} \end{array} \right\} \begin{cases} A > 0: & \text{hiperboloide hiperbólico} \\ A < 0: & \text{hiperboloide elíptico} \end{cases}$
$I_2 = A = 0$ Cuádrica con puntos singulares	$K \neq 0$ Conos	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Signatura} = 3, \\ \text{Signatura} = 1, \end{array} \right. \begin{cases} \text{cono imaginario} \\ \text{cono real} \end{cases}$
	$J \neq 0$ Cilindros no parabólicos y planos secantes	$\left\{ \begin{array}{l} J > 0 \\ \text{Cilindro elíptico y} \\ \text{planos imaginarios} \end{array} \right\} \begin{cases} \tilde{K} \neq 0 \\ \text{Cilindros} \end{cases} \begin{cases} \text{sig } \tilde{K} = \text{sig } I: & \text{cilindro imaginario} \\ \text{sig } \tilde{K} \neq \text{sig } I: & \text{cilindro real} \end{cases}$
	$J < 0$ Cilindro hiperbólico y planos reales	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K} \neq 0 \\ \tilde{K} = 0 \end{array} \right. \begin{cases} \text{cilindro hiperbólico} \\ \text{par de planos.} \end{cases} \begin{cases} \text{par de planos imaginarios} \\ \text{conjugados y secantes} \end{cases}$
	$J = 0, I \neq 0$ Cilindro parabólico y planos paralelos	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K} \neq 0 \\ \tilde{K} = 0 \end{array} \right. \begin{cases} \text{c. lindro parabólico} \\ \left\{ \begin{array}{l} J \neq 0 \\ \text{Planos distintos} \end{array} \right\} \begin{cases} \tilde{J} > 0: & \text{planos imaginarios paralelos} \\ \tilde{J} < 0: & \text{planos reales paralelos} \end{cases} \\ \tilde{J} = 0 \\ \text{Planos coincidentes:} \end{cases} \begin{cases} \text{planos coincidentes} \end{cases}$
	$J = 0, I = 0$	un plano único

$$g) \quad x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x' = 0, \quad h) \quad x \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x'.$$

$$i) \quad x \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} x' = 0, \quad j) \quad x \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} x' = 0.$$

$$k) \quad x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x' = 0, \quad l) \quad x \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} x' = 0.$$

$$m) \quad x \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -5 & -2 \\ -1 & -5 & 8 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} x' = 0, \quad n) \quad x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x' = 0.$$

$$p) \quad x \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x' = 0, \quad q) \quad x \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x' = 0.$$

$$r) \quad x \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} x' = 0, \quad s) \quad x \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & -6 & 6 \\ -14 & 7 & 14 & -14 \\ -12 & 6 & 12 & -12 \end{pmatrix} x' = 0.$$

SEGUNDA PARTE

ANALISIS INFINITESIMAL

CAPITULO QUINTO

TOPOLOGIA DEL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES. FUNCIONES CONTINUAS

§ 1. EL NUMERO REAL

1. Topología en el cuerpo de los números racionales.—Se ha visto (Cap. II, § 1, 3, 20, 21) que en el problema de la medida de segmentos se podía tomar como medida de algunos segmentos un número racional, pero que podía suceder que no existiese ningún número racional correspondiente a la medida de un segmento. En este caso se podía obtener un conjunto infinito de números racionales tal como:

$$(1) \quad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

de modo que todos ellos fuesen una aproximación de la medida del segmento con la unidad elegida, pudiéndose conseguir que la diferencia $|u_n - u_{n'}|$ se haga cada vez más pequeña cuando n y n' crecen suficientemente. El problema que deseamos resolver ahora es el de ampliar convenientemente el cuerpo de los números racionales con objeto de que a todo segmento le corresponda como medida un número. Lo primero que se ocurre es llamar número a conjuntos de números racionales, tales como el (1), que resultan de medir con aproximación cada vez mayor un segmento dado. Pero esto no resuelve tampoco el problema, ya que al medir un segmento dado **a** con una unidad **u** se pueden obtener infinitos conjuntos de medidas aproximadas, tales como el (1), distintos entre sí. Ahora bien, si

$$(2) \quad v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

es otro conjunto de infinitas medidas aproximadas del segmento **a** con la unidad **u**, y se verifica que los dos conjuntos se eligen de modo que el error de cada una de las medidas aproximadas sea cada vez menor al crecer n y que se llegue a hacer tan pequeño como se desee, se observa que al crecer n la

diferencia $|u_n - v_n|$ se puede hacer arbitrariamente pequeña. Aparece, por tanto, un carácter común a todos los conjuntos de infinitas medidas aproximadas de un segmento a con una unidad u : el de proximidad de las medidas. Esto conduce a la necesidad de definir de un modo preciso la idea de proximidad en el cuerpo de los números racionales. Para ello conviene comenzar por estudiar una aplicación del cuerpo de los números racionales en sí mismo llamada valor absoluto.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO RACIONAL.—Se ha visto (Cap. I, § 5, 2, Def. 4, 3) que el conjunto de los números racionales es un conjunto totalmente ordenado. Como consecuencia, todo conjunto $C = \{a_1, \dots, a_n\}$ de un número finito de números racionales posee un máximo y un mínimo (Cap. I, § 2, 5, Def. 31).

DEFINICIÓN 1.—Se llama *valor absoluto* a una aplicación del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales en sí mismo:

$$(3) \quad \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

en la que a cada número racional x le corresponde otro número racional $|x|$ definido del siguiente modo:

$$(4) \quad |x| = \max \{x, -x\}.$$

1. a) $|x|$ es un número racional no negativo.
- b) $\text{im}(|\cdot|) = \mathbb{Q}^+$, representando por $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales no negativos.
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todo par x, y de números racionales.
- d) $|xy| = |x||y|$, para todo par x, y de números racionales.

DEMOSTRACIÓN. a) Si $x = 0$, $\max \{0, -0\} = 0$. Si $x \neq 0$, uno de los dos números $x, -x$ es positivo y el otro es negativo y todo número positivo es mayor que todo número negativo.

b) De a) se deduce que $\text{im}(|\cdot|) \subset \mathbb{Q}^+$. Si $x \in \mathbb{Q}^+$ se verifica que $-x \leq x$, luego $|x| = x$, que implica que $\mathbb{Q}^+ \subset \text{im}(|\cdot|)$.

c) De (4) se deduce:

$$(5) \quad \begin{cases} x \leq |x|, & y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x|, & -y \leq |y| \Rightarrow -x - y \leq |x| + |y| \end{cases}$$

las últimas relaciones implican que $|x| + |y|$ es una cota superior del conjunto $\{x + y, -(x + y)\}$ y como $|x + y|$ es el máximo de este conjunto, será:

$$(6) \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

d) Es consecuencia de que uno de los números x , $-x$ es no negativo y lo mismo acontece con uno de los números y , $-y$ y de ser el valor absoluto de un número no negativo él mismo.

DEFINICIÓN 2.—Se llama *entorno simétrico*, o simplemente *entorno*, de un número racional a , de radio ϵ , siendo ϵ un número racional positivo, al conjunto de todos los números racionales x tales que

$$(7) \quad |x - a| < \epsilon.$$

La relación (7) es equivalente a las siguientes:

$$(8) \quad -\epsilon < x - a < \epsilon.$$

$$(9) \quad a - \epsilon < x < a + \epsilon.$$

NOTACIÓN.—Al entorno de radio ϵ del número a lo representamos por $E_\epsilon(a)$.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *sucesión de números racionales* a una aplicación u del conjunto N de los números naturales en el conjunto de los números racionales:

$$(10) \quad N \xrightarrow{u} \mathbb{Q}.$$

Al número correspondiente al número uno se le llama *primer término* de la sucesión, al correspondiente al dos, *segundo*, etc.; al correspondiente al n , *término n -ésimo* o *término general* de la sucesión.

EJERCICIOS:

656. Escribir los tres primeros términos de las siguientes sucesiones:

$$a) \ a(n) = \frac{1}{n}, \quad b) \ b(n) = \frac{1}{n^2}, \quad c) \ c(n) = \frac{1}{n!}, \quad d) \ d(n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$e) \ e(n) = n^2, \quad f) \ f(n) = \frac{2n-1}{3n+1}, \quad g) \ g(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$h) \ h(n) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad k) \ k(n) = \sqrt[n]{2n+1}.$$

657. Escribir los términos generales de las siguientes sucesiones:

- a) 3, 5, 7, 9, ... b) 2, 4, 6, 8, ...
 c) 7, 14, 21, 28, ... d) 2, 4, 8, 16, ... e) 1, 4, 9, 16, 25, ...
 f) 10, 100, 1000, 10000, ... g) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$
 h) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

Dos sucesiones a y b se llaman *iguales*, y se escribe $a = b$ cuando, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $a(n) = b(n)$.

DEFINICIÓN 4.—Dadas las sucesiones a y b se llama *suma*, y se representa por $a + b$ a la sucesión definida del siguiente modo:

$$(11) \quad (a + b)(n) = a(n) + b(n).$$

EJERCICIOS:

658. Sumar las sucesiones a) y b) del ejercicio 657. Idem las a) y c). Idem las d) y e).

659. Con las sucesiones del ejercicio 658, escribir los términos generales de las siguientes sucesiones: a) $a + b$, b) $c + d$, c) $b + e$, d) $e + f$.

2. El conjunto $\mathcal{A}$ de todas las sucesiones de números racionales es, respecto de la adición, un grupo abeliano, cuyo elemento neutro es la sucesión:

$$(12) \quad 0(n) = 0$$

y el elemento opuesto, $-a$, a la sucesión a es:

$$(13) \quad -a(n) = -[a(n)].$$

DEMOSTRACIÓN.—De la definición resulta que la suma de dos sucesiones es otra sucesión.

Asociatividad.

$$\begin{aligned} [a + (b + c)](n) &= a(n) + [(b + c)(n)] = a(n) + [b(n) + c(n)] \\ &= [a(n) + b(n)] + c(n) = [(a + b)(n)] + c(n) = [(a + b) + c](n), \end{aligned}$$

de donde

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Conmutatividad. Es inmediata.

Elemento neutro.—Si a es una sucesión arbitraria y 0 es la sucesión (12), se verifica que

$$(a + 0)(n) = a(n) + 0(n) = a(n) + 0 = a(n),$$

de donde

$$a + 0 = a.$$

Elemento opuesto. Si $-a$ es la sucesión (13), se verifica que

$$[a + (-a)](n) = a(n) + (-a)(n) = a(n) + [-a(n)] = 0 = 0(n),$$

de donde

$$a + (-a) = 0.$$

A la suma de la sucesión a con la opuesta a la sucesión b se le llama *diferencia* entre a y b y se escribe:

$$a - b = a + (-b).$$

DEFINICIÓN 5.—Se llama *producto* de la sucesión a por la sucesión b , y se representa por $a b$, a la sucesión:

$$a b(n) = [a(n)] [b(n)].$$

EJERCICIOS:

660. Multiplicar las siguientes sucesiones del ejercicio 657: a) La sucesión a por la b .
b) La sucesión a por la e . c) La sucesión e por la g .

661. Escribir los términos generales del producto de las siguientes sucesiones del ejercicio 656: a) $a e$; b) $b e$; c) $c e$; d) $d f$; e) $c k$.

3. El conjunto $\mathcal{A}$ de todas las sucesiones de números racionales es, respecto de la adición y de la multiplicación, un anillo conmutativo y con elemento unidad.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de **2** queda por probar la asociatividad y conmutatividad de la multiplicación, que se demuestra de modo análogo al empleado en la adición. La existencia de la sucesión unidad: $1(n)$, definida del siguiente modo:

$$(14) \quad 1(n) = 1, \quad \forall n.$$

Vamos a probar que (14) es el elemento unidad de la multiplicación. Sea a una sucesión arbitraria. Será:

$$(a \cdot 1)(n) = [a(n)] [1(n)] = a(n) \cdot 1 = a(n),$$

de donde $a \cdot 1 = a$ y, por la conmutatividad, $1 a = a$.

Propiedad distributiva.—Sean a, b, c tres sucesiones arbitrarias, se verifica que

$$\begin{aligned} [a(b+c)](n) &= [a(n)][(b+c)(n)] = [a(n)][b(n)+c(n)] \\ &= [a(n)][b(n)] + [a(n)][c(n)] = ab(n) + ac(n) = (ab+ac)(n), \end{aligned}$$

de donde

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Para las sucesiones es costumbre emplear una notación especial. En lugar de la notación usual para todas las aplicaciones, en el caso de las sucesiones se escribe la variable independiente como subíndice, del siguiente modo:

$$(15) \quad a(n) = a_n.$$

DEFINICIÓN 6.—Una sucesión a_n se llama *convergente*, cuando para todo entorno $E_\varepsilon(0)$ del número cero existe un número natural n tal que, para todo par de números naturales n', n'' tales que $n' > n, n'' > n$, se verifique que $a_{n'} - a_{n''} \in E_\varepsilon(0)$.

Esta definición se puede escribir simbólicamente del siguiente modo:

$$(16) \quad a_n \text{ es convergente} \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(0) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall n' > n, n'' > n \Rightarrow a_{n'} - a_{n''} \in E_\varepsilon(0).$$

Teniendo en cuenta la definición de entorno, se puede enunciar la definición anterior del siguiente modo:

$$(17) \quad a_n \text{ es convergente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall n' > n, n'' > n \Rightarrow |a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon.$$

EJERCICIOS:

662. Demostrar que la sucesión $\frac{1}{n}$ es convergente.

663. Demostrar que $\frac{2n}{n+1}$ es convergente.

664. Demostrar que $\frac{1}{n^r}$ es convergente.

665. Demostrar que $\frac{1}{r^n}$ es convergente, si $r > 1$.

4. Toda sucesión convergente está acotada.

DEMOSTRACIÓN.—Sea a_n una sucesión convergente y ε un número positivo arbitrario. Existe un número n tal que $\forall n' > n$ se verifica que

$$|a_{n+1} - a_{n'}| < \varepsilon.$$

Sea $M = \max \{|a_1|, \dots, |a_n|, |a_{n+1} + \varepsilon|, |a_{n+1} - \varepsilon|\}$. Se verifica que $-M \leq a_n \leq M, \forall n$.

5. El conjunto **A** de todas las sucesiones convergentes de números racionales es un subanillo del anillo $\mathcal{A}$ de todas las sucesiones de números racionales, con el mismo elemento unidad.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de (Cap. I, § 4, 1, 1) hay que probar que:

a) Si a_n y b_n son dos sucesiones convergentes, $a_n - b_n$ es también convergente.

b) Si a_n y b_n son convergentes es $a_n b_n$ convergente.

c) La sucesión unidad 1_n es convergente.

Demostración de a). Sea $\varepsilon > 0$ un número positivo arbitrario. Por ser a_n y b_n convergentes, dado el número $\frac{\varepsilon}{2}$, existen los números n_1 y n_2 tales que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_1$ y $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_2$. Sea $n' = \max \{n_1, n_2\}$. Se verificará, $\forall n > n'$:

$$|a_n - b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon.$$

Demostración de b). En virtud de 4 se verifica que $|a_n| < M_1, |b_n| < M_2, \forall n$. Sea ε un número positivo arbitrario. Por ser a_n y b_n convergentes, existen los números n_1 y n_2 tales que $\forall n', n'' > n_1$, se verifica que $|a_{n'} - a_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2M_2}$ y $\forall n', n'' > n_2$ es $|b_{n'} - b_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$. Por consiguiente:

$$\forall n', n'' > n = \max \{n_1, n_2\} \Rightarrow |a_{n'} b_{n'} - a_{n''} b_{n''}| = |a_{n'} b_{n'} - a_{n'} b_{n''} + a_{n'} b_{n''} - a_{n''} b_{n''}|$$

$$= |a_{n'}| |b_{n'} - b_{n''}| + |b_{n''}| |a_{n'} - a_{n''}| < |a_{n'}| \frac{\varepsilon}{2M_1} + |b_{n''}| \frac{\varepsilon}{2M_2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demostración de c). De $1_{n'} - 1_{n''} = 1 - 1 = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, se deduce que 1_n es convergente.

DEFINICIÓN 7.—Se dice que el número racional u es el límite de la sucesión u_n de números racionales, y se escribe:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

cuando, para todo entorno $E_\varepsilon(u)$, del número u , existe un número natural, $n(\varepsilon)$, tal que, para todo $n' > n(\varepsilon)$ se verifique que $u_{n'} \in E_\varepsilon(u)$.

Esta definición se puede expresar simbólicamente del siguiente modo:

$$(18) \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(u) \Rightarrow \exists n(\varepsilon) \mid \forall n' > n(\varepsilon) \Rightarrow u_{n'} \in E_\varepsilon(u).$$

En virtud de la definición de entorno, la definición anterior se puede enunciar del siguiente modo:

Se dice que u es el límite de la sucesión u_n cuando, para todo ε positivo, existe un número natural, $n(\varepsilon)$, tal que, para todo $n' > n(\varepsilon)$ se verifique que $|u - u_{n'}| < \varepsilon$.

Esta definición se puede escribir simbólicamente así:

$$(19) \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n(\varepsilon) \mid \forall n' > n(\varepsilon) \Rightarrow |u - u_{n'}| < \varepsilon.$$

EJERCICIOS:

666. Demostrar:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0. & \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 0. & \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} &= 0. \\ \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} &= 0, \quad r > 1. & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{(n+1)(n+2)} &= 2. \end{aligned}$$

667. Probar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0}, \quad b_0 \neq 0.$$

6. Si $u_n = u$, para todo n , se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

7. Si una sucesión posee límite es convergente.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Sea ε un número positivo arbitrario.

De $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ se deduce que existe un $n(\varepsilon)$ tal que, para todo n' y $n'' > n(\varepsilon)$ se verifica que

$$|u - u_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |u - u_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

luego, para todo n' y $n'' > n(\varepsilon)$ será

$$|u_{n'} - u_{n''}| = |u_{n'} - u + u - u_{n''}| \leq |u_{n'} - u| + |u - u_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 8.—Se llama *sucesión nula* toda sucesión cuyo límite es cero.

EJERCICIO:

668. Demostrar que las siguientes sucesiones son nulas:

- a) $0_n = 0$. b) $1, 2, \dots, 1.000.000, 0 \dots 0, \dots$ c) $\frac{1}{n}$. d) $\frac{1}{n^r}$.
 e) $\frac{1}{r^n}, r > 1$. f) $\frac{1}{n!}$.

8. LEMA.— u_n es una sucesión convergente y no nula $\implies$ Existen un número positivo ε y un número natural n , tales que, para todo $n' > n$ se verifica que $|u_{n'}| > \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN.—Demostración por reducción al absurdo. (Recuérdense las relaciones I y II de la pág. 48.)

Hipótesis: $H \iff u_n$ es una sucesión convergente y no nula.

Tesis: $T \iff \exists \varepsilon > 0, \exists n$ tales que $\forall n' > n$ se verifica que $|u_{n'}| > \varepsilon$.

Negación de la tesis: $\neg T \iff \forall \varepsilon > 0, \forall n$, se verifica que $\exists n' > n$ tal que $|u_{n'}| < \varepsilon$.

Vamos a probar que $H \wedge \neg T = \text{absurdo}$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. $H \implies \exists n$ tal que $\forall n' n'' > n$ es $|u_{n'} - u_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\neg T \implies \exists n' > n$ tal que $|u_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por consiguiente, $\forall n'' > n$ se verifica:

$$|u_{n''}| = |u_{n''} - u_{n'} + u_{n'}| \leq |u_{n''} - u_{n'}| + |u_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

luego la sucesión u_n es nula. Contradicción con H.

9. TEOREMA.—El conjunto p_0 de todas las sucesiones nulas del anillo $\mathbf{A}$ de todas las sucesiones convergentes es un ideal primo de $\mathbf{A}$.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de (Def. 5, 2, § 4, Cap. I) hay que probar que
 a) u_n, v_n son sucesiones nulas $\implies u_n - v_n$ es sucesión nula. b) u_n es sucesión nula y v_n es sucesión convergente $\implies u_n v_n$ es sucesión nula.

a) Sea ε un número positivo arbitrario. Existen números n_1 y n_2 tales que $\forall n' > n_1, |u_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\forall n' > n_2$ es $|v_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2}$, luego $\forall n' > n = \max \{n_1, n_2\}$ es

$$|u_{n'} - v_{n'}| \leq |u_{n'}| + |v_{n'}| < \varepsilon.$$

b) v_n es convergente implica, en virtud de 4, que $|v_n| < M$, para todo n . Sea ϵ un número positivo arbitrario. u_n nula $\implies$ existe n tal que, para todo $n' > n$, es $|u_{n'}| < \frac{\epsilon}{M}$. Por tanto, $\forall n' > n$ es:

$$|u_{n'} v_{n'}| = |u_{n'}| |v_{n'}| < |u_{n'}| M < \epsilon.$$

Para probar que p_0 es primo hay que demostrar (1, 3, § 4. Cap. I): c) u_n y v_n son sucesiones convergentes, $u_n v_n$ es sucesión nula, v_n no es sucesión nula $\implies u_n$ es sucesión nula.

c) v_n es convergente y no nula implica, en virtud de 8, que $\exists m > 0$ y $\exists n_1$, tales que $\forall n' > n_1$ es $|v_{n'}| > m$. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Por ser $u_n v_n$ nula se verifica que existe un n_2 tal que $\forall n' > n_2$ se verifica que $|u_{n'} v_{n'}| < m \epsilon$. Sea $n = \max(n_1, n_2)$. Para todo $n' > n$ se verificará:

$$|u_{n'}| = \frac{|u_{n'} v_{n'}|}{|v_{n'}|} < \frac{m \epsilon}{m} = \epsilon.$$

En virtud de 4, 2, § 4, Cap. I, se verifica que:

10. El conjunto $\mathbf{A}/p_0$ es un anillo.

EJERCICIOS:

669. Si una sucesión es convergente y posee infinitos ceros, es una sucesión nula.

670. Una sucesión convergente y no nula posee un número finito de términos nulos.

671. ¿Es convergente la sucesión:

$$\frac{2}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \dots?$$

672. Hallar un representante de la clase

$$\left(1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots, 99, 0, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots\right) + p_0$$

cuyos términos sean todos distintos de cero.

673. Si u_n es una sucesión nula, probar que

$$u_n + p_0 = \frac{1}{n} + p_0.$$

11. Si $u_n + p_0$ es una clase de $\mathbf{A}/p_0$ se puede elegir un representante de la clase que no tenga ningún término nulo.

En efecto, si u_n es una sucesión nula se puede tomar como representante la sucesión nula $\frac{1}{n}$. Si u_n no es nula, al ser convergente poseerá un número finito de términos nulos y la sucesión que se obtiene al prescindir de todos los términos que preceden al primer término no nulo que sigue a todos los términos nulos pertenece a la misma clase y se puede tomar como representante de ella.

12. La clase $u_n + p_0$, siendo u_n una sucesión nula, es igual a la clase p_0 .

2. El cuerpo de los números reales.

1. El anillo $\mathbf{A}/p_0$ es un cuerpo, llamado cuerpo de los números reales. A las clases de $\mathbf{A}/p_0$ se les llama números reales.

DEMOSTRACIÓN.—Recordando las definiciones de adición y de multiplicación de clases, será:

$$(1) \quad (u_n + p_0) + (v_n + p_0) = (u_n + v_n) + p_0$$

$$(2) \quad (u_n + p_0)(v_n + p_0) = u_n v_n + p_0$$

a) Uniformidad de la adición.

$$u_n + p_0 = u'_n + p_0, v_n + p_0 = v'_n + p_0 \Leftrightarrow u_n - u'_n \in p_0, v_n - v'_n \in p_0 \Rightarrow$$

$$u_n + v_n - (u'_n + v'_n) \in p_0 \Rightarrow u_n + v_n + p_0 = u'_n + v'_n + p_0.$$

b) Uniformidad de la multiplicación.

$$u_n + p_0 = u'_n + p_0, v_n + p_0 = v'_n + p_0 \Leftrightarrow u_n = u'_n + t_n, t_n \in p_0, v_n = v'_n + s_n, s_n \in p_0,$$

de donde

$$u_n v_n = u'_n v'_n + (u'_n s_n + t_n v'_n + t_n s_n)$$

y como la sucesión del paréntesis pertenece a p_0 , resulta que

$$u_n v_n + p_0 = u'_n v'_n + p_0.$$

c) Las propiedades asociativas y conmutativas de la adición y de la multiplicación son inmediatas.

d) El elemento neutro, llamado número real cero, es $p_0 = u_n + p_0$, siendo u_n una sucesión nula.

e) El elemento opuesto del elemento $a_n + p_0$, que se representa por $-(a_n + p_0)$, es $-a_n + p_0$, esto es:

$$-(a_n + p_0) = -a_n + p_0.$$

f) El elemento neutro de la multiplicación, llamado número real uno, es $1_n + p_0$, siendo $1_n = 1$ para todo n .

g) La propiedad distributiva es inmediata.

h) Dada la clase $u_n + p_0 \neq p_0$, existe otra clase, representada por $\frac{1}{u_n + p_0}$ o por $(u_n + p_0)^{-1}$, llamada inversa de la anterior, tal que:

$$(u_n + p_0) \frac{1}{u_n + p_0} = 1_n + p_0.$$

En efecto, en virtud de 11, 1, se puede suponer que el representante u_n no posee ningún término nulo. Por tanto, $\frac{1}{u_n}$ es una sucesión de números racionales. La sucesión $\frac{1}{u_n}$ es convergente. En efecto, por ser $u_n + p_0 \neq p_0$, la sucesión u_n no es sucesión nula, luego existen (6) los números n_1 y m tales que $\forall n' > n_1$ se verifique que $|u_{n'}| > m$. Por ser u_n convergente, existe un número n_2 tal que $\forall n', n'' > n_2$ se verifique que $|u_{n''} - u_{n'}| < \varepsilon m^2$. Sea $n = \max(n_1, n_2)$. Para todo $n', n'' > n$, será:

$$\left| \frac{1}{u_{n'}} - \frac{1}{u_{n''}} \right| = \frac{|u_{n''} - u_{n'}|}{|u_{n'}| |u_{n''}|} < \frac{\varepsilon m^2}{m^2} = \varepsilon.$$

Por ser $\frac{1}{u_n}$ una sucesión convergente, $\frac{1}{u_n} + p_0$ es un número real y se verifica que

$$(u_n + p_0) \left(\frac{1}{u_n} + p_0 \right) = 1_n + p_0,$$

luego

$$(3) \quad \frac{1}{u_n + p_0} = \frac{1}{u_n} + p_0.$$

EJERCICIOS:

674. Probar que

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + p_0$$

es un número real.

675. Probar que el número real del ejercicio anterior es igual al número real

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + p_0.$$

Al número real definido en estos dos ejercicios se le llama número e .

676. Probar que toda sucesión de la forma:

$$a_n = b, b_1 b_2 \dots b_n,$$

en donde b es un número entero y $b_1, \dots, b_n$ son n cifras decimales arbitrarias, define el número real

$$a_n + p_0.$$

677. Demostrar que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + p_0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} + p_0.$$

678. Probar que

$$\frac{1}{e} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + p_0.$$

679. Si a es un número entero positivo, calcular e^a .

2. Las sucesiones $\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ y $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ son convergentes y se verifica que

$$(4) \quad \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + p_0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + p_0 = e.$$

Al mismo número real definido por (4) se le llama número e .

3. Sea

$$(5) \quad a_n = b, b_1 \dots b_n$$

un número decimal con la parte entera b y las cifras decimales $b_1, \dots, b_n$. Cualquiera que sean estas cifras se verifica que

$$a_n + p_0 = b, b_1, \dots, b_n + p_0$$

es un número real.

DEMOSTRACIÓN.—Basta probar que la sucesión a_n es convergente. Sea ϵ un número positivo arbitrario y sea $n < n' < n''$. Se verifica:

$$a_{n''} - a_{n'} = 0, 0 \dots 0 \overset{(n')}{b_{n'+1}} \dots b_{n''} = 10^{-n'} \times 0, b_{n'+1} \dots b_{n''} < 10^{-n'} \\ < \epsilon \Rightarrow n(\epsilon) = [-\mathbb{L}(\epsilon)] + 1.$$

DEFINICIÓN 1.—Una expresión decimal con infinitas cifras decimales tal como la siguiente:

$$(6) \quad a, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

es una notación para representar la sucesión cuyo término general es

$$(7) \quad a, a_1 \dots a_n.$$

La expresión (6) se llama *expresión decimal del número real*:

$$(8) \quad a, a_1 \dots a_n + p_0.$$

EJERCICIOS:

680. Probar que

$$0, 9 \dots 9 + p_0 = 1, 0 \dots 0 1 + p_0.$$

681. Probar que todo número entero positivo posee raíz cuadrada exacta en el cuerpo de los números reales.

NOTACIÓN.—Al cuerpo de los números reales lo representaremos por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{A}/p_0.$$

4. Existe un homomorfismo inyectivo del cuerpo de los números racionales en el cuerpo de los números reales.

DEMOSTRACIÓN.—Definiremos:

$$(9) \quad \mathbb{Q} \xrightarrow{j} \mathbb{R}: \quad j(r) = r_n + p_0; \quad r_n = r, \forall n.$$

La sucesión $r_n = r$ es una sucesión convergente, luego $r_n + p_0$ es, efectivamente, un número real único. Sean r y s dos números racionales, $s \neq 0$.

$$a) \quad j(r - s) = (r - s)_n + p_0 = r_n - s_n + p_0 = (r_n + p_0) - (s_n + p_0) = j(r) - j(s).$$

$$b) \quad j(r \cdot s^{-1}) = (r s^{-1})_n + p_0 = r_n \cdot s_n^{-1} + p_0 = (r_n + p_0) (s_n^{-1} + p_0) = (r_n + p_0) (s_n + p_0)^{-1} = j(r) [j(s)]^{-1}.$$

$$c) \quad j \text{ es inyectivo. Sea } j(r) = j(s). \text{ Se verifica que } r_n + p_0 = s_n + p_0 \\ \iff r_n - s_n \in p_0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists n \text{ tal que}$$

$$\forall n' > n, |r_{n'} - s_{n'}| = |r - s| < \epsilon \Rightarrow r = s.$$

En virtud del teorema anterior, se pueden identificar los números racionales con los números de un subcuerpo, $\mathbb{Q}'$, del cuerpo de los números reales. En lo que sigue se hará siempre esta identificación, que equivale a poner:

$$j(r) = r, \quad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Mediante esta identificación se puede decir que el cuerpo de los números racionales es un subcuerpo del cuerpo de los números reales.

3. Topología del cuerpo de los números reales.

ORDENACIÓN EN EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES.

DEFINICIÓN 1.—Un número real $u = u_n + p_0$ se llama *positivo* cuando existen un número racional positivo r y un número natural n tales que, para todo $n' > n$, se verifique que $u_{n'} > r$. Al número real p_0 se le llama número real *cero*, y lo representaremos por el mismo símbolo 0, que en el caso de los números racionales. Un número real se llama *negativo* cuando su opuesto es positivo.

La definición anterior de número real positivo se puede expresar simbólicamente del siguiente modo:

$$(1) \quad u_n + p_0 \text{ es positivo} \iff \exists r, n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, n \in \mathbb{N} \mid \forall n' > n \Rightarrow u_{n'} > r.$$

1. Si R^+ es el conjunto de los números reales positivos, R^- el conjunto de los números reales negativos y $\{0\}$ el conjunto formado por el número real cero, se verifica que

$$(2) \quad R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$$

es una clasificación del conjunto R de los números reales.

DEMOSTRACIÓN.—a) Se verifica la relación (2). Sea $a_n + p_0$ un número real arbitrario. Si $a_n + p_0$ no es ni positivo ni cero, la sucesión a_n será convergente, pero no nula; luego por 1, 6 se verifica que existen un número racional positivo ϵ y un número natural n_1 tales que $\forall n' > n_1$ es $|u_{n'}| > \epsilon$. Como u_n es convergente, existe un número natural n_2 tal que $\forall n', n'' > n_2 \implies |u_{n'} - u_{n''}| < \frac{\epsilon}{2}$, luego si $n = \max(n_1, n_2)$ se verifica que $|u_{n+1}| > \epsilon$ y $|u_{n'} - u_{n+1}| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n' > n$, esto es

$$u_{n+1} - \frac{\epsilon}{2} < u_{n'} < u_{n+1} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n' > n,$$

y en el intervalo $(u_{n+1} - \frac{\epsilon}{2}, u_{n+1} + \frac{\epsilon}{2})$ no está el cero por ser $|u_{n+1}| > \epsilon$, luego $\forall n' > n$ todos los términos $u_{n'}$ tienen el mismo signo, y como este signo no puede ser $+$ por no ser $u_n + p_0$ positivo, será $u_{n'} < 0$, $\forall n' > n$, luego $-u_{n'} > 0$, $\forall n' > 0$, luego

$$|u_{n'}| = -u_{n'} > \epsilon \quad \forall n' > n,$$

luego $-u_n + p_0$ es positivo, y, por tanto, $u_n + p_0$ es negativo.

b) De la definición de número positivo se deduce que ningún número positivo puede ser cero. Como el opuesto del cero es él mismo, tampoco ningún número negativo puede ser cero. Un número positivo no puede ser negativo, porque existiría un número racional positivo, r , tal que $r < u_n$, $r < -u_n$.

2. La suma de dos números reales positivos es otro número real positivo y el producto de dos números reales positivos es otro número real positivo.

DEMOSTRACIÓN.—Sean $a_n + p_0$ y $b_n + p_0$ dos números reales positivos; se verificará que existen r_1, n_1 y r_2, n_2 , $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, tales que $\forall n' > n_1$ es $a_{n'} > r_1$ y $\forall n' > n_2$ es $b_{n'} > r_2$. Si $n = \max(n_1, n_2)$ se verificará que $\forall n' > n$ es

$$a_{n'} + b_{n'} > r_1 + r_2 > 0, \quad \text{luego} \quad (a_n + p_0) + (b_n + p_0) \quad \text{es positivo.}$$

$$a_{n'} b_{n'} > r_1 r_2 > 0, \quad \text{luego} \quad (a_n + p_0)(b_n + p_0) \quad \text{es positivo.}$$

EJERCICIO:

682. Averiguar si son positivos, negativos o cero los siguientes números reales:

a) $-90 + \frac{100n - 1000}{n + 1} + p_0$.

b) $(-1)^n \frac{2n + 1}{n^2} + p_0$.

3. La proposición 2 se puede enunciar también del siguiente modo: La clasificación (2) es compatible con la estructura de cuerpo.

DEFINICIÓN 2.—En el cuerpo de los números reales se define una relación, $\leq$, del siguiente modo:

$$(3) \quad a \leq b \iff b - a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

4. La relación $\leq$ es una relación de orden total.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \iff x \leq x$.

b) $x \leq y, y \leq x \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, -(y - x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \implies y - x = -(y - x) = 0$.

c) $x \leq y, y \leq z \iff y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, z - y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \implies z - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \iff x \leq z$.

d) $x \not\leq y \implies y - x \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \iff y - x \in \mathbb{R}^- \iff x - y \in \mathbb{R}^+ \implies y \leq x$.

5. Si a, b, c, d son números reales cualesquiera, m y n números naturales cualesquiera, se verifica:

1. $a \geq b, c \geq d \implies a + c \geq b + d$.

2. $a \geq b, c > 0 \implies ac \geq bc$.

3. $a \geq b > 0, c \geq d > 0 \implies ac \geq bd$.

4. $a \geq 1, b \geq 1 \implies ab \geq 1$.

5. $a \geq 1 \implies a^n \geq 1$.

6. $1 \geq a > 0, 1 \geq b > 0 \implies 1 \geq ab > 0, a \geq ab > 0, b \geq ab > 0$.

7. $1 \geq a > 0 \implies 1 \geq a^n$ y $a^{n-1} \geq a^n$.

8. $1 < a, m < n \implies a^m < a^n$.

9. $a > b > 0 \implies a^n > b^n$.

10. $0 < a < 1, m < n \implies a^m > a^n$.

11. $a \geq b, c < 0 \implies bc \geq ac$.

12. Si ε es un número real positivo, existe un número racional, r , tal que $0 < r < \varepsilon$.

13. Si a y b son dos números reales distintos, existe entre ellos un número racional.

•DEMOSTRACIÓN.—1) $a - b \geq 0, c - d \geq 0 \implies a + c - (b + d) \geq 0$.
 2) $a - b \geq 0, c > 0 \implies (a - b)c \geq 0 \iff ac - bc \geq 0$. 3) En virtud de 2) es: $ac \geq bc$ y $bc \geq bd$. Los restantes casos 4 — 10 son consecuencia de 3). En cuanto a 11): $a - b \geq 0, c < 0 \implies a - b \geq 0, -c > 0 \implies (a - b)(-c) \geq 0 \iff -[(a - b)c] \geq 0 \iff bc - ac \geq 0$. 12) Sea $\varepsilon = e_n + p_0$, siendo e_n una sucesión convergente de números racionales. Por ser ε positivo, existe un número racional r tal que $0 < r < e_n, \forall n > n'$. Por consiguiente, el número real $\varepsilon - r = (e_n - r) + p_0$ es tal que $e_n - r > 0, \forall n > n'$. Si existe un número racional r' tal que $e_n - r > r' > 0, \forall n > n''$, serían $(e_n - r) + p_0 > 0$, y en caso contrario, sería $(e_n - r) + p_0 = 0$, luego $\varepsilon - r \geq 0$. En el primer caso sería $\varepsilon > r$ y si $\varepsilon - r = 0$, tomando $r > r_1 > 0$, sería $\varepsilon > r_1 > 0$.

13. En virtud de 12 existe un número racional r tal que $0 < r < b - a$, siendo $b > a$. De donde $a < a + r < b$. Ahora bien, existe un n' tal que, $\forall n > n'$, es $a - a_n < r$, de donde $a < a_n + r < a + r < b$ y $a_n + r$ es racional.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *valor absoluto* a una aplicación del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales en sí mismo:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que, a cada número real, x , le corresponde el número real $|x|$, definido del siguiente modo:

$$(4) \quad |x| = \text{máx. } \{x, -x\}.$$

Como en 1, 1 se prueba el siguiente teorema:

5. a) $|x|$ es un número real no negativo.
 b) $\text{im}(|\cdot|) = \mathbb{R}^+ + \{0\}$.
 c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
 d) $|xy| = |x| |y|$.

DEFINICIÓN 4.—Se llama *entorno simétrico*, o simplemente *entorno de radio ϵ* , de un número real a , y lo representaremos por $E_\epsilon(a)$, al conjunto de todos los números reales x , tales que $|a - x| < \epsilon$, $\epsilon > 0$. $\mathbb{R}$ es también entorno de cualquiera de sus números.

6. La unión de cualquier número de entornos de un número real a es un entorno de a . La intersección de un número finito de entornos de a es un entorno de a .

DEMOSTRACIÓN.—El conjunto de todos los radios de los entornos considerados de a puede estar acotado o no. En el primer caso, siendo la ordenación total, posee un extremo superior, ϵ . El entorno de radio ϵ es la unión de todos los entornos dados. En el segundo caso, la unión de todos los entornos es $\mathbb{R}$. Si ϵ es el menor de los radios de todos los entornos, el entorno de radio ϵ es la intersección de todos los entornos considerados de a .

DEFINICIÓN 5.—Se llama *conjunto abierto*, A , o simplemente *abierto*, de $\mathbb{R}$, a la unión de cualquier número, finito o infinito de entornos y al conjunto vacío.

7. El conjunto $\mathfrak{A}$ formado por todos los abiertos de $\mathbb{R}$ posee las siguientes propiedades:

1. La unión de cualquier número de abiertos es un abierto.
2. La intersección de un número finito de abiertos es un abierto.
3. El conjunto vacío y $\mathbb{R}$ son abiertos.

DEMOSTRACIÓN.

$$1. \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j_i \in J_i} E_{\epsilon_{ij_i}} \right) = \bigcup_{i \in I, j_i \in J_i} E_{\epsilon_{ij_i}}.$$

$$2. \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcup_{j_i \in J_i} E_{\epsilon_{ij_i}} \right) = \bigcup (E_{\epsilon_{1j_1}} \cap \dots \cap E_{\epsilon_{nj_n}}).$$

y basta observar que la intersección de dos entornos es el conjunto vacío, o bien otro entorno, luego por inducción resulta que la intersección de un número finito de entornos es un entorno o el conjunto vacío.

3. Es trivial.

EJERCICIOS:

683. a) Calcular el radio del entorno $\bigcap_{n=1}^{100} E_{\frac{1}{n}}(a)$. ¿Es $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}(a)$ un entorno de a ?

684. Demostrar que $E_{\varepsilon}(a) \cap E_{\delta}(b)$ es un abierto.

685. a) ¿Es el conjunto de todos los números reales, excluidos los números enteros, un abierto? b) ¿Es el conjunto de todos los números reales y positivos un abierto? c) ¿Es un abierto el conjunto de todos los números reales no negativos? d) ¿Es el conjunto de todos los números reales del intervalo $(0, 1)$, excluidos los términos de la sucesión $\frac{1}{n^2}$, un conjunto abierto? e) ¿Es el conjunto formado por un número finito de números reales un conjunto abierto? f) ¿Es el conjunto de todos los números irracionales (e. e. reales y no racionales) del segmento $[0, 1]$ un abierto? g) ¿Es el conjunto de todos los números racionales del intervalo $(0, 1)$ un abierto?

686. a) ¿Es el conjunto de todos los números reales, excluido un segmento, un abierto? b) ¿Es el conjunto de todos los números reales, excluido un punto, un abierto? c) ¿Es un intervalo menos un punto un abierto?

DEFINICIÓN 6.—Un número real a se llama *número adherente* al conjunto C de números reales cuando en todo entorno, $E_{\varepsilon}(a)$, de a existe un número de C .

Simbólicamente puede expresarse esta definición del siguiente modo:

$$(5) \quad a \text{ adherente a } C \Leftrightarrow \forall E_{\varepsilon}(a) \Rightarrow \exists x \in C, x \in E_{\varepsilon}(a).$$

También se puede definir el número adherente del siguiente modo:

$$(6) \quad a \text{ adherente a } C \Leftrightarrow E_{\varepsilon}(a) \cap C \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0.$$

EJERCICIO:

687. a) ¿Es 5 adherente al intervalo $(1, 6)$? b) ¿Es 3 adherente al conjunto $C = \{1, 2, 3, 4\}$? c) ¿Es 3 adherente al intervalo $(1, 3)$? d) ¿Es 0 adherente al conjunto

$$C = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

8. Todo elemento de un conjunto es elemento adherente al conjunto.

DEFINICIÓN 7.—Se llama *conjunto adherente*, *adherencia*, o *cierre* del conjunto C , y se representa por $\bar{C}$, al conjunto formado por todos los puntos adherentes a C . Un conjunto se llama *cerrado* cuando es igual a su adherencia. Esto es,

$$(7) \quad C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \bar{C} = C$$

EJERCICIOS:

688. Hallar los conjuntos adherentes a los siguientes conjuntos: a) $A = (m, n)$, intervalo de extremos m y n . b) $B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$. c) $C =$ conjunto de todos los números racionales del segmento $[0, 1]$. d) $D =$ conjunto de todos los números irracionales del segmento $[0, 1]$. e) $E = \{ 0, 11; 0, 101, \dots; 0, 10 \dots 01; \dots; 9, 011; 0, 0101; \dots; 0, 010 \dots 01; \dots; 0, 0 \dots 011; 0, 0 \dots 0101; \dots; 0, 0 \dots 010 \dots 01; \dots; \dots \}$. f) $F = \{ 0, 3; -0, 3; 0, 33; -0, 33; \dots \}$.

689. ¿Qué conjuntos son cerrados de los siguientes conjuntos?: a) $A = \{ 1, 5, e \}$. b) $B = \{ 0, 9; -0, 99; 0, 999; -0, 9999; \dots \}$. c) $C = [0, 1]$. d) $[0, 1)$. e) $\mathbb{R} - (0, 1)$. f) $\mathbb{R} - [0, 1]$. g) $G = [0; 0, 1] \cup [0, 11; 0, 111] \cup \dots \cup [0, 1 \dots 1; 0, 1 \dots 1] \cup \dots$ h) $H = [0, 2] \cap [1, 3]$.

9. PROPIEDADES DE LA OPERACIÓN ADHERENCIA: $C \rightarrow \bar{C}$.

$$1. \quad A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}.$$

$$2. \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$3. \quad \overline{\bigcap_{i \in I} C_i} \subset \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i.$$

4. Si C es una parte arbitraria de $\mathbb{R}$, se verifica que $C \subset \bar{C}$ y $\bar{\bar{C}} = \bar{C}$.

DEMOSTRACIÓN.—1. $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ se verifica que $E_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \implies E_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{B}$.

2. $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ se verifica que $E_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Leftrightarrow (E_\varepsilon(x) \cap A) \cup (E_\varepsilon(x) \cap B) \neq \emptyset \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon \text{ se verifica que } E_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{A}. \\ \exists \varepsilon_1 \text{ tal que } E_{\varepsilon_1}(x) \cap A = \emptyset \implies \forall \varepsilon \text{ se verifica que } (E_\varepsilon(x) \cap E_{\varepsilon_1}(x)) \cap A = \emptyset \implies \forall \varepsilon \text{ se verifica que } (E_\varepsilon(x) \cap E_{\varepsilon_1}(x)) \cap B \neq \emptyset \\ \implies \forall \varepsilon \text{ se verifica que } E_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \bar{B} \\ \implies A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}. \end{array} \right.$$

$$\text{Si } x \in \bar{A} \cup \bar{B} \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in \bar{A} \implies x \in \overline{A \cup B} \\ 0 \\ x \in \bar{B} \implies x \in \overline{A \cup B} \end{array} \right\} \implies x \in \overline{A \cup B} \iff \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x \in \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i &\iff \forall \varepsilon \text{ se verifica que } E_\varepsilon(x) \cap \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset \iff \\ &\bigcap_{i \in I} (E_\varepsilon(x) \cap C_i) \neq \emptyset \implies E_\varepsilon(x) \cap C_i \neq \emptyset, \forall i \iff x \in \bar{C}_i, \forall i \implies x \\ &\in \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i. \end{aligned}$$

4. La primera relación es consecuencia de ser todo punto de un conjunto punto adherente al conjunto. Por consiguiente, $\bar{C} \subset \bar{\bar{C}}$. Sea $x \in \bar{C} \implies \forall \varepsilon$ se verifica que $E_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$. Sea $y \in \bar{C}$ e $y \in E_\varepsilon(x)$. Sea $E_\delta(y) \subset E_\varepsilon(x)$. De $y \in \bar{C}$ se deduce que $E_\delta(y) \cap C \neq \emptyset$, luego $E_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$, luego $x \in \bar{C}$.

EJERCICIOS:

690. Sea $A = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots \right\}$. $B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots \right\}$. Comprobar que $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.

691. Sea $A_1 = \{0, 1; 0, 11; 0, 111; \dots\}$, ..., $A_n = \{0, \overbrace{00 \dots 01}^n; 0, \overbrace{00 \dots 011}^{n+1}; \dots\}$... Comprobar que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \neq \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$.

10. El conjunto $\mathcal{C}$ de todos los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ posee las siguientes propiedades:

1. La intersección de cualquier número de cerrados es un cerrado.
2. La unión de un número finito de cerrados es un cerrado.
3. El conjunto vacío y todo el conjunto $\mathbb{R}$ son cerrados.

DEMOSTRACIÓN.—1. Teniendo en cuenta 9, resulta:

$$\bigcap_{i \in I} C_i \subset \overline{\bigcap_{i \in I} C_i} \subset \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

$$2. \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n C_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{C}_i = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

$$3. \quad \bar{\emptyset} = \emptyset, \quad \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

11. *El conjunto complementario de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y el complementario de un conjunto cerrado es un abierto.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea C un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Sea $x \in \complement C$ y sea I el máximo intervalo que contiene a x y cuya intersección con C es el conjunto vacío (se admite que pueda ser $I = x$). Si a y b son los extremos de I (que en principio pueden coincidir ambos con x), se verifica que a y $b \in C$, ya que en cualquier entorno de a existen puntos de C , por ser I el mayor intervalo que contiene a x y no contiene puntos de C , luego a es punto adherente a C y, por ser C cerrado, pertenece a C , luego $a \neq x$. Análogamente, $b \neq x$. Si $\complement C = I$ el teorema está demostrado, en caso contrario se repite el razonamiento y se obtiene que $\complement C$ está formado por la unión de un número finito o infinito de intervalos.

Sea C un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Será $C = \bigcup_{j \in J} I_j$, siendo I_j intervalos. Si x es un punto adherente a $\complement C$ y $x \in I_k$, tomando un entorno $E_\varepsilon(x)$ contenido en I_k , en dicho entorno no existiría ningún punto de $\complement C$, en contradicción con la hipótesis, luego si $x \in \overline{\complement C}$ se verifica que $x \notin C$, luego $x \in \complement C$ y $\complement C$ es cerrado.

DEFINICIÓN 8.—Un sistema $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de $\mathbb{R}$ se llama un *recubrimiento* del conjunto $C \subset \mathbb{R}$, cuando se verifica que para todo número $x \in C$ existe un conjunto A_j del sistema tal que $x \in A_j$. Si todos los conjuntos A_i son abiertos el recubrimiento se llama *de abiertos*. Si el número de elementos de I es finito el recubrimiento se llama *finito*. El recubrimiento $\{B_j\}_{j \in J}$ de C se llama *subrecubrimiento* del recubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$ cuando todos los conjuntos B_j son conjuntos A_i . Un conjunto C de $\mathbb{R}$ se llama *compacto* cuando de todo recubrimiento de abiertos de C se puede extraer un subrecubrimiento finito.

12. TEOREMA DE BOREL-LEBESGUE. *Todo segmento de $\mathbb{R}$ es un conjunto compacto.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea el segmento $[a, b]$ y sea $\mathbf{R} = \{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de abiertos de $[a, b]$. No es restricción suponer que todos los abiertos A_i son intervalos, por lo que admitiremos que así sucede. Si existe un subrecubrimiento finito de $\mathbf{R}$ que sea recubrimiento de $[a, b]$ el teorema está demostrado. En caso contrario, sea A_1 un intervalo de $\mathbf{R}$ que contiene a a y A_2 un intervalo de $\mathbf{R}$ que contiene a b . Sean x_1 e y_1 números racionales tales que $a < x_1$, $b < y_1$, $x_1 \in A_1$, $y_1 \in A_2$. Si el número racional $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$

es tal que el segmento $[a, \frac{1}{2}(x_1 + y_1)]$ se puede recubrir con un número finito de abiertos de $\mathbf{R}$ pondremos $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$, $y_2 = y_1$; en caso contrario pondremos $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$. Análogamente se procede con $\frac{1}{2}(x_2 + y_2)$ y así sucesivamente. Se obtienen de este modo dos sucesiones de números racionales:

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots, \\ y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq \dots, \end{cases}$$

tales que: a) Todos los segmentos $[a, x_n]$ se pueden recubrir con un número finito de abiertos de $\mathbf{R}$. b) Ningún segmento $[a, y_n]$ se puede recubrir con un número finito de abiertos de $\mathbf{R}$. c) $y_n - x_n = \frac{1}{2^{n-1}}(y_1 - x_1)$ es una sucesión nula. d) Si $n < n'$ se verifica que $x_n \leq x_{n'} < y_n$, de donde $x_{n'} - x_n < y_n - x_n$, lo que prueba que la sucesión x_n es convergente. e) Como consecuencia la sucesión y_n también es convergente y los números reales $x_n + p_0$ e $y_n + p_0$ son iguales. Sea $z = x_n + p_0 = y_n + p_0$. Sea A_m un intervalo de $\mathbf{R}$ que contenga a z . Si a_m es el extremo inferior del intervalo A_m y r un número racional menor que $z - a_m$, existe un n tal que $(x_n + p_0) - x_n < r$, luego $x_n \in A_m$. Por la construcción de las x_i , existe un recubrimiento finito: $\{A_1, \dots, A_r\}$ de $[a, x_n]$, luego $\{A_1, \dots, A_r, A_m\}$ es un recubrimiento finito de $[a, y_r]$, siendo y_r un término de la sucesión y_n contenido en A_m . Contradicción.

13. *Todo subconjunto de un conjunto compacto o acotado de $\mathbf{R}$ posee extremo superior y extremo inferior.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea C un conjunto compacto y A un subconjunto de C . Por ser C compacto admite un recubrimiento finito $\mathcal{R} = \{A_1, \dots, A_n\}$ de intervalos. Si

$$A_i = (a_i, b_i) \quad i = 1, \dots, n,$$

$$a = \min. \{a_i, b_i\} \quad \text{y} \quad b = \max. \{a_i, b_i\}$$

se verifica que $A \subset [a, b]$. Por consiguiente, A es acotado, esto es:

Todo conjunto compacto de $\mathbf{R}$ está acotado.

Al punto $\frac{1}{2}(a + b)$ se le llama x_1 cuando en el segmento $[\frac{1}{2}(a + b), b]$ existe algún número de A e y_1 en caso contrario. En aquel caso al punto b

se le denomina y_1 y en éste al punto a se le designa por x_1 . Por consiguiente, en el segmento $[x_1, y_1]$ existe siempre un punto de A . Análogamente, al punto $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ se le designa por x_2 o por y_2 , según que en el segmento $[\frac{1}{2}(x_1 + y_1), y_1]$ exista algún punto de A o no exista ninguno. De este modo se obtienen las sucesiones (8), que, como allí, se puede suponer que son de números racionales, sin más que tomar los números a y b racionales. Del mismo modo que se ha visto en el teorema de Borel-Lebesgue, se verifica que $z = x_n + p_0 = y_n + p_0$ es un número real. Si ε es un número positivo arbitrario, se verifica que no existe ningún número de A mayor que $z + \varepsilon$ y existe un número de A mayor que $z - \varepsilon$. Por consiguiente, z es el extremo superior de A , ya que $\forall x \in A$ es $x \leq z$, y no existe ninguna cota superior inferior a z . Análogamente se prueba la existencia del extremo inferior.

COROLARIO.—*Todo conjunto acotado de números reales posee un extremo superior y un extremo inferior.*

DEFINICIÓN 9.—Si C es un conjunto de números reales, se dice que x es un *número de acumulación* de C cuando en todo entorno de x existe un punto de C distinto de x .

Simbólicamente esta definición se puede escribir del siguiente modo:

$$(9) \quad x \text{ número de acumulación de } C \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ se verifica que } (E_\varepsilon(x) \cap C) - \{x\} \neq \emptyset.$$

EJERCICIOS:

692. Demostrar que todo punto de acumulación es punto adherente.

693. a) ¿Es 5 punto de acumulación del intervalo $(1, 6)$? b) ¿Es 6 punto de acumulación del intervalo $(1, 6)$? c) ¿Es 4 número de acumulación del conjunto de los números naturales? d) ¿Es 4 número de acumulación del conjunto de los números racionales? e) ¿Cuál es el extremo superior del conjunto $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$. f) ¿Qué número es el extremo superior del conjunto $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots; 1,1\}$?

14. a) El extremo $\begin{cases} \text{superior} \\ \text{inferior} \end{cases}$ de un conjunto C de números reales es el $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$ de sus puntos adherentes. b) Todo conjunto cerrado y acotado posee máximo y mínimo. c) $\text{ext. sup. } (C) = \text{máx. } (\bar{C})$, $\text{ext. inf. } (C) = \text{mín. } (C)$.

DEMOSTRACIÓN.—a) Si $m = \text{ext. sup. } C$ se verifica que en todo entorno de m existe un número de C , pues en otro caso existiría una cota superior de C menor que m . Por consiguiente, m es punto adherente de C . Si $m' > m$

fuese otro punto adherente de C , considerando un entorno $E_\epsilon(m')$ tal que $m \notin E_\epsilon(m')$, se verificaría que existiría un número x de C perteneciente a $E_\epsilon(m')$ y, por tanto, mayor que m , luego m no sería cota superior. Análogamente se razona para el mínimo.

b) En virtud de **13** se verifica que todo conjunto acotado posee extremo superior y extremo inferior. En virtud de a) el extremo superior de C es el máximo de sus puntos adherentes, luego es el máximo de $\bar{C} = C$; análogamente para el extremo inferior.

c) Es consecuencia de a) y b).

15. Sea $a(C)$ el conjunto formado por todos los puntos de acumulación del conjunto de números reales C . Si $a(C)$ es acotado se verifica que

$$(10) \quad \text{ext. sup. } a(C) = \text{máx. } a(C), \quad \text{ext. inf. } a(C) = \text{mín. } a(C).$$

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de **13** existen el ext. sup. $= m$ y el ext. inferior $= m'$. En virtud de **14** a) se verifica que m y m' son puntos adherentes de $a(C)$, luego m y m' pertenece a $\overline{a(C)}$, y como $a(C) \subset \bar{C}$, resulta que m y m' pertenecen a $\bar{C} = C$, luego m y m' son puntos adherentes de C . Si no fuesen puntos de acumulación de C en un entorno de ellos no existiría más punto de C que m o m' , respectivamente, pero como en todo entorno de m (de m') existe un punto de acumulación de C , existiría algún punto de C distinto de m o m' , contradicción.

DEFINICIÓN 10.—Se llama *límite superior* de un conjunto de números reales al máximo de sus puntos de acumulación. Se llama *límite inferior* de un conjunto de números reales al mínimo de sus puntos de acumulación. Al límite superior del conjunto C lo representaremos por $\lim. \text{ sup. } (C)$ y al límite inferior por $\lim. \text{ inf. } (C)$.

16. TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS.—*Todo conjunto acotado de infinitos números reales posee un punto de acumulación.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea el conjunto C de infinitos números reales. Sean a y b un cota inferior y una cota superior, respectivamente, que supondremos son racionales. En el segmento $[a, b]$ hay infinitos números de C (todos). Si en el segmento $\left[a, \frac{1}{2}(a+b) \right]$ existen infinitos números de C , pondremos $a = a_1$, $\frac{1}{2}(a+b) = b_1$; en caso contrario pondremos $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$,

$b_1 = b$. Si en $\left[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)\right]$ existen infinitos números de C pondremos $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$; en caso contrario pondremos $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ y $b_2 = b_1$. Así siguiendo, se obtienen las sucesiones de números racionales:

$$(11) \quad \begin{cases} a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \\ b, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, \end{cases}$$

que son convergentes y definen el mismo número real $\alpha = a_n + p_0 = b_n + p_0$. En todo entorno $E_\epsilon(\alpha)$ existe un a_n y un b_n , luego $[a_n, b_n] \subset E_\epsilon(\alpha)$ y como en $[a_n, b_n]$ existen infinitos números de C , existe uno distinto de α , luego α es punto de acumulación de C .

17. *Todo conjunto acotado de infinitos números reales posee límite superior y límite inferior.*

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, el conjunto $\mathbf{a}(C)$ de todos los puntos de acumulación de C no es vacío y en virtud de **15** existe máx. $\mathbf{a}(C)$ y mín. $\mathbf{a}(C)$, que son los límites superior e inferior de C .

18. *Todo conjunto compacto, C , de números reales es cerrado en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del teorema **11**, bastará probar que el complementario de C , $\mathbf{c}(C)$, es abierto y para probar esto basta ver que $\mathbf{c}(C)$ es unión del conjunto formado por un entorno de cada uno de sus puntos. Sea p un punto arbitrario de $\mathbf{c}(C)$. Para todo $x \in C$, se verifica que $p \neq x$, luego existe un entorno $E_i(p)$ y un entorno $E_i(x)$, tales que $E_i(p) \cap E_i(x) = \emptyset$. Al recorrer x todos los puntos de C , i recorre un conjunto de índices I . $\{E_i(x)\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de C y, por ser C compacto, se puede extraer de él un subrecubrimiento finito $\{E_i(x)\}_{i \in J}$ en donde J es un subconjunto finito de I . $\bigcap_{i \in J} E_i(p)$ es un entorno de p y $\bigcap_{i \in J} E_i(p) \cap \left(\bigcap_{i \in J} E_i(x)\right) = \emptyset$, luego $\bigcap_{i \in J} E_i(p) \cap C = \emptyset$, y $\bigcap_{i \in J} E_i(p) \subset \mathbf{c}(C)$, luego $\mathbf{c}(C)$ contiene un entorno de p , cualquiera que sea $p \in \mathbf{c}(C)$.

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES.

DEFINICIÓN 11.—Se llama *sucesión de números reales* a toda aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales. También se denomina de igual modo a la imagen de la aplicación. La notación de las sucesiones de números reales es la misma que la de las sucesiones de números racionales.

Las definiciones de igualdad, de adición (Def. 4, 1) y de multiplicación (Def. 5, 1) de sucesiones de números reales son las mismas que para números racionales y como allí se prueba:

19. *El conjunto $\mathcal{A}$ de todas las sucesiones de números reales es un anillo.*

DEFINICIÓN 12.—Una sucesión a_n de números reales se llama *convergente* cuando para todo entorno, $E_\varepsilon(0)$, del número cero, existe un número natural n tal que, para todo par de números naturales n', n'' , tales que $n' > n$, $n'' > n$, se verifique que $a_{n'} - a_{n''} \in E_\varepsilon(0)$.

Las mismas demostraciones de 5, 1, sirven para el siguiente teorema:

20. *El conjunto $\mathbf{A}$ de todas las sucesiones convergentes de números reales es un anillo con elemento unidad, que es subanillo de $\mathcal{A}$.*

DEFINICIÓN 13.—Se dice que el número real a es el límite de la sucesión a_n de números reales, y se escribe

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

cuando, para todo entorno $E_\varepsilon(a)$, existe un número natural $n(\varepsilon)$ tal que, para todo $n' > n$, se verifica que $a_{n'} \in E_\varepsilon(a)$. Una sucesión cuyo límite es cero se llama *sucesión nula*.

El lema 6, 1, con su demostración es válido también para sucesiones de números reales. Lo mismo sucede con el siguiente teorema, que es el correspondiente al 7, 1:

21. *El conjunto $\bar{\mathfrak{p}}_0$ de todas las sucesiones nulas de números reales es un ideal primo del anillo $\bar{\mathbf{A}}$ de todas las sucesiones convergentes de números reales.*

Como consecuencia del teorema 21, el anillo cociente $\bar{\mathbf{A}}/\bar{\mathfrak{p}}_0$ es un anillo entero. La naturaleza de este anillo viene dada por el siguiente teorema:

22. COMPLECCIÓN DEL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES.—El anillo $\overline{A}/\overline{p}_0$ es isomorfo al cuerpo de los números reales:

$$(12) \quad \overline{A}/\overline{p}_0 \approx A/p_0 = \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del teorema 4, 1, que es válido, con la misma demostración, para sucesiones de números reales, se verifica que toda sucesión convergente de números reales está acotada. Por consiguiente, en virtud de 17, toda sucesión convergente de números reales posee límite superior y límite inferior. Sea a_n una sucesión convergente de números reales y sean:

$$L = \lim. \sup. a_n, \quad l = \lim. \inf. a_n.$$

Sea ε un número positivo arbitrario. Por ser a_n convergente, existe un número n tal que para todo n' y n'' mayores que n se verifica que

$$|a_{n'} - a_{n''}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por ser L el límite superior de a_n en todo entorno de L existe un término de la sucesión, $a_{n'}$, siendo $n' > n$, pues en otro caso no sería L punto de acumulación de a_n . Análogamente, existe un término $a_{n''}$ con $n'' > n$ que pertenece a todo entorno de l . Sea, por tanto,

$$n' > n, \quad n'' > n, \quad |a_{n'} - a_{n''}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |L - a_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |l - a_{n''}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

resultará:

$$|L - l| = |L - a_{n'} + a_{n'} - a_{n''} + a_{n''} - l| \leq |L - a_{n'}| + |a_{n'} - a_{n''}| + |a_{n''} - l| < \varepsilon,$$

y como ε es un número positivo arbitrario, $|L - l| = 0$, de donde $L = l$. Si $E_\varepsilon(L)$ es un entorno arbitrario de L , fuera de él existe únicamente un número finito de términos de la sucesión, pues, en otro caso, por ser a_n acotada, existiría otro punto de acumulación y L es al mismo tiempo el máximo y el mínimo de los puntos de acumulación. Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = l.$$

Sea j la correspondencia:

$$(13) \quad \overline{A}/\overline{p}_0 \xrightarrow{j} A/p_0.$$

definida del siguiente modo:

$$(14) \quad j(a_n + \bar{p}_0) = a, \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

a) *j es una aplicación.* En efecto, si $a_n + \bar{p}_0 = b_n + \bar{p}_0$ será $a_n = b_n + u_n$, $u_n \in \bar{p}_0$, de donde:

$$j(a_n + \bar{p}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = j(b_n + \bar{p}_0).$$

b) *Definiendo en $\bar{A}/\bar{p}_0$ la adición y la multiplicación como en A/p_0 , se verifica que j es un homomorfismo.* En efecto,

$$\begin{aligned} j[(a_n + \bar{p}_0) + (b_n + \bar{p}_0)] &= j[a_n + b_n + \bar{p}_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= j(a_n + \bar{p}_0) + j(b_n + \bar{p}_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j[(a_n + \bar{p}_0)(b_n + \bar{p}_0)] &= j(a_n b_n + \bar{p}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= j(a_n + \bar{p}_0) \cdot j(b_n + \bar{p}_0). \end{aligned}$$

c) *j es epimorfismo.* En efecto, si $a \in A/p_0$, la sucesión $a, a, \dots, a, \dots$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} (a, \dots, a, \dots) = a$, luego:

$$j[(a, \dots, a, \dots) + \bar{p}_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} (a, \dots, a, \dots) = a.$$

d) *j es isomorfismo.* Sea $j(a_n + \bar{p}_0) = 0$. De aquí se deduce que

$$0 = j(a_n + \bar{p}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \text{luego } a_n \in \bar{p}_0 \quad \text{y} \quad a_n + \bar{p}_0 = \bar{p}_0.$$

En virtud del isomorfismo (12) se pueden identificar los dos cuerpos. Por tanto, convendremos desde ahora en poner:

(15)

$$\boxed{\bar{A}/\bar{p}_0 = A/p_0 = R.}$$

El isomorfismo (12) se expresa diciendo que *el cuerpo de los números reales es completo.*

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE COMPLECCIÓN.—I. *Toda sucesión convergente de números reales posee límite.*

II. *Si a_n es una sucesión convergente de números reales, se verifica que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_n + \overline{p}_0.$$

III. *Todo número real es el límite de una sucesión de números racionales.*

IV. *Si a_n y b_n son sucesiones convergentes de números reales y si k es un número real, se verifica:*

$$(16) \left\{ \begin{array}{ll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right); & 4) \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \end{array} \right.$$

V. *Si a_n , b_n y c_n son tres sucesiones de números reales y se verifica que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n,$$

se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

En efecto, la primera igualdad establece que

$$a_n + \overline{p}_0 = c_n + \overline{p}_0$$

y las desigualdades que:

$$a_n + \overline{p}_0 \leq b_n + \overline{p}_0 \leq c_n + \overline{p}_0.$$

VI. *Si b_n es una subsucesión de la sucesión de números reales a_n (esto es, todos los términos de b_n lo son también de a_n), y si a_n es convergente, se verifica que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Basta observar que $a_n - b_n$ es una sucesión nula de números reales.

4. La función exponencial real.

I. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE NATURAL.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *potencia de exponente natural n del número real a* , y se representa por a^n , al siguiente producto:

$$(1) \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

Se conviene en poner $a^1 = a$.

De esta definición se deducen inmediatamente las siguientes leyes de exponentes:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \\ \text{II. } n > m, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \\ \text{III. } (a^n)^m = a^{nm}, \\ \text{IV. } a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \\ \text{V. } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n, \quad b \neq 0. \end{array} \right.$$

EJERCICIOS:

694. Calcular $[(0, 1; 0, 11; 0, 111; \dots) + p_0]^3$.

695. Demostrar las propiedades (2).

II. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE ENTERO.

DEFINICIÓN 2.—Se define:

$$(3) \quad a^0 = 1, \text{ para todo número real } a \neq 0$$

Si $-n$ es un entero negativo, se define:

$$(4) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para todo número real } a \neq 0.$$

1. La potenciación de exponente entero verifica las mismas leyes (2) de la potenciación de exponente natural, con la única diferencia de que en la segunda ley desaparece la restricción $n > m$.

EJERCICIOS:

696. Calcular $\left(\frac{n}{2n+1} + p_0\right)^{-2}$

697. Calcular e^{-r} , r natural.

698. Demostrar las leyes de exponentes para exponentes enteros.

699. Si m y n son dos números enteros y a un número real mayor que uno, se verifica que $m < n \Rightarrow a^m < a^n$.

700. Si m es un entero positivo y $0 < a < b$ dos números reales, se verifica que $a^m < b^m$.

III. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE RACIONAL.

2. Para todo número real positivo a y todo número natural, n , la ecuación

$$(5) \quad x^n = a$$

posee una solución única en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN.—1) a es un número entero positivo, m . Como la sucesión $1^n, 2^n, 3^n, \dots, i^n, \dots$ es divergente, para todo número natural r , existe un número natural b_r tal que:

$$(6) \quad b_r^n \leq m \cdot 10^{nr} < (b_r + 1)^n.$$

Sea $r > r'$. De (6) y de

$$b_{r'}^n \leq m \cdot 10^{nr'} < (b_{r'} + 1)^n$$

se deduce:

$$\frac{(b_r + 1)^n}{b_{r'}^n} > \frac{m \cdot 10^{nr}}{m \cdot 10^{nr'}}, \quad b_r \cdot 10^{-r} - b_{r'} \cdot 10^{-r'} > -10^{-r},$$

$$\frac{(b_{r'} + 1)^n}{b_r^n} > \frac{m \cdot 10^{nr'}}{m \cdot 10^{nr}}, \quad b_r \cdot 10^{-r} - b_{r'} \cdot 10^{-r'} < 10^{-r'},$$

de donde:

$$-10^{-r'} < -10^{-r} < b_r \cdot 10^{-r} - b_{r'} \cdot 10^{-r'} < 10^{-r'},$$

o bien,

$$(7) \quad |b_r \cdot 10^{-r} - b_{r'} \cdot 10^{-r'}| < 10^{-r'}, \quad r' < r.$$

(7) prueba que la sucesión $b_r \cdot 10^{-r}$ es convergente, luego

$$c = b_r \cdot 10^{-r} + p$$

es un número real y

$$(8) \quad c^n = b_r^n 10^{-nr} + p_0.$$

Ahora bien, de (6) se deduce que

$$b_r^n 10^{-nr} \leq m < [(b_r + 1) 10^{-r}]^n,$$

luego:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} m - b_r^n 10^{-nr} < [(b_r + 1)^n - b_r^n] 10^{-nr} \\ < n (b_r + 1)^{n-1} 10^{-(n-1)r} 10^{-r} \leq n (b_r + b_r)^{n-1} 10^{-(n-1)r} 10^{-r} \\ & \leq (n 2^{n-1} c) 10^{-r}, \end{array} \right.$$

y como el número del paréntesis no depende de r , se puede hacer el último miembro tan pequeño como se desee sin más que tomar r suficientemente grande. La relación (9) prueba que

$$c^n = m.$$

2) a es un número racional positivo: $a = \frac{p}{q}$, p y q enteros positivos. En virtud de 1) existen los números b y c tales que:

$$b^n = p, \quad c^n = q,$$

de donde, teniendo presente que n es natural:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^n = \frac{b^n}{c^n} = \frac{p}{q}.$$

3) Sea a un número real positivo arbitrario y sea a_r un representante de a cuyos términos son todos positivos. Por ser los números racionales a_r positivos, en virtud de 2) existe la raíz n -ésima de a_r , esto es, existen los números reales c_r tales que

$$(10) \quad c_r^n = a_r, \quad r = 1, \dots$$

La sucesión c_r es convergente. En efecto, por ser a positivo se puede elegir el representante a_r de modo que $a_r > m > 0$, para todo r , de donde $c_r > \sqrt[n]{m} > 0$. De $c_r > \sqrt[n]{m}$ para todo r , resulta que, dado un número po-

sitivo arbitrario ϵ , se puede hallar un número p tal que para todo r y $r' > p$ sea

$$|a_r - a_{r'}| < n \epsilon \left(\frac{n}{1+m}\right)^{n-1}$$

luego

$$|a_r - a_{r'}| = |c_r^n - c_{r'}^n| = |c_r - c_{r'}| |c_r^{n-1} + c_r^{n-2} c_{r'} + \dots + c_{r'}^{n-1}| < n \epsilon \left(\frac{n}{1+m}\right)^{n-1},$$

de donde

$$|c_r - c_{r'}| < \epsilon \frac{n \left(\frac{n}{1+m}\right)^{n-1}}{c_r^{n-1} + c_r^{n-2} c_{r'} + \dots + c_{r'}^{n-1}} < \epsilon.$$

Ahora bien, en virtud del teorema de la complección, se verifica que existe un número real c tal que

$$c_r + p_0 = c,$$

de donde

$$c^n = c_r^n + \overline{p}_0 = a_r + \overline{p}_0 = a_r + p_0 = a.$$

La unicidad de la solución se deduce de la construcción efectuada.

DEFINICIÓN 3.—A la solución única, en $\mathbb{R}$, de la ecuación (5) se le llama *raíz n -ésima de a* y se representa mediante las notaciones siguientes:

$$1) \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Si $r = \frac{m}{n}$ es un número racional arbitrario, siempre se puede suponer que $n > 0$ y así lo haremos en lo que sigue. Se define la *potenciación de exponente racional* de un número real positivo, a , del siguiente modo:

$$(12) \quad a^r = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

EJERCICIOS:

701. Probar la última igualdad de (12).

702. Probar que $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

3. La potenciación de exponente racional verifica las mismas propiedades que la potenciación de exponente entero, esto es:

$$(13) \quad \text{I) } a^r a^s = a^{r+s}, \quad \text{II) } \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad \text{III) } (a^r)^s = a^{rs}.$$

$$\text{IV) } a^r b^r = (a b)^r, \quad \text{V) } \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r.$$

EJERCICIO:

703. Demostrar la proposición 3.

4. Si a y b son números reales positivos, n un número entero positivo y r y s números racionales, se verifican las siguientes relaciones:

$$1) \quad a > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > 1.$$

$$2) \quad a > b > 0 \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$$

$$3) \quad a > b > 0, r > 0 \implies a^r > b^r.$$

$$4) \quad a > b > 0, r < 0 \implies a^r < b^r.$$

$$5) \quad a > 1, r > s \implies a^r > a^s.$$

$$6) \quad 1 > a > 0, r > s \implies a^r < a^s.$$

$$\text{DEMOSTRACIÓN.}—1) \quad a^{\frac{1}{n}} \leq 1 \implies a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \leq 1.$$

$$2) \quad a > b > 0 \implies \frac{a}{b} > 1 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} > 1 \implies \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} > 1 \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$$

$$3) \quad a > b > 0 \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}} > 0 \implies a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} > 0.$$

$$4) \quad a > b > 0, r = -\frac{m}{n}, m > 0, \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}} > 0 \implies \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \implies$$

$$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} < \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} \iff a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}}.$$

$$5) \quad a > 1, r - s > 0 \implies a^{r-s} > 1 \implies \frac{a^r}{a^s} > 1 \implies a^r > a^s.$$

$$6) \quad 1 > a > 0, r - s > 0 \implies 1 > a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s} \implies a^s > a^r.$$

LEMA 1.—Si a es un número real positivo se verifica que

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos, en primer lugar, que $a > 1$. De 4, 1) se deduce que $a^{\frac{1}{n}} > 1$, luego $a^{\frac{1}{n}} = 1 + u_n$, $u_n > 0$; de donde $a = (1 + u_n)^n > 1 + n u_n$, $u_n < \frac{a-1}{n}$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Por consiguiente, teniendo en cuenta las consecuencias del teorema de compleción,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

Si $0 < a < 1$, será:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

Si $a = 1$ la proposición es trivial.

LEMA 2.—Si a es un número real positivo y r_n una sucesión nula de números racionales, se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$.

DEMOSTRACIÓN.—1º) Todos los términos de la sucesión r_n son no negativos. Supongamos, en primer lugar, que $a > 1$. Si $r_n \neq 0$, está unívocamente determinado el número entero positivo m_n , por la condición

$$m_n \leq \frac{1}{r_n} < m_n + 1.$$

De la propiedad 5) de 4 se deduce, en el caso de ser $r_n \neq 0$, que

$$a^{\frac{1}{m_n+1}} < a^{r_n} \leq a^{\frac{1}{m_n}}.$$

Si $r_n = 0$ se verifica que $a^{r_n} = 1$, luego si $r_n = 0$ pondremos $a^{\frac{1}{m_n+1}} = a^{\frac{1}{m_n}} = 1$.

Si el número de términos distintos de cero en r_n es finito el lema es trivial. Supongamos, por tanto, que existen infinitos términos no nulos. En

este caso la sucesión m_n correspondiente a los $r_n \neq 0$ es divergente, luego la sucesión $\frac{1}{m_n}$ es una subsucesión de la sucesión $\frac{1}{n}$ y se verifica que

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{m_n+1}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{m_n}} = 1.$$

Si $a < 1$, bastará considerar la sucesión $\frac{1}{a^{r_n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$.

2.º) Todos los términos de r_n son no positivos. Se reduce al caso anterior sin más que observar que $a^{r_n} = \frac{1}{a^{|r_n|}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{|r_n|}$.

3.º) Si el número de términos de un signo es finito se reduce a uno de los casos anteriores.

4.º) Existen infinitos términos de cada signo. Observando que $|r_n| - r_n = 0$ cuando r_n es positivo e igual a $2|r_n|$ cuando r_n es negativo, resulta que las dos sucesiones a^{r_n} y $a^{|r_n| - r_n}$ tienen sus exponentes no negativos y son sucesiones nulas, luego por 1.º):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{|r_n|}}{a^{|r_n| - r_n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{|r_n|}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{|r_n| - r_n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

LEMA 3.—Si r_n es una sucesión convergente de números racionales y a es un número real positivo, se verifica que la sucesión a^{r_n} está acotada.

DEMOSTRACIÓN.—Por ser r_n convergente está acotada, sea $|r_n| < m$. Si $a > 1$, de $-m < r_n < m$ se deduce, en virtud de 4, 5), que

$$a^{-m} < a^{r_n} < a^m.$$

Análogamente si $a < 1$.

LEMA 4.—Si a es un número real positivo y b_n una sucesión convergente de números racionales, se verifica que a^{b_n} es una sucesión convergente.

DEMOSTRACIÓN.—1.º) $a > 1$. Sea ε un número positivo arbitrario. En virtud del lema anterior, es a^{b_n} una sucesión acotada. Sea $a^{b_n} < m$. En virtud de (13) existe un número natural p tal que $\forall q > p$ se verifique: $a^{\frac{1}{q}} < 1 + \frac{\varepsilon}{m}$.

Por ser b_n convergente, se verifica que existe un número natural n tal que, $\forall n', n'' > n$, se verifique que $|b_{n'} - b_{n''}| < \frac{1}{p+1}$, de donde

$$a^{|b_{n'} - b_{n''}|} < a^{\frac{1}{p+1}} < 1 + \frac{\varepsilon}{m}.$$

Luego $a^{|b_{n'} - b_{n''}|} - 1 < \frac{\varepsilon}{m}$.

Por consiguiente, para todo n' y $n'' > n$, se verifica que:

$$|a^{b_{n'}} - a^{b_{n''}}| = a^{b_{n''}} |a^{b_{n'} - b_{n''}} - 1| = a^{b_{n''}} |a^{|b_{n'} - b_{n''}|} - 1| < m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon, \quad b_{n'} > b_{n''}.$$

2.º) $0 < a < 1$. Basta considerar las sucesiones $\left(\frac{1}{a}\right)^{b_n}$ y observar que $a^{b_n} \left(\frac{1}{a}\right)^{b_n} = 1_n$.

IV. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE REAL.

DEFINICIÓN 4.—Si a y $b = b_n + p_0$ son dos números reales, siendo el primero positivo, se llama *potencia de base a y exponente b* , y se representa por a^b , al siguiente número (véase el teorema de complección):

$$a^b = a^{b_n} + \overline{p_0}.$$

La definición anterior es consistente en virtud del lema 4 y del teorema de complección.

PROPIEDADES.—I. *La potenciación de exponente real es uniforme.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $b = b_n + p_0 = b'_n + p_0$, de donde $b_n - b'_n \in p_0$.

$$\frac{a^{b_n} + \overline{p_0}}{a^{b'_n} + \overline{p_0}} = a^{b_n - b'_n} + \overline{p_0}, \quad a > 0.$$

y, por el lema 2, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n - b'_n} = 1$, luego $a^{b_n - b'_n} + \overline{p_0} = 1 + \overline{p_0}$, y, por tanto, $a^{b_n} + \overline{p_0} = a^{b'_n} + \overline{p_0}$.

II. *La potenciación de exponente real verifica las cinco leyes de exponentes:*

$$1) \ a^b a^c = a^{b+c}. \quad 2) \ \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}. \quad 3) \ (a^b)^c = a^{bc}. \quad 4) \ a^c b^c = (a b)^c. \quad 5) \ \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

DEMOSTRACIÓN.—1)

$$a^b a^c = (a^{\frac{b}{n}} + \bar{p}_0)(a^{\frac{c}{n}} + \bar{p}_0) = a^{\frac{b}{n}} a^{\frac{c}{n}} + \bar{p}_0 = a^{\frac{b+c}{n}} + \bar{p}_0 = a^{b+c}$$

2) Análoga a 1). 3)

$$(a^b)^c = (a^{\frac{b}{n}} + \bar{p}_0)^c = (a^{\frac{b}{n}})^c + \bar{p}_0 = a^{\frac{b}{n}c} + \bar{p}_0 = a^{bc}.$$

4)

$$a^c b^c = a^{\frac{c}{n}} b^{\frac{c}{n}} + \bar{p}_0 = (ab)^{\frac{c}{n}} + \bar{p}_0 = (ab)^c.$$

Análogamente 5).

III. 1) Si $a > b > 0$ y $c > 0$ son tres números reales, se verifica que $a^c > b^c$.

2) Si $a > b > 0$ y $c < 0$ son tres números reales, se verifica que $a^c < b^c$.

3) Si $a > 1$ y $b > c$ son tres números reales, se verifica que $a^b > a^c$.

4) Si $1 > a > 0$ y $b > c$ son tres números reales, se verifica que $a^b < a^c$.

DEMOSTRACIÓN.—1) De $c > 0$ se deduce que puede elegirse un representante c_n , de c , cuyos términos sean todos números racionales positivos, luego de 3) 4 se deduce que

$$a^{c_n} > b^{c_n} \quad \text{y} \quad a^{c_n} - b^{c_n} = \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{c_n} - 1 \right] b^{c_n},$$

como $c > 0$, se puede suponer que todos los c_n son mayores que un número racional positivo r y como $\frac{a}{b} > 1$, resulta que $\left(\frac{a}{b} \right)^{c_n} > \left(\frac{a}{b} \right)^r > 1$, luego $\left(\frac{a}{b} \right)^{c_n} - 1 > \left(\frac{a}{b} \right)^r - 1 > 0$. Si $b > 1$ será $b^{c_n} > b^r$, y si $b < 1$ será $b^{c_n} > b^m$, siendo m una cota superior de c_n , luego en cualquier caso es $a^{c_n} - b^{c_n} > p > 0$, luego $a^c > b^c$.

2) Se reduce al caso anterior sin más que observar que $a^c = \left(\frac{1}{a} \right)^{-c}$.

3) $\frac{a^c}{b^c} = a^{b-c}$ y de $a > 1 \implies a^{b-c} > 1$.

4) Se reduce al caso 3).

5. TEOREMA.—Si a es un número real positivo, distinto de la unidad, la correspondencia $x \xrightarrow{\exp} a^x$ es un isomorfismo ordenado (antiordenado) del grupo aditivo $\mathfrak{A}$ de los números reales sobre el grupo multiplicativo $\mathfrak{M}$ de los números reales positivos, cuando $a > 1$ (cuando $a < 1$).

DEMOSTRACIÓN.—La correspondencia *exp.* es una aplicación por la uniformidad de la potenciación de exponente real.

La aplicación *exp.* es un homomorfismo. En efecto, en virtud de 1) II, se verifica que

$$\exp. (x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = \exp. (x) \cdot \exp. (y).$$

La aplicación *exp.* es un epimorfismo. Sea y un número real positivo arbitrario. Si $a > 1$ la sucesión a^{-n} , siendo n natural, es una sucesión nula y la sucesión a^n es una sucesión divergente hacia $+\infty$. Si $a < 1$, la sucesión a^n es nula y la sucesión a^{-n} es divergente hacia $+\infty$. Por consiguiente, dado un entorno arbitrario $E_\varepsilon(y)$ de y , tal que $0 < y - \varepsilon$, existen siempre dos números racionales r y s tales que

$$a^r \leq y - \varepsilon < y + \varepsilon \leq a^s.$$

De $r < \frac{r+s}{2} < s$ (o bien $r > \frac{r+s}{2} > s$), se deduce que $a^r < a^{\frac{r+s}{2}} < a^s$.

Si $a^{\frac{r+s}{2}} \notin E_\varepsilon(y)$ pondremos $r_1 = r$, $s_1 = \frac{r+s}{2}$ cuando $y + \varepsilon \leq a^{\frac{r+s}{2}}$,

o bien $r_1 = \frac{r+s}{2}$, $s_1 = s$, cuando $a^{\frac{r+s}{2}} \leq y - \varepsilon$. De este modo se verificará siempre que

$$a^{r_1} \leq y - \varepsilon < y + \varepsilon \leq a^{s_1} \quad |r_1 - s_1| = \frac{1}{2} |r - s|.$$

Así siguiendo, se obtienen las sucesiones de números racionales r_n, s_n , tales que:

$$a^{r_n} \leq y - \varepsilon < y + \varepsilon \leq a^{s_n}, \quad |r_n - s_n| = \frac{1}{2^n} |r - s|,$$

luego la sucesión $r_n - s_n$ es una sucesión nula y, por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n} = 1$,

luego $a^{s_n} - a^{r_n} = a^{r_n} (a^{s_n - r_n} - 1)$ puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, lo que prueba que existirá un n para el cual $a^{r_n} \in E_\varepsilon(y)$.

Sea $\{E_n(y)\}$ un filtro de entornos de y cuyos radios son iguales a $\frac{1}{n}$, n número natural. Según se acaba de probar, existe un número racional x_n tal que $a^{x_n} \in E_n(y)$, $\forall n$. Por consiguiente,

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = y.$$

o lo que es lo mismo:

$$a^{x_n} + \bar{p}_0 = y.$$

La sucesión x_n es convergente. En efecto, sea ε un número positivo arbitrario. Siempre se puede suponer que $a > 1$, pues en caso contrario bastaría tomar $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{y}$ en todo el razonamiento que vamos a hacer. Siendo $a > 1$, es $a^\varepsilon > 1$, $a^{-\varepsilon} < 1$ y $1 - a^{-\varepsilon} > 0$, luego existe un número real δ tal que

$$0 < \delta < \frac{1 - a^{-\varepsilon}}{\beta - a^{-\varepsilon}} y, \quad \delta < y$$

de donde

$$(1 - a^{-\varepsilon}) y > (\beta - a^{-\varepsilon}) \delta, \quad (a^{-\varepsilon} - 1) y < (a^{-\varepsilon} - \beta) \delta, \quad a^{-\varepsilon} (y - \delta) < y - \beta \delta,$$

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \frac{2\delta}{y - \delta},$$

de donde

$$a^\varepsilon > \frac{1}{1 - \frac{2\delta}{y - \delta}} > 1 + \frac{2\delta}{y - \delta}$$

Ahora bien, de (13) se deduce que existe un n tal que para todo n' y $n'' > n$ se verifique que

$$a^{x_{n'}} = y + \delta', \quad a^{x_{n''}} = y + \delta'', \quad |\delta'| < \delta, \quad |\delta''| < \delta,$$

luego

$$a^{x_{n'} - x_{n''}} = \frac{a^{x_{n'}}}{a^{x_{n''}}} = \frac{y + \delta'}{y + \delta''} = 1 + \frac{\delta' - \delta''}{y + \delta''} < 1 + \frac{2\delta}{y - \delta}, \quad 1 - \frac{2\delta}{y - \delta} < a^{x_{n'} - x_{n''}},$$

luego para todo n' y $n'' > n$ será:

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \frac{2\delta}{y - \delta} < a^{x_{n'} - x_{n''}} < 1 + \frac{2\delta}{y - \delta} < a^\varepsilon,$$

de donde, en virtud de III 3), resulta que

$$-\varepsilon < x_{n'} - x_{n''} < \varepsilon.$$

Por consiguiente, $x = x_n + \bar{p}_0$ es un número real y será:

$$a^x = y.$$

La aplicación *exp.* es un isomorfismo. Sea $\exp. (x) = 1 \iff a^x = 1$. Teniendo en cuenta III, se verifica que $a > 1$ y $x > 0 \implies a^x > 1$ y $a > 1$, $x < 0 \implies a^x < 1$. Análogamente, $a < 1$ y $x > 0 \implies a^x < 1$ y $a < 1$, $x < 0 \implies a^x > 1$, luego como $a \neq 1$, será $x = 0$.

Si $a > 1$ el isomorfismo es ordenado. Es consecuencia de III, 3).

Si $a < 1$ el isomorfismo es antiordenado. Es consecuencia de III, 4).

DEFINICIÓN 5.—La aplicación *exp.* se llama *función exponencial real*. El número a se llama *base* de la función exponencial.

DEFINICIÓN 6.—Por ser la función *exp.* un isomorfismo, su aplicación inversa es también un isomorfismo, llamado *función logarítmica de base a*, y se representa por $\log_a$.

CONSECUENCIAS.—1. $y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y) \iff y = a^x$.

2. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

4. $\log_a x^y = y \log_a x$. En efecto, sea $z = \log_a x^y \iff x^y = a^z$. Sea $t = \log_a x \iff x = a^t$, de donde $a^z = x^y = (a^t)^y = a^{ty}$ y por ser *exp.* un isomorfismo, $z = ty = y \log_a x$.

5. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$. En efecto, $y = \log_a x \iff x = a^y$, resulta $\log_b x = y \cdot \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a$.

La figura 86 representa las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica.

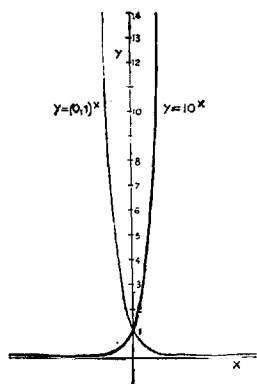


Fig. 86.

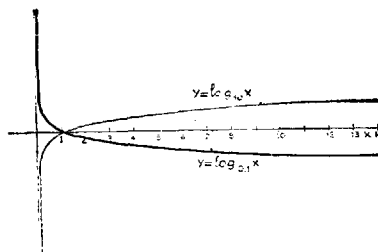


Fig. 87.

La gráfica de la función logarítmica, tomando el eje de la variable y el de la función en la forma usual, es de la figura 87.

EJERCICIOS:

704. Representar gráficamente las funciones $y = \exp_2(x)$, $y = \exp_3(x)$, $y = \exp_{\frac{1}{2}}(x)$, $y = \exp_{\frac{1}{3}}(x)$.

705. Empleando una tabla de logaritmos, construir una regla con graduación logarítmica.

706. Observando que para valores de x alejados del 1, la curva logarítmica se aproxima mucho a una recta, calcular $\log_{10} 131,6$, sabiendo que $\log_{10} 131 = 2,1172712$, $\log_{10} 132 = 2,1205739$.

707. Sabiendo que $\ln 2,05 = 0,71783\ 97931$ y $\ln 2,06 = 0,72270\ 59828$, calcular $\ln 2,054$.

708. Sabiendo que $\ln 1,001 = 0,00099\ 95003$, $\ln 1,13 = 0,12221\ 76327\ 242492$, $\ln 10 = 2,30258\ 50929\ 940457$, calcular $\ln 1131$, 718 .

709. Sabiendo que $\exp_e(0,867) = 2,37976\ 09513\ 29496\ 863$, calcular con el mismo número de cifras decimales exactas $\exp_e(0,86732102)$.

§ 2. SUCESIONES Y SERIES DE NUMEROS REALES

1. Sucesiones de números reales.—Se ha visto (Def. 12, 3, § 1) que una sucesión de números reales podía ser convergente, en cuyo caso (teorema de complección) poseía límite. Una sucesión de números reales se dice que *diverge hacia* $+\infty$, y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

cuando, para todo número M , existe un n tal que, para todo $n' > n$ se verifique que $a_{n'} > M$. Simbólicamente, esta definición puede expresarse del siguiente modo:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \Rightarrow \exists n \mid \forall n' > n, a_{n'} > M.$$

Análogamente, se dice que la sucesión a_n diverge hacia $-\infty$, y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

cuando, para todo número real m , existe un número natural n , tal que, para todo $n' > n$, se verifique que $a_{n'} < m$. Simbólicamente:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall m \Rightarrow \exists n \mid \forall n' > n, a_{n'} < m.$$

Las sucesiones que no son convergentes ni divergentes se llaman *oscilantes*.

1. La sucesión a_n es oscilante $\iff$ La sucesión a_n posee más de un número de acumulación, o bien posee un número de acumulación y no está acotada, o bien no está acotada ni inferiormente ni superiormente.

2. Una sucesión es convergente $\iff$ está acotada y posee un único punto de acumulación.

3. Una sucesión es divergente $\iff$ no posee ningún número de acumulación y está acotada bien inferiormente, bien superiormente

Estos teoremas son consecuencias inmediatas de las definiciones y de las propiedades de las sucesiones convergentes.

La sucesión b_n se llama *subsucesión* de la sucesión a_n cuando todo término de b_n es término de a_n .

4. Si b_n es una subsucesión de una sucesión convergente a_n , se verifica que b_n es convergente y posee el mismo límite que a_n . Si b_n es subsucesión de una sucesión divergente a_n , b_n es también divergente.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Sea ε un número positivo arbitrario. Existe un número n tal que, para todo $n' > n$ se verifica que $|a_{n'} - a| < \varepsilon$. Sea n_1 un número natural tal que todos los términos a_i , $i \leq n$, que figuran en la subsucesión b_n tengan en ésta un índice j : $a_i = b_j$, tal que $j < n_1$. Entonces, para todo $n'' > n_1$ se verificará que $b_{n''} = a_{n'}$, $n' > n$, luego $|a - b_{n''}| < \varepsilon$, $\forall n'' < n_1$. La segunda parte se demuestra de un modo análogo.

5. Si ω_n es una sucesión nula de números reales y $a > 0$, se verifica que

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\omega_n} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea ε un número positivo arbitrario. Supondremos que $a > 1$: si $0 < a < 1$ bastará considerar $\frac{1}{a}$. Por ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, existe un número natural m tal que $a^{\frac{1}{m}} - 1 < \varepsilon$. Ahora bien, por ser ω_n una sucesión

nula, existe un número natural n tal que, para todo $n' > n$, se verifique que $|\omega_{n'}| < \frac{1}{m}$. Por ser $a < 1$, se verifica que:

$$(4) \quad -\frac{1}{m} < \omega_{n'} < \frac{1}{m} \Rightarrow a^{-\frac{1}{m}} < a^{\omega_{n'}} < a^{\frac{1}{m}} \Rightarrow a^{-\frac{1}{m}} - 1 < a^{\omega_{n'}} - 1 < a^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} a > 1 &\Rightarrow a^{\frac{1}{m}} > 1 \Rightarrow a^{-\frac{1}{m}} < 1 \Rightarrow 1 - a^{-\frac{1}{m}} > 0 \Rightarrow \frac{1 - a^{-\frac{1}{m}}}{1} < \frac{1 - a^{-\frac{1}{m}}}{a^{-\frac{1}{m}}} \\ &\Rightarrow a^{-\frac{1}{m}} - 1 > \frac{a^{-\frac{1}{m}} - 1}{a^{-\frac{1}{m}}} \end{aligned}$$

pero

$$\frac{a^{-\frac{1}{m}} - 1}{a^{-\frac{1}{m}}} = 1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = 1 - a^{-\frac{1}{m}} = -(a^{\frac{1}{m}} - 1), \text{ luego } -(a^{\frac{1}{m}} - 1) < a^{-\frac{1}{m}} - 1,$$

y teniendo en cuenta la última acotación (4), resulta:

$$-\varepsilon < -(a^{\frac{1}{m}} - 1) < a^{-\frac{1}{m}} - 1 < a^{\omega_{n'}} - 1 < a^{\frac{1}{m}} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{\omega_{n'}} - 1| < \varepsilon, \quad \forall n' > n.$$

6. Si ω_n es una sucesión convergente de números reales y $a > 0$ un número real, se verifica que

$$5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\omega_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$. La sucesión $\omega - \omega_n$ es una sucesión nula, luego:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\omega - \omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\omega}}{a^{\omega_n}} = \frac{a^{\omega}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\omega_n}}$$

7. Si x_n es una sucesión convergente de números reales positivos y $a > 0$ un número real positivo, se verifica que

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = \log_a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

DEMOSTRACIÓN.—Supondremos que x_n no es nula, aunque el teorema es también cierto en este caso. Sea $y_n = \log_a x_n \iff x_n = a^{y_n}$, de donde, en virtud de (5),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \log_a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

8. Si x_n es una sucesión convergente y no nula de números reales positivos, e y_n una sucesión convergente de números reales, se verifica que

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $a > 1$ un número real arbitrario. En virtud de (6) se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log_a (x_n^{y_n}) \right] = \log_a \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) \right],$$

pero

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a (x_n^{y_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [y_n \log_a x_n] = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) \left(\log_a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \log_a \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \right], \end{aligned}$$

luego:

$$\log_a \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) \right] = \log_a \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \right],$$

y, por la uniformidad de la función logarítmica, resulta (7).

9. Si x_n e y_n son dos sucesiones convergentes y no nulas de números reales positivos, se verifica que

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\log_{x_n} y_n] = \log_{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $z_n = \log_{x_n} y_n$. De aquí se deduce: $y_n = x_n^{z_n}$ y, por el teorema 8,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n},$$

de donde

$$\log \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

DEFINICIÓN 1.—Una sucesión se llama *monótona creciente*, *decreciente*, *no creciente*, *no decreciente*, según que, para todo n , se verifique:

$$u_{n+1} > u_n, \quad u_{n+1} < u_n, \quad u_{n+1} \leq u_n, \quad u_{n+1} \geq u_n,$$

respectivamente.

De la definición anterior se deduce que: Las sucesiones monótonas crecientes y no decrecientes están acotadas inferiormente y las sucesiones monótonas decrecientes y no crecientes están acotadas superiormente. Por consiguiente, para que una sucesión monótona creciente o no decreciente (decreciente o no creciente) esté acotada es suficiente con que lo esté superiormente (inferiormente).

10. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente y si no es acotada es divergente.*

DEMOSTRACIÓN.—Supondremos que se trata de una sucesión monótona creciente o no decreciente, a_n , análogamente se trata el caso de las sucesiones decrecientes o no crecientes. Por ser a_n una sucesión acotada posee límite superior y límite inferior. Sea a el límite superior y a' el límite inferior. Si fuese $a' \neq a$, en el entorno $E_\varepsilon(a)$, tal que $a' < a - \varepsilon$, existiría un número, $a_{n'}$, de la sucesión; luego, por ser todos los restantes términos de la sucesión mayores o iguales a $a_{n'}$, sería $a_{n''} > a - \varepsilon$, $\forall n'' > n'$, luego a' no sería punto de acumulación. Contradicción.

La sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, luego es convergente; al número real definido por ella se le llama, como se ha dicho anteriormente, número e :

$$(9) \quad e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + p_0.$$

11. *Si $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, siendo n_i números naturales, se verifica que:*

$$(10) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i} = e.$$

DEMOSTRACIÓN.—De (9) se deduce que, dado un número positivo arbitrario, ε , existe un número natural n tal que $\forall n_i > n$ sea

$$\left| e - \left(1 + \frac{1}{n_i} \right)^{n_i} \right| < \varepsilon.$$

Por ser n_i divergente, existe un número j tal que $\forall i > j$ sea $n_i > n$.

12. Si a_i y b_i son sucesiones de números reales tales que todos los términos de ambas sucesiones pertenecen a la sucesión c_i y todo término de esta sucesión pertenece a una, y sólo una, de las sucesiones a_i y b_i y si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i,$$

se verifica que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$. Sea ε un número positivo arbitrario, existen los números naturales n_1 y n_2 tales que

$$\forall i > n_1, |a - a_i| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \forall i > n_2, |a - b_i| < \varepsilon.$$

Sea m_1 un número natural tal que todos los términos $a_1, \dots, a_{n_1}$ tengan un subíndice inferior a m_1 , en la sucesión c_i , y sea m_2 un número natural tal que todos los términos $b_1, \dots, b_{n_2}$ tengan un índice inferior a m_2 en la sucesión c_i . Por consiguiente, si $m = \max.(m_1, m_2)$, se verifica que $\forall i > m$ será $|a - c_i| < \varepsilon$.

13. Si ω_n es una sucesión nula cuyos términos son todos positivos (*) (negativos), se verifica que

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_n)^{\frac{1}{\omega_n}} = e.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea n_i el número natural determinado por las condiciones:

$$n_i \leq \frac{1}{\omega_i} < n_i + 1 \left(n_i \leq \frac{1}{|\omega_i|} < n_i + 1 \right); \quad \frac{1}{n_i + 1} < \omega_i \leq \frac{1}{n_i}, \quad \left(\frac{-1}{n_i} \leq \omega_i < \frac{-1}{n_i + 1} \right),$$

(*) Se sobreentiende que puede haber un número finito de términos negativos. En este caso puede prescindirse de todos ellos.

de donde se deduce que:

$$(12) \quad \left(1 + \frac{1}{n_i + 1}\right)^{n_i} < (1 + \omega_i)^{n_i} \leq (1 + \omega_i)^{\frac{1}{\omega_i}} < (1 + \omega_i)^{n_i + 1} \leq \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i + 1}$$

$$(12') \quad \left[\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)^{-(n_i + 1)} \leq (1 + \omega_i)^{-(n_i + 1)} < (1 + \omega_i)^{\frac{1}{\omega_i}} \leq (1 + \omega_i)^{-n_i} < \left(1 - \frac{1}{n_i + 1}\right)^{-n_i}\right],$$

Ahora bien, por ser ω_i una sucesión nula es $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, luego, en virtud de 11, se verifica que:

$$(13) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i + 1}\right)^{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n_i + 1}\right)^{n_i + 1}}{1 + \frac{1}{n_i + 1}} = e, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i + 1} \\ = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)\right] = e.$$

De (12) y (13) resulta el teorema.

$$\left[\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)^{-(n_i + 1)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)^{n_i + 1}} = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n_i}}\right]^{n_i + 1} = \left[\frac{n_i}{n_i - 1}\right]^{n_i + 1} = \left[1 + \frac{1}{n_i - 1}\right]^{n_i + 1},\right.$$

de donde

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)^{-(n_i + 1)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n_i - 1}\right)^{n_i - 1} \left(1 + \frac{1}{n_i - 1}\right)^2\right] = e, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n_i + 1}\right)^{-n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n_i + 1}}\right]^{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{n_i + 1}{n_i}\right)^{n_i} \\ = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i} = e,$$

se obtiene, en virtud de (12'), que $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 + \omega_i)^{\frac{1}{\omega_i}} = e$, cuando todos los términos ω_i son negativos.]

14. Si ω_n es una sucesión nula de números reales, se verifica que

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_n)^{\frac{1}{\omega_n}} = e.$$

DEMOSTRACIÓN.—Si ω_n es una sucesión nula de términos positivos (con un número finito de términos negativos) o una sucesión nula de términos negativos (con un número finito de términos positivos) el teorema coincide con el 13. Sea, por tanto, ω_n una sucesión nula con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Si ω'_n es la subsucesión de ω_n formada por los términos positivos y ω''_n la formada por los términos negativos, aplicando los teoremas 12 y 13 resulta el teorema 14.

15. Si ω_n es una sucesión nula de números reales, se verifica que

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \omega_n)^{\frac{1}{\omega_n}} = \frac{1}{e}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \omega_n)^{\frac{1}{\omega_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \omega_n)^{-\frac{1}{\omega_n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \omega_n)^{-\frac{1}{\omega_n}}} = \frac{1}{e}.$$

16. Si ω_n es una sucesión nula de números reales y h_n una sucesión divergente hacia $+\infty$, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n h_n = x$, siendo x un número real, se verifica que

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_n)^{h_n} = e^x.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_n)^{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + \omega_n)^{\frac{1}{\omega_n}} \right]^{\omega_n h_n} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \omega_n)^{\frac{1}{\omega_n}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n h_n} = e^x.$$

EJERCICIOS:

710. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot a}$.

711. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

712. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2 - 1}\right)^{(n+1)^2}$.

2. Series de números reales. Definiciones.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *serie de números reales* a una expresión de la siguiente forma:

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

en donde a_n , $n = 1, \dots$, son números reales, llamados *términos* de la serie. A partir de la serie (1) se obtiene la siguiente sucesión:

$$(2) \quad s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + \dots + a_n, \quad \dots,$$

llamada *sucesión de las sumas parciales* de la serie dada. La serie dada se llama: *convergente*, *divergente*, u *oscilante*, según que la sucesión de sus sumas parciales sea, respectivamente, convergente, divergente, u oscilante. Si la serie (1) es convergente, al límite de la sucesión de sus sumas parciales se llama *suma de la serie*. A la suma de la serie (1) la representaremos por:

$$(3) \quad S(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots),$$

luego

$$(4) \quad S(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n).$$

A las series se las representa por la siguiente notación:

$$(5) \quad a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

De la definición anterior y de las definiciones de convergencia y de límite de sucesiones se deducen, inmediatamente, los siguientes criterios generales:

1. CRITERIO GENERAL DE CONVERGENCIA DE CAUCHY.—*La serie (1) es convergente $\Leftrightarrow$ Para todo número positivo ϵ existe un número natural n tal que para todo par de números naturales n' y n'' mayores que n se verifique que:*

$$(6) \quad |a_{n'+1} + \dots + a_{n''}| < \epsilon.$$

Simbólicamente, se puede escribir este criterio del siguiente modo:

$$(7) \quad \text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente } \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists n \mid \forall n', n'' > n, \text{ es } |a_{n'+1} + \dots + a_{n''}| < \epsilon.$$

El criterio de Cauchy, aplicado al caso $n'' = n' + 1$, proporciona:

2. *Si la serie (1) es convergente, la sucesión a_n de sus términos es una sucesión nula.*

Como veremos más adelante, la proposición recíproca de ésta no es cierta.

3. *S es la suma de la serie (1) $\Leftrightarrow$ Para todo número positivo ϵ se verifica que existe un número natural, n , tal que, para todo $n' > n$, se verifique que*

$$(8) \quad |S - (a_1 + \dots + a_{n'})| < \epsilon.$$

Simbólicamente, se puede expresar esta proposición del siguiente modo:

$$(9) \quad S \text{ es la suma de (1)} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ se verifica que } \exists n \mid \forall n' > n$$

$$\text{es } |S - (a_1 + \dots + a_{n'})| < \epsilon.$$

EJERCICIOS:

713. Averiguar si es convergente la siguiente serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

714. Calcular la suma de la serie anterior.

Del número **1** se deduce que:

4. La serie (1) es divergente hacia $+\infty \iff$ Para todo número M existe un n tal que, para todo $n' > n$, se verifica que:

$$(10) \quad a_1 + \dots + a_{n'} > M.$$

Análogo criterio vale para las series divergentes hacia $-\infty$.

EJERCICIOS:

715. Demostrar que la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

es divergente hacia $+\infty$.

716. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-v}$$

es divergente cuando $v \leq 1$.

De 1, 1 y de la Def. 1 se deduce:

5. La serie (1) es oscilante $\iff$ La sucesión s_n de las sumas parciales posee más de un punto de acumulación, o bien, posee un único punto de acumulación y no está acotada superior o inferiormente, o bien, no está acotada superior ni inferiormente.

EJERCICIOS:

717. Demostrar que la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

es oscilante.

718. Demostrar que la serie

$$3 - 2,7 + 32,7 - 32,37 + 332,37 - 332,337 + 3332,337 - \dots$$

es oscilante.

719. Demostrar que la serie siguiente es oscilante:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$$

720. Demostrar que la serie siguiente es oscilante:

$$0,3 - 0,6 + 0,63 - 0,66 + 0,663 - 0,666 + \dots$$

DEFINICIÓN 2.—Si $s(n)$ es una aplicación de N en N y si

$$r(n) = s(1) + \dots + s(n-1),$$

dada la serie (1), se puede obtener a partir de ella otra serie:

$$(11) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

en donde

$$(12) \quad b_n = a_{r(n)+1} + \dots + a_{r(n+1)}.$$

La serie (11) se dice que se ha obtenido aplicando la ley asociativa $s(n)$ a la serie (1).

EJERCICIOS:

721. Aplicar la ley asociativa $s(n) = 2$ a las series de los ejercicios 717 y 718.

722. Aplicar la ley asociativa $s(n) = 3$ a la serie del ejercicio 719. Idem la ley asociativa $s(n) = 2$. Idem la ley asociativa $s(1) = 1$, $s(n) = 2$, $n > 1$. Idem la ley asociativa $s(n) = 4$. Idem la ley asociativa $s(2k+1) = 2$, $s(2k) = 4$.

Dos series que son ambas convergentes, ambas divergentes o ambas oscilantes, se dice que *tienen el mismo carácter*.

6. Al aplicar una ley asociativa a una serie convergente o divergente se obtiene otra del mismo carácter que la dada, y si la dada es convergente la serie que se obtiene al aplicar una ley asociativa posee la misma suma.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de la proposición 4 de 1 se verifica que si la serie (1) es convergente y si $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n)$, al ser la sucesión $b_1 + \dots + b_n$ de las sumas parciales de la sucesión (11) obtenida de (1) mediante una ley asociativa, una subsucesión de la sucesión $a_1 + \dots + a_n$ es también $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + \dots + b_n) = s$. La misma proposición 4 de 1 prueba que si la serie (1) es divergente también lo es la (11).

El ejercicio 722 muestra que aplicando una ley asociativa a una serie oscilante se puede cambiar el carácter de la serie.

Se dice que se pasa de la serie (11) a la serie (1) mediante una ley disociativa.

7. Aplicando una ley disociativa se puede alterar el carácter de las series.

DEFINICIÓN 3.—Sea $c(n)$ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ y sea

$$(13) \quad d_1 + d_2 + \dots + d_n + \dots$$

la serie obtenida a partir de la serie (1) mediante la ley:

$$(14) \quad d_n = a_{c(n)} \Leftrightarrow a_n = d_{c^{-1}(n)}$$

La serie (13) se dice que se ha obtenido aplicando a la serie (1) la ley conmutativa $c(n)$.

EJERCICIOS:

723. Aplicar a la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

la ley conmutativa:

$$c(4k) = 2k, \quad c(4k+1) = 6k+1, \quad c(4k+2) = 6k+3, \quad c(4k+3) = 6k+5.$$

724. Aplicar la misma ley conmutativa del ejercicio anterior a la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

725. Demostrar que la serie del ejercicio 723 es oscilante, mientras que la serie obtenida aplicando la ley conmutativa de dicho ejercicio es divergente.

726. Comprobar que la serie

$$0,9 - 0,9 + 0,9 - 0,9 + 0,09 - 0,09 + \dots + 0,09 - 0,09 + 0,009 - 0,009 + \dots + 0,009 - 0,009 + \dots$$

es convergente. Hallar una ley conmutativa que la transforma en una serie divergente.

Los ejercicios anteriores prueban que aplicando determinadas leyes conmutativas a algunas series se puede cambiar su carácter.

DEFINICIÓN 4.—Se llama *suma* de dos series, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, y se re-

presenta por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, a la serie que se obtiene sumando los números que ocupan el mismo lugar en ambas series:

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

EJERCICIO:

727. Sumar las siguientes series:

- a) $(1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots) + (2 + 4 + 6 + \dots + 2n + \dots)$
 b) $(1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots) + (0 - 1 - 2 - \dots - (n-1) - \dots)$
 c) $(1 + 1,1 + 1,11 + \dots) + (0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots)$

8. La serie suma de dos series convergentes es otra serie convergente y su suma es la suma de las sumas de las series sumandos.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + \dots + b_n). \end{aligned}$$

La adición de series es asociativa y conmutativa. El elemento neutro de la adición de series es la serie cuyos términos son todos cero. La serie opuesta de una serie dada es la serie cuyos términos son los opuestos a los términos de la serie dada.

9. El conjunto de todas las series convergentes es, respecto de la adición, un grupo abeliano.

EJERCICIOS:

728. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+b)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}.$

729. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{n!}.$

730. Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3}{n!}.$

DEFINICIÓN 5.—Se llama *producto de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

y se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, a la serie:

$$\begin{aligned} (16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_1 \\ &+ a_3 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 b_4 + a_2 b_4 + a_3 b_4 + a_4 b_1 + a_4 b_2 + a_4 b_3 + a_4 b_4) + \dots \end{aligned}$$

10. *El producto de dos series convergentes es otra serie convergente. La suma de la serie producto es igual al producto de las sumas de las series factores.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Basta observar que

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i.$$

EJERCICIOS:

731. Multiplicar las series $\sum_{n=1}^{\infty} n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2n+1$.

732. Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) + \frac{n-1}{n!} \right]$.

3. Series de términos positivos.—Son aquéllas cuyos términos son todos positivos. Son las más sencillas e importantes, por constituir la base para el estudio de las series generales.

Las series de términos positivos poseen un conjunto de propiedades especiales que simplifican su estudio.

1. *La sucesión de las sumas parciales de una serie de términos positivos es monótona creciente.*

2. *Las series de términos positivos son convergentes o divergentes, pero no oscilantes.*

3. *Las series de términos positivos admiten cualquier ley asociativa.*

4. *Las series de términos positivos admiten cualquier ley disociativa siempre que la serie disociada sea también de términos positivos.*

5. *Las series de términos positivos admiten cualquier ley conmutativa.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $c(n)$ una biyección de N sobre N y sea $d_n = a_{c(n)}$. Sea $\sum_{i=1}^n a_i$ una suma parcial arbitraria de la serie a . Sea $n_1 = \text{máx. } \{c^{-1}(i)\}_{i=1, \dots, n}$. Se verifica que

$$(17) \quad \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^{n_1} d_i.$$

Sea $n_2 = \text{máx. } \{c(i)\}_{i=1, \dots, n_1}$, siendo $n_2 > n_1$, será $n_2 \geq n$ y

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{n_2} d_i \leq \sum_{i=1}^{n_2} a_i.$$

Si la serie a es convergente y si s es su suma, se verifica que, dado un número positivo arbitrario ε , existe un número n' tal que, para todo $n > n'$, es

$$s - \sum_{i=1}^n a_i < \varepsilon.$$

Si n_1 es el número determinado en (17) se verifica que

$$s - \sum_{i=1}^{n_1} d_i \leq s - \sum_{i=1}^n a_i < \varepsilon.$$

Si n_2 es cualquier número mayor que n_1 , se verificará, en virtud de (18),

$$0 \leq s - \sum_{i=1}^{n_2} a_i \leq s - \sum_{i=1}^{n_2} d_i \leq s - \sum_{i=1}^{n_1} d_i \leq s - \sum_{i=1}^n a_i < \varepsilon.$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n d_i = s.$$

De (17) se deduce que si la serie a es divergente también lo es la serie d .

Si Σa_n y Σb_n son dos series de términos positivos, la serie suma

$$\Sigma a_n + \Sigma b_n = \Sigma (a_n + b_n)$$

es también una serie de términos positivos, luego admite la ley disociativa que consiste en suprimir los paréntesis. Por consiguiente:

6. Si Σa_n y Σb_n son dos series de términos positivos se verifica que

$$(19) \quad \Sigma a_n + \Sigma b_n = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n + \dots$$

EJERCICIOS:

733. Calcular el término general y la suma de la serie:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \frac{17}{256} + \dots$$

734. Calcular el término general y la suma de la serie:

$$\frac{15}{6} + \frac{55}{36} + \frac{226}{216} + \frac{979}{1296} + \dots$$

735. Sumar la serie de término general x^n .

4. Criterios de convergencia para las series de términos positivos.—

Dadas dos series de términos positivos:

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

y

$$(2) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

se dice que la serie (2) es *mayorante* de la serie (1) cuando, para todo n , se verifica que $a_n \leq b_n$. En tal caso se dice también que la serie (1) es *minorante* de la serie (2).

1. CRITERIO DE LA MAYORANTE.—Una condición suficiente para que la serie (1) de términos positivos sea convergente es que posea una mayorante convergente. Una condición suficiente para que la serie (1) de términos positivos sea divergente es que posea una minorante divergente.

Basta observar que, en el primer caso, la serie (1) está acotada y como la sucesión de las sumas parciales es monótona, es convergente. En el segundo caso la serie no está acotada.

El criterio de la mayorante permite obtener varios criterios particulares, eligiendo diversas series de carácter conocido como mayorantes o minorantes.

Eligiendo como serie mayorante o minorante una serie geométrica se obtienen los criterios más importantes, por ser los más sencillos, debidos a d'Alembert y Cauchy.

Dada la serie geométrica:

$$(3) \quad 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots, \quad r > 0,$$

las sumas parciales son:

$$s_n = 1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

de donde resulta que, si $0 < r < 1$, es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r},$$

y la serie es convergente, y si $r \geq 1$ la serie es divergente.

Supongamos que la serie geométrica $a r^{n-1}$ sea mayorante de la serie (1), es decir, $a_{n+1} \geq a r^n$. Esto puede conseguirse de los siguientes modos:

I. CRITERIO DE D'ALEMBERT.—Para todo n se verifica $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, de donde $a_{n+1} \leq r a_n$; dando a n valores sucesivos decrecientes hasta 1 y multiplicando miembro a miembro se obtiene $a_{n+1} \leq a_1 r^n$. La condición $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ para todo n puede sustituirse por $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, ya que ésta implica aquélla salvo para un número finito de términos, lo que no influye en las cuestiones de convergencia. Podemos enunciar, por tanto, el siguiente criterio de d'Alembert: *Una condición suficiente para que la serie (1) de términos positivos sea convergente es que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$, la serie es divergente.*

II. CRITERIO DE CAUCHY.—Si $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, para todo n resulta $a_n \leq r^n$. Se obtiene, por tanto: si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, la serie (1) es convergente. Si

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = > 1$, la serie es divergente.

Si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, el criterio de d'Alembert no resuelve el problema de determinar el carácter de la serie. Lo mismo sucede cuando

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$. Cuando se verifican las dos primeras relaciones se dice que se presenta el caso dudoso del criterio de d'Alembert, y cuando se verifican las dos últimas, que se presenta el caso dudoso del criterio de Cauchy.

EJEMPLO.—La serie

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \dots$$

que es, evidentemente, divergente, presenta el caso dudoso tanto con el criterio de d'Alembert como con el de Cauchy, ya que

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = 2.$$

luego

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

El criterio de Cauchy proporciona

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2k+1]{1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2}} = 1.$$

RELACIONES ENTRE LOS CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y CAUCHY.—1. Si existen los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, se verifica que $l = \lambda$. Ya que si se considera la serie

$$(5) \quad a_1 + a_2 a + \dots + a_n a^n + \dots$$

en virtud del criterio de d'Alembert, esta serie será convergente siempre que $a < \frac{1}{l}$, y según el criterio de Cauchy, lo será siempre que $a < \frac{1}{\lambda}$, luego $\frac{1}{l} = \frac{1}{\lambda}$ de donde $l = \lambda$.

Para el caso dudoso del criterio de Cauchy se emplean otras series mayores. Una de éstas es la serie

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-v}.$$

TEOREMA.—Si $\nu > 1$, la serie (6) es convergente, y si $\nu \leq 1$, es divergente.

DEMOSTRACIÓN.—Por ser (6) una serie de términos positivos, se le puede aplicar la siguiente ley asociativa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\nu} = 1 + \left(\frac{1}{2^{\nu}} + \frac{1}{3^{\nu}} \right) + \left(\frac{1}{4^{\nu}} + \frac{1}{5^{\nu}} + \frac{1}{6^{\nu}} + \frac{1}{7^{\nu}} \right) + \dots$$

en donde se asocian un término, dos términos, cuatro términos, ..., 2^i términos, ... Ahora bien,

$$\frac{1}{(2^i)^{\nu}} + \frac{1}{(2^i+1)^{\nu}} + \dots + \frac{1}{(2^{i+1}-1)^{\nu}} < \frac{2^i}{(2^i)^{\nu}} = \frac{1}{(2^i)^{\nu-1}}$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\nu} < 1 + \frac{1}{2^{\nu-1}} + \frac{2}{(2^2)^{\nu-1}} + \dots + \frac{1}{(2^i)^{\nu-1}} + \dots,$$

que es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2^{\nu-1}}$, luego si $\nu > 1$, la serie es convergente. Si $\nu = 1$, la serie es la armónica, que ya hemos visto que es divergente, y si $\nu < 1$, la serie armónica será una minorante de (6), luego (6) será divergente.

CRITERIO III (de Cauchy).—Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} = l \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} = L,$$

se verifica que si $l > 1$ la serie $\sum a_n$ es convergente y si $L < 1$ la serie es divergente.

DEMOSTRACIÓN.—Si $l > 1$ y ε es un número positivo tal que $1 < \nu = l - \varepsilon$, se verifica que existe un número natural m tal que, para todo $n > m$, se verifique que

$$\nu < \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n}$$

de donde:

$$\log n^v < \log \frac{1}{a_n}, \quad n^v < \frac{1}{a_n}, \quad a_n < n^{-v}, \quad v > 1, \quad \forall n > m,$$

luego la serie dada es convergente.

Si $L < 1$, existe un ϵ positivo tal que $L + \epsilon = v < 1$ y existe un número natural m tal que, $\forall n > m$, sea

$$\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} < v,$$

de donde:

$$\log \frac{1}{a_n} < \log n^v, \quad \frac{1}{a_n} < n^v, \quad a_n > n^{-v}, \quad v < 1, \quad \forall n > m,$$

luego la serie dada es divergente.

La serie típica (6) es un caso particular de la siguiente familia de series que pueden tomarse también como tipos:

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log^2 n \dots \log^{r-1} n \cdot (\log^r n)^v},$$

en donde $\log^2 n = \log(\log n)$, ..., $\log^r n = \log(\log^{r-1} n)$. Las series (7) son convergentes para $v > 1$ y divergentes para $v \leq 1$. De (7) se obtiene el siguiente:

CRITERIO LOGARÍTMICO IV.—Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{n \cdot u_n \cdot \log n \dots \log^{r-1} n}}{\log^{r+1} n} = l,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente cuando $l > 1$; divergente cuando $l < 1$, y se presenta el caso dudoso cuando $l = 1$. La demostración es totalmente análoga a la del criterio III.

EJERCICIOS:

736. Averiguar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

737. Averiguar el carácter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_0 + a_1 n + a_2 n^2}.$$

738. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_r n^r}{b_0 + b_1 n + \dots + b_s n^s}$$

es convergente cuando $s > r + 1$, divergente cuando $r + 1 > s$.

739. Averiguar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a n + b}.$$

Las series típicas (6) y (7) permiten obtener otra familia de criterios mediante el siguiente proceso: Sea $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}$ siendo $\alpha_n > 0$ para todo valor de n . Si desde un cierto valor, N , en adelante se verifica que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^v$ siendo $v > 1$, la serie (6) será mayorante de la serie Σu_n y por ser $v > 1$ aquélla será convergente, luego también lo será ésta. Desarrollando esta idea se obtiene el siguiente:

CRITERIO V (de Raabe).—Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n = l$, la serie Σu_n es convergente cuando $l > 1$; divergente cuando $l < 1$, y se presenta el caso dudoso cuando $l = 1$.

Empleando la serie siguiente a la (6) en la familia (7) y procediendo de modo análogo se obtiene el:

CRITERIO VI.—Si a partir de un cierto N en adelante se verifica que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n}}$$

siendo para $n > N$ todas las $\beta_n > 0$, y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \log n = l$ (el log es logaritmo neperiano), la serie Σu_n es convergente cuando $l > 1$; divergente cuando $l < 1$, y se presenta el caso dudoso cuando $l = 1$.

Empleando la serie general de la familia (7) se llega al siguiente:

CRITERIO VII.—Si a partir de un cierto N en adelante se verifica que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} + \dots + \frac{1 + \sigma_n}{n \log n \dots \log^{r-1} n}},$$

siendo $\sigma_n > 0$ para todo $n > N$, y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \log^r n = l$, la serie $\sum u_n$ es convergente cuando $l > 1$; divergente cuando $l < 1$, y se presenta el caso dudoso cuando $l = 1$.

En algunos casos son útiles los siguientes criterios:

CRITERIO VIII.—Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ y si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] = -1 - c$, siendo $c > 0$, la serie $\sum u_n$ es convergente.

CRITERIO IX.—Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{A_1}{n} + B \frac{1}{n^2}$, en donde A_1 no depende de n y B está acotado cuando $n \rightarrow \infty$, se verifica que si $A_1 < -1$ la serie $\sum u_n$ es convergente.

EJERCICIO:

740. Averiguar el carácter de las siguientes series:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{4n+3}{2n+2} \right)^2$
- b) $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \dots \quad (1 < \alpha < \beta)$
- c) $\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \dots \quad (0 < \alpha < \beta < 1)$
- d) $\sum \frac{3n^2 + 4n + 1}{5n^4 + 2n^3 + n^2}$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(\log e^2 \sqrt[3]{2}) \dots (\log e^n \sqrt[n]{n})}$

5. Series de términos reales cualesquiera.—Sea la serie

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

de términos reales arbitrarios. A partir de ella se obtiene la siguiente serie de términos positivos:

$$(2) \quad |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

1. Si la serie (2) es convergente también lo es la serie (1).

DEMOSTRACIÓN.—Por ser (2) convergente, se verifica que dado un número positivo arbitrario, ε , existe un número natural n , tal que, para todo n' y $n'' > n$, se verifica que

$$|u_{n'+1} + \dots + u_{n''}| \leq |u_{n'+1}| + \dots + |u_{n''}| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.—Cuando la serie (2) es convergente la serie (1) se llama *absolutamente convergente*.

Una serie puede ser convergente sin ser absolutamente convergente.

EJERCICIO:

741. Demostrar que la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

es convergente, pero no absolutamente convergente.

2. Las series absolutamente convergentes admiten las leyes asociativa y conmutativa.

DEMOSTRACIÓN.—La ley asociativa la poseen todas las series convergentes. Sea la serie absolutamente convergente (1). Sea $c(n)$ una ley conmutativa y sea $v_n = u_{c(n)}$:

$$(3) \quad v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots;$$

$$(4) \quad |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| + \dots$$

Por ser (2) convergente y por ser (4) el resultado de aplicar a (2) la ley conmutativa $c(n)$, se verifica que (4) es convergente y, por tanto, (3) es absolutamente convergente. Sean s y s' las sumas de (1) y de (3), respectivamente. Vamos a probar que $s = s'$. Sea ε un número positivo arbitrario. Por ser (2) convergente, existe un número natural n_0 tal que, para todo par n' , $n'' > n_0$ se verifica que

$$(5) \quad |u_{n'+1}| + \dots + |u_{n''}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Existen los números naturales n_1 y n_2 tales que:

$$(6) \quad |s - (u_1 + \dots + u_p)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall p > n_1,$$

$$(7) \quad |s' - (v_1 + \dots + v_q)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall q > n_2.$$

Por ser $c(n)$ una biyección de $\mathbb{N}$, existe el número n_3 tal que

$$(8) \quad \{u_1, \dots, u_{n_0+1}\} \subset \{v_1, \dots, v_q\}, \quad \forall q > n_3,$$

sea $q' = \max. (n_2, n_3) + 1$, y sea n_4 un número tal que

$$(9) \quad \{v_1, \dots, v_{q'}\} \subset \{u_1, \dots, u_p\}, \quad p > n_4.$$

Sea $p' = \max. (n_1, n_4, n_0) + 1$. De (5), (6), (7), (8) y (9) resulta:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} |s - s'| \leq |s - (u_1 + \dots + u_{p'})| + |s' - (u_1 + \dots + u_{p'})| \\ < \frac{\varepsilon}{3} + |s' - (v_1 + \dots + v_{q'})| + |u_{\alpha_1}| + \dots + |u_{\alpha_r}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{array} \right.$$

siendo

$$\{u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}\} = \{u_1, \dots, u_{p'}\} - \{v_1, \dots, v_{q'}\}.$$

En virtud de (8) se verifica que $\alpha_1 > n_0, \dots, \alpha_r > n_0$, luego en virtud de (5) es $|u_{\alpha_1}| + \dots + |u_{\alpha_r}| < \frac{\varepsilon}{3}$. De (10) se deduce que $s = s'$.

3. TEOREMA DE RIEMANN.—*Si una serie es convergente, pero no lo es absolutamente, cambiando el orden de los términos se puede obtener una serie convergente cuyo límite sea cualquier número real o una serie divergente o una serie oscilante cuyos límites superior e inferior sean dados.* En efecto, si la serie (1) es convergente, y si S es su suma, pero no es absolutamente convergente, la serie (2) de sus valores absolutos será divergente. Como consecuencia, lo serán también las dos subseries formadas por los términos positivos y los negativos, respectivamente. Sea A un número real cualquiera y ε un número positivo arbitrario.

Todo se reduce a probar que aplicando una cierta ley conmutativa se puede obtener una serie tal que dado un entorno arbitrario de A están contenidas en él todas sus sumas parciales a partir de una de ellas. Para ello con-

sideremos un *filtro de entornos*, esto es un conjunto de entornos de A , $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_n(A)\}$ cuyos radios ϵ_n formen una sucesión nula de números positivos monótona decreciente. A cada $\mathcal{E}_n(A)$ le podemos hacer corresponder otro $\mathcal{E}_n(0)$ de radio $\frac{1}{2}\epsilon_n$. Fuera del entorno $\mathcal{E}_1(0)$ hay un número finito de términos de la serie. Sea $u_{a_1} + \dots + u_{a_s}$ su suma. Si este número es inferior a A , sumando términos positivos, de los infinitos que hay en $\mathcal{E}_1(0)$ se puede alcanzar un número $u_{a_1} + \dots + u_{a_s} + u_{a_{s+1}} + \dots + u_{a_r}$ contenido en $\mathcal{E}_1(A)$. En $\mathcal{E}_1(0) - \mathcal{E}_2(0)$ hay un número finito de términos de la serie: $u_{\beta_1}, \dots, u_{\beta_n}$. Si u_{β_1} es positivo y $u_{a_1} + \dots + u_{a_r} \leq A$, se verifica que $u_{a_1} + \dots + u_{a_r} + u_{\beta_1} \in \mathcal{E}_1(A)$. Si $u_{a_1} + \dots + u_{a_r} > A$, podemos sumar ciertos términos negativos $u_{a_{r+1}} + \dots + u_{a_t}$ de modo que $u_{a_1} + \dots + u_{a_t} \leq A$, con lo que $u_{a_1} + \dots + u_{a_t} + u_{\beta_1} \in \mathcal{E}_1(A)$. Análogamente se procedería si u_{β_1} fuese negativo. Procediendo de este modo con todos los términos $u_{\beta_1}, \dots, u_{\beta_n}$, se obtendría la suma $u_{a_1} + \dots + u_{a_s} + u_{a_{s+1}} + \dots + u_{a_\omega}$ tal que todas las sumas parciales a partir de $u_{a_1} + \dots + u_{a_s}$ están contenidas en $\mathcal{E}_1(A)$. Los términos de la serie dada que no figuran en $u_{a_1} + \dots + u_{a_\omega}$ están todos contenidos en $\mathcal{E}_2(0)$. Procediendo con todos los términos de $\mathcal{E}_2(0) - \mathcal{E}_3(0)$ que no figuren ya en $u_{a_1} + \dots + u_{a_\omega}$, del mismo modo que se ha hecho con $u_{\beta_1}, \dots, u_{\beta_n}$ se obtendría una suma de la forma $u_{a_1} + \dots + u_{a_s} + \dots + u_{a_\omega} + \dots + u_{a_{\omega_1}}$, tal que las sumas parciales a partir de $n \geq s$ pertenecerían a $\mathcal{E}_1(A)$ y las sumas parciales a partir de $n \geq \omega$ pertenecerían a $\mathcal{E}_2(A)$. Así siguiendo, se obtiene una serie $u_{a_1} + \dots + u_{a_\omega} + \dots$ tal que dado un número natural arbitrario, N , a partir de un cierto ω_N todas las sumas parciales estén contenidas en $\mathcal{E}_N(A)$. Como esta sucesión de entornos es un filtro de A , dado un entorno $\mathcal{E}$, arbitrario, de A se puede hallar un entorno de este filtro, contenido en él y, por consiguiente, un número ω_N tal que para todo $m > \omega_N$ se verifique que $u_{a_1} + \dots + u_{a_m} \in \mathcal{E}$, lo que prueba que A es la suma de la serie $u_{a_1} + \dots + u_{a_\omega} + \dots$ y esta serie se ha obtenido aplicando una ley conmutativa a la serie dada. Análogamente, se procede para demostrar los casos de series, divergentes u oscilantes.

Q. E. D.

4. TEOREMA DE DIRICHLET.—*La condición necesaria y suficiente para que una serie convergente posea la propiedad conmutativa es que sea absolutamente convergente.* En efecto, en virtud del teorema 2 la condición es suficiente. Si la serie es convergente, pero no lo es absolutamente, en virtud de 3 no posee la propiedad conmutativa.

5. Si (1) es una serie absolutamente convergente y si

$$(11) \quad p_1 + p_2 + \dots + p_r + \dots,$$

y

$$(12) \quad n_1 + n_2 + \dots + n_r + \dots,$$

son las series formadas por los términos positivos y por los valores absolutos de los términos negativos de (1), respectivamente, se verifica que las series (11) y (12) son convergentes y entre sus sumas se verifica la relación:

$$s\left(\sum_1^{\infty} u_i\right) = s\left(\sum_1^{\infty} p_i\right) - s\left(\sum_1^{\infty} n_i\right)$$

y recíprocamente. En efecto, las series (11) y (12) son subseries de (2), luego la sucesión de las sumas parciales de ésta es mayorante de las sucesiones de las sumas parciales de aquéllas, y como todas son de términos positivos, serán convergentes. Por ser (1) absolutamente convergente tiene la misma suma que la serie $(p_1 - n_1) + (p_2 - n_2) + \dots$, obtenida de (1) aplicando una ley conmutativa seguida de una ley asociativa. Ahora bien, esta última serie es la diferencia de (11) y (12). Recíprocamente, si (11) y (12) son convergentes su diferencia $(p_1 - n_1) + (p_2 - n_2) + \dots$ también lo es. Además, esta serie y la serie $p_1 - n_1 + p_2 - n_2 + \dots$ son absolutamente convergentes, pues dado un número positivo arbitrario, ϵ , siempre se puede hallar n tal que para todo n' y $n'' > n$ se verifique simultáneamente que $p_{n'+1} + \dots + p_{n''} < \frac{\epsilon}{2}$ y $n_{n'+1} + \dots + n_{n''} < \frac{\epsilon}{2}$, luego

$$|p_{n'+1} - n_{n'+1}| + \dots + |p_{n''} - n_{n''}| \leq (p_{n'+1} + \dots + p_{n''}) + (n_{n'+1} + \dots + n_{n''}) < \epsilon.$$

Por ser $p_1 - n_1 + p_2 - n_2 + \dots$ absolutamente convergente se le puede aplicar la ley conmutativa mediante la que se pasa a (1), y la ley asociativa mediante la que se pasa a $(p_1 - n_1) + (p_2 - n_2) + \dots$.

6. Si una de las series (11) y (12) es convergente y la otra divergente, la serie de los valores absolutos es divergente y la serie dada posee la propiedad conmutativa. En efecto, si, p. e., es (11) convergente y (12) divergente, dado un número positivo arbitrario, M , se puede hallar un número m tal que para todo $p > m$ se verifique $|n_1| + \dots + |n_p| = n_1 + \dots + n_p > M$.

Si n es un número natural tal que en (1) el ordinal de todo los números $n_1, \dots, n_p$ sea inferior a n , se verificará que, para todo $q > n$ será $|u_1| + \dots + |u_q| \geq n_1 + \dots + n_p > M$. Si (3) es una serie que se obtiene de (1) aplicando una ley conmutativa, si M es un número positivo arbitrario y si $\sum_1^{\infty} p_i = P$, se puede hallar un número m tal que para todo $p > m$ sea $n_1 + \dots + n_p > M + P$. Si n es un número tal que todos los términos $n_1, \dots, n_m$ ocupen un lugar de ordinal inferior a n en (1) se verificará, para todo $q > n$, que

$$u_1 + \dots + u_q < -(M + P) + A,$$

siendo A la suma de todos los términos positivos del primer miembro y, por tanto, $A \leq P$, de donde $-P + A \leq 0$, luego $-P + A - M \leq -M$.

7. Si las dos series (11) y (12) son divergentes, la serie dada no posee la propiedad conmutativa. Esto es consecuencia inmediata de la demostración de 3.

LEMA DE ABEL.—Si u_n es una sucesión monótona no creciente de términos positivos y si $\sum a_n$ es una serie acotada, siendo A una cota de ella, se verifica que, para todo n , es

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i u_i \right| < A u_1.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $s_i = a_1 + \dots + a_i$. Por hipótesis es

$$(13) \quad |s_i| < A, \quad i = 1, 2, \dots,$$

por consiguiente:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i u_i \right| &= |s_1 u_1 + (s_2 - s_1) u_2 + \dots + (s_n - s_{n-1}) u_n| \\ &= |s_1 (u_1 - u_2) + s_2 (u_2 - u_3) + \dots + s_{n-1} (u_{n-1} - u_n) + s_n u_n| \\ &\leq |s_1| (u_1 - u_2) + |s_2| (u_2 - u_3) + \dots + |s_{n-1}| (u_{n-1} - u_n) + |s_n| u_n \\ &< A (u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + \dots + u_{n-1} - u_n + u_n) = A u_1. \end{aligned}$$

CONSECUENCIAS. I. CRITERIO DE DIRICHLET.—Si u_n es una sucesión nula, monótona no creciente, de términos positivos y si $\sum a_n$ es una serie acotada, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i$ es convergente. En efecto, sea ε un número positivo arbitrario. Por ser u_n una sucesión nula se puede hallar un n tal que para todo

$n' > n$ se verifique $u_{n'} < \frac{\varepsilon}{2A}$ siendo A una cota de la serie Σa_n . Si n' , $n'' > n$ será:

$$\left| \sum_{i=n'+1}^{n''} a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n''} a_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{n'} a_i \right| = 2A,$$

luego, por el lema de Abel

$$\left| \sum_{i=n'+1}^{n''} a_i u_i \right| < 2A u_{n'+1} < \varepsilon, \quad \text{q. e. d.}$$

II. CRITERIO DE ABEL.—Si Σa_n es convergente y si u_n es una sucesión monótona y acotada, la serie $\Sigma a_n u_n$ es convergente. En efecto, u_n posee un límite u . La sucesión $|u - u_n| = v_n$ es nula, monótona no creciente y de términos positivos, luego, por el criterio de Dirichlet, la serie $\Sigma a_n v_n$ es convergente. Si, por ejemplo, es u_n no decreciente, será $v_n = u - u_n$ y $\Sigma a_n v_n = \Sigma a_n u - \Sigma a_n u_n$, de donde $\Sigma a_n u_n = \Sigma a_n v_n - u \Sigma a_n$, y como las dos series del segundo miembro son convergentes, también lo es la del primero.

III. Toda serie de términos alternativamente positivos y negativos, cuyo término general tienda a cero cuando $n \rightarrow \infty$, verificándose que $|u_n| \geq |u_{n+1}|$, es convergente. Es consecuencia inmediata del criterio de Dirichlet.

6. Sumación de series.—El problema de la sumación de series es un problema de cálculo de límites. Vamos a ver algunos procedimientos elementales que permiten hallar la suma de algunas series sencillas.

I. SERIE GEOMÉTRICA.—La serie $\sum_1^{\infty} a_0 r^n$ tiene como suma, según hemos visto, $\frac{a_0}{1-r}$, cuando $0 \leq r < 1$, y es divergente cuando $r \geq 1$. Si $-1 < r < 0$, la serie es convergente en virtud del criterio III del número anterior y su suma es también $\frac{a_0}{1-r}$, como se comprueba sin más que efectuar directamente la división. Si $r < -1$, la serie es divergente hacia ∞ , puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$.

II. DESCOMPOSICIÓN DE UNA SERIE EN SUMA DE OTRAS DOS.—Si la serie dada $\sum_1^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente y se puede descomponer en suma de otras dos convergentes, $u_n = a_n + b_n$, se verifica que

$$S\left(\sum_1^{\infty} u_n\right) = S\left(\sum_1^{\infty} a_n\right) + S\left(\sum_1^{\infty} b_n\right).$$

EJEMPLO.—Sea la serie

$$\sum \frac{2^n + n!}{2^n n!}.$$

Evidentemente,

$$\frac{2^n + n!}{2^n n!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad S\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n!}\right) = e - 1, \quad S\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) = 1,$$

luego

$$S\left(\sum_1^{\infty} \frac{2^n + n!}{2^n n!}\right) = e.$$

III. SERIES ALTERNADAS CUYO TÉRMINO GENERAL TIENDE CONSTANTEMENTE A CERO.—Sea la serie $\sum_1^{\infty} u_i$, en donde $u_{2k+1} > 0$, $u_{2k} < 0$.

En virtud del criterio III del número anterior la serie es convergente. Si S es su suma y si $s_i = u_1 + \dots + u_i$ es la sucesión de sumas parciales, se verificará:

$$s_1 > s_3 > \dots > s_{2k-1} > s_{2k+1} > \dots > S > \dots > s_{2k} > s_{2k-2} > \dots > s_2,$$

por consiguiente, el error cometido al tomar como valor de S la suma s_n es menor que $|u_n|$, pero todavía se puede obtener una acotación mejor ya que dicho error, cuando $n = 2k$ es inferior a

$$|u_{2(k+h)+1} + u_{2(k+h)} + \dots + u_{2k+1}|,$$

para cualquier h , y si $n = 2k - 1$, el error es inferior a

$$|u_{2(k+h)} + \dots + u_{2k}|,$$

para cualquier h .

Una serie alternada y convergente muy importante es

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots$$

cuya suma, según veremos más adelante, es $\log 2$, en donde el logaritmo es neperiano.

EJERCICIOS:

742. Sumar la serie $\sum \frac{1}{(2k-1)2k}$.

743. Calcular con un error inferior a una millonésima la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} + \dots$$

744. Calcular con un error inferior a una millonésima la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

IV. SERIES RECURRENTES.—Una serie de la forma:

$$(14) \quad a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

se llama *recurrente* cuando entre las a_i se verifica una relación del siguiente tipo:

$$(15) \quad q_0 a_p + q_1 a_{p+1} + \dots + q_n a_{p+n} = 0, \quad p = p, p+1, \dots$$

Si una serie recurrente es convergente, su suma es fácil de hallar. En efecto, (15) se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{q_0}{t^p} a_p t^p + \frac{q_1}{t^{p+1}} a_{p+1} t^{p+1} + \dots + \frac{q_n}{t^{p+n}} a_{p+n} t^{p+n} = 0,$$

análogamente, para $p+1, p+2, \dots$, se obtiene

$$(17) \quad \frac{q_0}{t^p} a_{p+1} t^{p+1} + \frac{q_1}{t^{p+1}} a_{p+2} t^{p+2} + \dots + \frac{q_n}{t^{p+n}} a_{p+n+1} t^{p+n+1} = 0$$

.....

Sumando (16) con las infinitas expresiones (17) se obtiene:

$$\frac{q_0}{t^p} \sum_p a_i t^i + \frac{q_1}{t^{p+1}} \sum_{p+1} a_i t^i + \dots + \frac{q_n}{t^{p+n}} \sum_{p+n} a_i t^i = 0,$$

que se puede escribir del siguiente modo:

$$\left(\frac{q_0}{t^p} + \frac{q_1}{t^{p+1}} + \dots + \frac{q_n}{t^{p+n}} \right) \sum_p^{\infty} a_i t^i - \frac{q_1}{t^{p+1}} a_p t^p - \dots - \frac{q_n}{t^{p+n}} (a_p t^p + \dots + a_{p+n-1} t^{p+n-1}) = 0.$$

De donde

$$(18) \quad \sum_p^{\infty} a_i t^i = \frac{\frac{q_1}{t^{p+1}} a_p t^p + \dots + \frac{q_n}{t^{p+n}} (a_p t^p + \dots + a_{p+n-1} t^{p+n-1})}{\frac{q_0}{t^p} + \frac{q_1}{t^{p+1}} + \dots + \frac{q_n}{t^{p+n}}}$$

Sumando a los dos miembros de (18) $\sum_0^{p-1} a_i t^i$, se obtiene la suma de la serie (14).

EJERCICIOS:

745. Sumar la serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2) \dots (n+r)}$

746. Demostrar que al efectuar la división de una función racional se obtiene una serie recurrente.

§ 3. EL NUMERO COMPLEJO

1. El cuerpo de los números complejos.—En el cuerpo de los números reales no es posible extraer la raíz cuadrada de un número negativo, o lo que es lo mismo, el polinomio

$$(1) \quad x^2 + a, \quad a > 0,$$

no posee ninguna raíz en el cuerpo de los números reales. Para conseguir que exista una raíz de estos polinomios es necesario, por tanto, ampliar el cuerpo de los números reales. Ahora bien, la existencia de una raíz de (1) se reduce a la existencia de una raíz de

$$(2) \quad x^2 + 1,$$

ya que, si i es una raíz de (2), se verifica que $i \sqrt{a}$ es raíz de (1). Si i ha de considerarse como número, será preciso que $i \dots i = i^n$ sea también un número y que $b i^n$, siendo b un número real, sea también un número, en donde

con $b i^n$ se representa una operación, llamada multiplicación de un número real por el nuevo número i . Como también se desea que se pueda definir la adición de estos nuevos números, resulta que las expresiones de la forma $a_0 i^0 + a_1 i^1 + \dots + a_n i^n$, en donde las a_i son números reales, han de ser también nuevos números. Es necesario, por tanto, definir las operaciones de adición y de multiplicación con los nuevos números. Para ello consideraremos el anillo de todos los polinomios con coeficientes reales y una indeterminada, que representaremos por $\mathbb{R}[x]$.

Sea $\mathfrak{p} = \mathbb{R}[x] (x^2 + 1)$ el conjunto formado por todos los múltiplos del polinomio $x^2 + 1$:

$$(8) \quad \mathfrak{p} = \mathbb{R}[x] (x^2 + 1) = \{ f(x) (x^2 + 1) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x] \}.$$

1. El conjunto $\mathfrak{p}$ es un ideal primo del anillo $\mathbb{R}[x]$.

DEMOSTRACIÓN.—1) $\mathfrak{p}$ es un ideal. En efecto, si $f(x), g(x) \in \mathfrak{p}$, será

$$f(x) = h(x) (x^2 + 1), \quad g(x) = k(x) (x^2 + 1),$$

de donde

$$f(x) - g(x) = [h(x) - k(x)] (x^2 + 1) \in \mathfrak{p}.$$

Si $f(x) \in \mathfrak{p}$ y $g(x) \in \mathbb{R}[x]$, será $f(x) = h(x) (x^2 + 1)$, de donde:

$$f(x) g(x) = [h(x) g(x)] (x^2 + 1) \in \mathfrak{p}.$$

2) $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. En efecto, sea $f(x) g(x) \in \mathfrak{p}$, $f(x) \notin \mathfrak{p}$. Sea

$$f(x) = q(x) (x^2 + 1) + a + b x, \quad g(x) = p(x) (x^2 + 1) + c + d x.$$

De $f(x) \notin \mathfrak{p}$ se deduce que el vector (a, b) es distinto del vector $(0, 0)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f(x) g(x) &= [q(x) p(x) (x^2 + 1) + q(x) (c + d x) + p(x) (a + b x)] (x^2 + 1) \\ &\quad + a c + (a d + b c) x + b d x^2 \in \mathfrak{p}, \end{aligned}$$

luego, siendo $\mathfrak{p}$ un ideal, se verifica que

$$a c + (a d + b c) x + b d x^2 \in \mathfrak{p}.$$

Ahora bien,

$$a c + (a d + b c) x + b d x^2 = b d (x^2 + 1) + (a d + b c) x + (a c - b d),$$

luego

$$(a d + b c) x + (a c - b d) = 0,$$

de donde

$$(4) \quad \begin{cases} a c - b d = 0, \\ b c + a d = 0. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0,$$

por ser el vector $(a, b) \neq (0, 0)$ y a y b números reales, luego la única solución del sistema (4) es $(c, d) = (0, 0)$ y, por tanto,

$$g(x) = p(x)(x^2 + 1) \in \mathfrak{p}.$$

Se ha visto (3, 2, § 4, Cap. I) que todo ideal $\mathfrak{p}$ de un anillo define en él una relación de igualdad, R , del siguiente modo:

$$(5) \quad f(x) R g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \in \mathfrak{p}.$$

2. La relación de igualdad R es permutable con las operaciones del anillo, esto es, se verifica que

$$(6) \quad \begin{cases} f(x) R g(x) \\ h(x) R k(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f(x) + h(x)) R (g(x) + k(x)), \\ f(x) h(x) R g(x) k(x). \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(x) R g(x) \\ h(x) R k(x) \end{cases} \\ & \quad \Updownarrow \\ & \begin{cases} f(x) - g(x) \in \mathfrak{p} \\ h(x) - k(x) \in \mathfrak{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + h(x) - (g(x) + k(x)) \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow (f(x) + h(x)) R (g(x) + k(x)), \\ f(x) h(x) - g(x) k(x) \in \mathfrak{p} \Rightarrow \begin{cases} f(x) h(x) = g(x) k(x) + M(x) \\ M(x) = g(x) n + k(x) m + m n \in \mathfrak{p} \end{cases} \end{cases} \\ & \quad \Downarrow \\ & f(x) h(x) R g(x) k(x). \end{aligned}$$

Sea $\mathbb{C} = R[x]/\mathfrak{p}$ el conjunto cociente respecto de la relación de igualdad R definida por $\mathfrak{p}$.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *suma* de la clase $f(x) + \mathfrak{p}$ y la clase $g(x) + \mathfrak{p}$, y se representa por $(f(x) + \mathfrak{p}) + (g(x) + \mathfrak{p})$, a la siguiente clase:

$$(7) \quad (f(x) + \mathfrak{p}) + (g(x) + \mathfrak{p}) = f(x) + g(x) + \mathfrak{p}.$$

Se llama *producto* de la clase $f(x) + \mathfrak{p}$ por la clase $g(x) + \mathfrak{p}$, y se representa por $(f(x) + \mathfrak{p})(g(x) + \mathfrak{p})$, a la clase:

$$(8) \quad (f(x) + \mathfrak{p})(g(x) + \mathfrak{p}) = f(x)g(x) + \mathfrak{p}.$$

Por ser la relación de igualdad definida por $\mathfrak{p}$ permutable con las operaciones de adición y multiplicación de $R[x]$, el conjunto cociente $\mathbb{C}$, respecto de las operaciones (7) y (8), es un anillo.

EJERCICIOS:

747. ¿Cuál es la clase cero de $\mathbb{C}$? ¿Cuál es la clase opuesta a la clase $f(x) + \mathfrak{p}$? ¿Cuál es la clase unidad de $\mathbb{C}$?

748. Comprobar la igualdad de las dos clases siguientes: $3x^3 - 2x^2 + x - 1 + \mathfrak{p} = -2x + 1 + \mathfrak{p}$.

749. Comprobar que

$$\begin{aligned} (a + bx + \mathfrak{p}) + (c + dx + \mathfrak{p}) &= (a + c) + (b + d)x + \mathfrak{p}, \quad (a + bx + \mathfrak{p})(c + dx + \mathfrak{p}) \\ &= ac - bd + (ad + bc)x + \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

3. Se puede elegir como representante de toda clase de $\mathbb{C}$ un polinomio de grado inferior a dos.

DEMOSTRACIÓN.—Sea la clase $f(x) + \mathfrak{p}$. Dividiendo $f(x)$ por $x^2 + 1$ se obtiene:

$$f(x) = (x^2 + 1)q(x) + a + bx, \quad \text{grad.}(a + bx) < 2,$$

y

$$\begin{aligned} f(x) + \mathfrak{p} &= (x^2 + 1)q(x) + a + bx + \mathfrak{p} \\ &= ((x^2 + 1)q(x) + \mathfrak{p}) + (a + bx + \mathfrak{p}) = a + bx + \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

4. El conjunto $\mathbb{C}$, respecto de las operaciones (7) y (8), es un cuerpo.

DEMOSTRACIÓN.—Queda únicamente por probar que todo elemento, $f(x) + \mathfrak{p}$, de $\mathbb{C}$, distinto del elemento cero, posee inverso. Sea $f(x) + \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}$, esto es, $f(x) \notin \mathfrak{p}$. Eligiendo un representante de grado inferior a dos, sea

$$(9) \quad f(x) + \mathfrak{p} = a + bx + \mathfrak{p}, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Sea $c + dx + \mathfrak{p}$ otra clase tal que:

$$(a + bx + \mathfrak{p})(c + dx + \mathfrak{p}) = 1 + \mathfrak{p},$$

de donde:

$$ac - bd + (ad + bc)x + p = 1 + p,$$

y

$$ac - bd - 1 + (ad + bc)x \in p$$

pero, como todos los polinomios de p son múltiplos de $x^2 + 1$, será

$$ac - bd - 1 + (ad + bc)x = 0,$$

de donde:

$$(10) \quad \begin{cases} ac - bd = 1, \\ bc + ad = 0. \end{cases}$$

Por ser $(a, b) \neq (0, 0)$ se verifica que

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0.$$

Luego el sistema (10) tiene la única solución:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Luego la inversa de la clase (9) es la clase:

$$(a + bx + p)^{-1} = \frac{a - bx}{a^2 + b^2} + p.$$

DEFINICIÓN 2.—El cuerpo $\mathbb{C}$ se llama *cuerpo de los números complejos* y a sus clases se les denomina *números complejos*. Cada clase se representa mediante el polinomio de menor grado posible y es costumbre emplear la notación $a + bi$ para representar a la clase $a + bx + p$. La expresión $a + bi$ se denomina *expresión binómica del número complejo*.

Empleando la notación binómica de los números complejos resulta el siguiente teorema:

$$5. \quad a + bi = c + di \iff a = c, b = d.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} a + bi = c + di &\iff a + bx + p = c + dx + p \iff a - c \\ &+ (b - d)x \in p \iff a - c = 0, b - d = 0. \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

750. Comprobar que, con la notación binómica, las operaciones con números complejos son:

$$a) (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i.$$

$$b) (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i.$$

$$c) (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

$$d) (a + bi) : (c + di) = (a + bi)(c + di)^{-1} = (a + bi) \frac{c - di}{c^2 + d^2} \\ = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

751. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^2 + a = 0$, $a > 0$.

$$752. \text{ Calcular } (2 - i)(1 + i) - \frac{1 + 2i}{1 - i}.$$

$$753. \text{ Calcular } \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^8.$$

6. La correspondencia $j(a) = a + \mathfrak{p}$, siendo a un número real, es un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN.—Evidentemente es j una aplicación.

$$j(a + b) = a + b + \mathfrak{p} = (a + \mathfrak{p}) + (b + \mathfrak{p}) = j(a) + j(b), \quad j(ab) = ab + \mathfrak{p} \\ = (a + \mathfrak{p})(b + \mathfrak{p}) = j(a) \cdot j(b). \quad j(a) = \mathfrak{p} \Rightarrow a + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \Leftrightarrow a \in \mathfrak{p} \Rightarrow a = 0.$$

Como consecuencia del teorema anterior, $\mathbb{R}$ es isomorfo a un subcuerpo, $\bar{\mathbb{R}}$ del cuerpo de los números complejos. En lo que sigue identificaremos estos dos cuerpos, esto es, pondremos $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$, lo que equivale a poner $a = a + \mathfrak{p}$, para todo número real a , o bien, empleando la notación binómica, pondremos $a = a + i0$.

7. Sea V_2 el plano vectorial real: $V_2 = \{(x, y)\}$, x, y , números reales. La correspondencia:

$$(11) \quad \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} V_2: \quad \varphi(x + iy) = (x, y)$$

es un isomorfismo del grupo aditivo de $\mathbb{C}$ sobre el grupo aditivo de V_2 .

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de 5 la correspondencia φ es una aplicación.

$$\varphi[(x + iy) + (x' + iy')] = \varphi[x + x' + i(y + y')] = (x + x', y + y') = (x, y)$$

$$\therefore (x', y') = \varphi(x + iy) + \varphi(x' + iy'). \quad \varphi(x + iy) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow x + iy = 0 + i0.$$

La multiplicación de números complejos da lugar, en virtud de la identificación de $\bar{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$, a la siguiente multiplicación de un número real por un número complejo:

$$(12) \quad a(x + iy) = ax$$

En virtud de (12), el conjunto de los números complejos es, respecto de la adición y de la multiplicación por números reales, un espacio vectorial real. Se verifica el siguiente teorema:

8. *La correspondencia φ definida en (11) es un isomorfismo del espacio vectorial real de los números complejos sobre el plano vectorial real V_2 .*

DEMOSTRACIÓN.—En virtud de 7 basta probar que

$$\varphi[a(x + iy)] = a\varphi(x + iy),$$

En efecto,

$$\varphi[a(x + iy)] = \varphi[ax + iay] = (ax, ay) = a(x, y) = a\varphi(x + iy).$$

En virtud de 8, los números complejos pueden representarse mediante vectores del plano vectorial real V_2 : $a + ib \longleftrightarrow (a, b)$. La expresión (a, b) se llama expresión vectorial del número complejo $a + ib$.

OBSERVACIÓN.—Téngase mucho cuidado en no identificar los números complejos con los vectores del plano vectorial real, ya que el conjunto $\mathbb{C}$ posee, además de las operaciones de adición y multiplicación por números reales, respecto de las cuales es un espacio vectorial real de dimensión dos, otra operación: la multiplicación de números complejos, que no la poseen los vectores.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *módulo de un número complejo* $z = x + iy$, y se representa por $|z| = |x + iy|$, al módulo del vector correspondiente al número complejo en el isomorfismo φ de 8.

Por consiguiente:

$$(13) \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Al cuadrado del módulo de un número complejo se le llama *norma* del número complejo, y se representa por $\|x + iy\|$.

Por consiguiente:

$$(14) \quad \|x + iy\| = x^2 + y^2.$$

El módulo (la norma) es una aplicación de $\mathbb{C}$ en el conjunto de los números reales no negativos, que posee las siguientes propiedades:

9. I. $|x + iy| = 0 \iff x + iy = 0$ ($\|x + iy\| = 0 \iff x + iy = 0$).

II. $|(x + iy) + (x' + iy')| \leq |x + iy| + |x' + iy'|$ ($\|(x + iy) + (x' + iy')\| \leq \|x + iy\| + \|x' + iy'\|$).

III. $|a(x + iy)| = |a| |x + iy|$ ($\|a(x + iy)\| = a^2 \|x + iy\|$).

DEMOSTRACIÓN.—I. $|x + iy| = 0 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0, y = 0$.

II. Sea $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}' = (x', y')$. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ no son proporcionales, se verifica que $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ para todo λ , luego $(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}')^2 \neq 0$ para todo λ , pero

$$(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}')^2 = \mathbf{x}^2 + 2(\mathbf{x} \mathbf{x}')\lambda + \mathbf{x}'^2 \lambda^2,$$

de donde

$$(15) \quad (\mathbf{x} \mathbf{x}')^2 - \mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{x}'^2 < 0, \quad |\mathbf{x} \mathbf{x}'| < |\mathbf{x}| |\mathbf{x}'|,$$

luego

$$|\mathbf{x} + \mathbf{x}'|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{x}')^2 = \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} \mathbf{x}' + \mathbf{x}'^2 \leq \mathbf{x}^2 + 2|\mathbf{x} \mathbf{x}'| + \mathbf{x}'^2 \\ < |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| |\mathbf{x}'| + |\mathbf{x}'|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{x}'|)^2,$$

de donde

$$|\mathbf{x} + \mathbf{x}'| < |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}'|.$$

Si $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, se verifica que $|\mathbf{x} + \mathbf{x}'| = |\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x}| = |1 + \lambda| |\mathbf{x}|$. Si $1 + \lambda \geq 0$, es $|1 + \lambda| = 1 + \lambda$ y $|1 + \lambda| |\mathbf{x}| = (1 + \lambda) |\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| + \lambda |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x}| + |\lambda \mathbf{x}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}'|$. Si $1 + \lambda \leq 0$, se verifica que $|1 + \lambda| = -1 - \lambda$, luego $|1 + \lambda| |\mathbf{x}| = (-1 - \lambda) |\mathbf{x}| = -|\mathbf{x}| + (-\lambda) |\mathbf{x}| = -|\mathbf{x}| + |\lambda \mathbf{x}| = -|\mathbf{x}| + |\lambda \mathbf{x}| < |\mathbf{x}| + |\lambda \mathbf{x}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}'|$.

III. $|a(x + iy)| = |ax + iay| = \sqrt{a^2 x^2 + a^2 y^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |a| |x + iy|$.

Fijado un punto O en el plano euclídeo existe una biyección ψ entre el espacio vectorial V_2 de dimensión dos y el conjunto de los puntos del plano euclídeo E_2 :

$$(16) \quad V_2 \xrightarrow{\psi} E_2: \quad \psi(\mathbf{x}) = X, \quad \overrightarrow{[OX]} = \mathbf{x}.$$

Por consiguiente, el producto $\psi \varphi$ establece una biyección de $\mathbb{C}$ sobre E_2 . Al punto X correspondiente al número complejo $x + iy$ en la biyección $\psi \varphi$ se le llama *afijo* del número complejo $x + iy$.

EJERCICIO:

754. Representar gráficamente los afijos de los siguientes números complejos: $1 + 2i$, $3 + 2i$, $2 - i$, i , $-i$, $-1 - 2i$, $-2 + i$, $(1 + 2i) - (-2 + i)$.

Empleando un sistema de coordenadas polares en el plano, cuyo polo sea el punto O y cuyo eje polar sea la semirrecta real positiva, cada afijo de un número complejo $x + iy$ (fig. 88) se puede representar por sus coordenadas polares $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, k variable entera, ρ es el módulo del número complejo $x + iy$: $\rho = |x + iy|$ y $\varphi + 2k\pi$ se llaman sus *argumentos*. Al argumento φ tal que $0 \leq \varphi < 2\pi$ se le llama argumento *principal*. A $(\rho, \varphi + 2k\pi)$ se le llama *expresión módulo-argumental de un número complejo*.

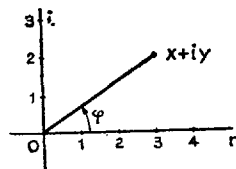


Fig. 88.

EJERCICIOS:

755. Hallar las expresiones módulo-argumentales de los siguientes números complejos:

$$\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i.$$

756. Hallar la expresión binómica de los siguientes números complejos:

$$\left(4, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \left(4, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \left(4, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \left(4, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

El número complejo $(\rho, \varphi + 2k\pi)$ se puede expresar en forma binómica del siguiente modo:

$$(17) \quad (\rho, \varphi + 2k\pi) = \rho \cos \varphi + \rho \operatorname{sen} \varphi i = \rho (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi i).$$

A la expresión $\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ de un número complejo se le llama *expresión trigonométrica* del número complejo.

La expresión módulo-argumental de un número complejo es la más cómoda para la multiplicación de números complejos. En efecto, sean los números complejos

$$(\rho, \varphi + 2k\pi) \quad \text{y} \quad (\rho', \varphi' + 2k'\pi),$$

se verifica:

$$(18) \quad \begin{cases} [\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)] [\rho' (\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi')] = (\rho \cos \varphi + i \rho \operatorname{sen} \varphi) (\rho' \cos \varphi' + i \rho' \operatorname{sen} \varphi') \\ = \rho \rho' \cos \varphi \cos \varphi' + i \rho \rho' \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + i \rho \rho' \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi' + i^2 \rho \rho' \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi' \\ = \rho \rho' [(\cos \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi') + i (\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi')] \\ = \rho \rho' [\cos (\varphi + \varphi') + i \operatorname{sen} (\varphi + \varphi')]. \end{cases}$$

de donde:

10. El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos de los factores y su argumento es igual a la suma de los argumentos:

$$(19) \quad (\rho, \varphi + 2k\pi) (\rho', \varphi' + 2k\pi) = (\rho \rho', \varphi + \varphi' + 2k\pi),$$

o bien, empleando la notación (13) para los módulos:

$$(20) \quad |(a + ib)(c + id)| = |a + ib| |c + id|.$$

EJERCICIOS:

757. Dados los números complejos $z = \left(5, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $z' = \left(2, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, calcular $z z'$, z^3 , $\frac{1}{z'}$, $\frac{z}{z'}$.

758. Estudiar la correspondencia entre los afijos de los números complejos z y z' correspondiente a la aplicación $z' = z + a$, siendo a un número complejo fijo.

759. Estudiar la correspondencia entre los afijos de los números complejos z y z' , correspondientes en la aplicación de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ definida por $z' = az$, siendo a un número real.

760. Estudiar la correspondencia entre los afijos de los números complejos z y z' homólogos en la aplicación de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ definida por $z' = az$, siendo $a = (1, \varphi + 2k\pi)$ un número complejo fijo de módulo unidad.

761. Estudiar la correspondencia entre los afijos de los números complejos z y z' definida por la aplicación $z' = az$, siendo a un número complejo de módulo distinto de la unidad.

762. Estudiar la correspondencia entre el afijo de z y el de z' definida por la aplicación $z z' = 1$.

763. Hallar la expresión de todos los números complejos cuyos afijos están en la recta determinada por O y el afijo de a .

764. Hallar todos los números complejos cuyos afijos están en la recta determinada por los afijos de los números complejos b y c .

765. Hallar todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia determinada por los afijos de los números complejos a , b y c .

2. Potenciación de los números complejos.—I. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE NATURAL. Se define la potencia de exponente natural, n , de un número complejo, por

$$(21) \quad z^n = \overbrace{z \cdot z \cdots z}^n.$$

De esta definición y de las propiedades de la multiplicación de números complejos, se deduce que *la potenciación de exponente natural de un número complejo posee las cinco leyes de exponentes de la potenciación de los números reales.*

Sea el número complejo $z = (\rho, \varphi + 2k\pi)$. La fórmula (18) proporciona:

$$(22) \quad z^2 = [\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^2 = \rho^2 [\cos (2\varphi) + i \operatorname{sen} (2\varphi)].$$

Supongamos demostrada la fórmula:

$$z^{n-1} = \rho^{n-1} [\cos (n-1)\varphi + i \operatorname{sen} (n-1)\varphi].$$

Se verifica que:

$$(23) \quad z^n = z^{n-1} z = \rho^n [\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi].$$

La fórmula (23) se conoce con el nombre de fórmula de *Moivre*.

II. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE ENTERO.—Si n es un entero positivo se define z^n por (21). Si $-n$ es un entero negativo, se define:

$$(24) \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}. \quad \text{Si } n = 0, \text{ se define } z^0 = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

De esta definición resulta que *la potenciación de exponente entero posee las cinco leyes de exponentes de la potenciación de números reales.*

De (24), (23) y las propiedades de la división, resulta:

$$(25) \quad z^{-n} = \frac{1}{\rho^n [\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi]} = \rho^{-n} [\cos (-n\varphi) + i \operatorname{sen} (-n\varphi)] \\ = \rho^{-n} [\cos (n\varphi) - i \operatorname{sen} (n\varphi)].$$

III. RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.—Se llama raíz n -ésima, siendo n un número natural, del número complejo

$$z = \rho (\cos (\varphi + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (\varphi + 2k\pi)),$$

a todo número complejo, w , tal que $w^n = z$.

Sea $w = r (\cos (\omega + 2 h \pi) + i \operatorname{sen} (\omega + 2 h \pi))$ una raíz n -ésima de z . De la definición y de la fórmula de Moivre se deduce:

$$w^n = r^n (\cos (n \omega + 2 h \pi) + i \operatorname{sen} (n \omega + 2 h \pi)) = \rho (\cos (\varphi + 2 k \pi) + i \operatorname{sen} (\varphi + 2 k \pi)),$$

de donde:

$$r^n = \rho, \quad n \omega = \varphi + 2 k \pi,$$

luego:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \omega = \frac{\varphi + 2 k \pi}{n}$$

Como k es una variable entera, resulta que ω puede tomar los siguientes valores distintos:

$$\omega_1 = \frac{\varphi}{n}, \quad \omega_2 = \frac{\varphi + 2 \pi}{n}, \quad \dots, \quad \omega_n = \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

1. *Todo número complejo posee n raíces n -ésimas distintas. Todas ellas tienen el mismo módulo: la raíz n -ésima del módulo del número complejo dado, y sus argumentos forman una progresión aritmética de razón $\frac{2\pi}{n}$, cuyo primer término es la n -ésima parte del argumento del número complejo dado.*

COROLARIO.—*Los afijos de las raíces n -ésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia cuyo radio es la raíz n -ésima del módulo del número complejo.*

766. Calcular las raíces de los siguientes números complejos y representar gráficamente sus afijos: a) $\sqrt[3]{1}$. b) $\sqrt[3]{-1}$. c) $\sqrt[4]{1}$. d) $\sqrt[5]{1}$. e) $\sqrt[8]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

767. Si $\zeta_i = \left(1, \frac{2i\pi}{5}\right)$ $i = 0, \dots, 4$ son las cinco raíces quintas de la unidad, comprobar que forman un grupo multiplicativo que no posee más subgrupo propio que $\{\zeta_0\}$.

768. Si $\zeta_i = \left(1, \frac{2i\pi}{12}\right)$ $i = 0, \dots, 11$ son las raíces duodécimas de la unidad: a) Ver que forman un grupo multiplicativo. b) Hallar todos los elementos que engendran al grupo. c) Hallar los subgrupos.

2. *El conjunto de todas las raíces n -ésimas de la unidad forman un grupo multiplicativo G isomorfo al grupo aditivo $Z/(n)$, siendo Z el grupo aditivo de los números enteros. Si q es un divisor de n , el subconjunto de G formado*

por todas las raíces de G cuyos argumentos son múltiplos de $\frac{2\pi}{q}$ forman un subgrupo de G de orden $p = \frac{n}{q}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$\zeta_i = \left(1, \frac{2i\pi}{n}\right) \quad i = 0, \dots, n-1.$$

La correspondencia $\zeta_i \rightarrow i + (n)$ es un isomorfismo de G sobre $Z/(n)$. La segunda parte es consecuencia inmediata de la primera.

Si G es el grupo multiplicativo de las raíces n -ésimas de la unidad, a las raíces n -ésimas de la unidad que son generadores de G se les llama *raíces primitivas n -ésimas de la unidad*.

EJERCICIOS:

- 769. Hallar las raíces primitivas cuartas de la unidad.
- 770. Hallar las raíces primitivas vigésimas de la unidad.
- 771. Hallar un polinomio cuyas raíces sean las raíces primitivas cuartas de la unidad.
- 772. Hallar un polinomio cuyas raíces sean las raíces primitivas cúbicas de la unidad.
- 773. Hallar un polinomio cuyas raíces sean las raíces primitivas p -ésimas de la unidad, siendo p un número primo.

IV. POTENCIACIÓN DE EXPONENTE RACIONAL DE UN NÚMERO COMPLEJO.—Se define la potenciación de exponente racional $\frac{m}{n}$, siendo m entero y n entero positivo, del siguiente modo:

$$(26) \quad z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m.$$

De esta definición resulta que la potenciación de exponente racional no es uniforme. De (26) y de la proposición 1 se deduce que, si $z = (\rho, \varphi + 2k\pi)$, y $\frac{m}{n} > 0$,

$$(27) \quad z^{\frac{m}{n}} = \left(\rho^{\frac{m}{n}}, \frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n}\right).$$

Si $r = \frac{-m}{n}$, siendo m y n enteros positivos, será:

$$\begin{aligned} z^r &= z^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{z^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\left(\rho^{\frac{m}{n}}, \frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n}\right)} = \frac{\left(\rho^{\frac{m}{n}}, -\frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n}\right)}{\rho^{\frac{m}{n}}} \\ &= \left(\rho^{-\frac{m}{n}}, -\frac{m(\varphi + 2k\pi)}{n}\right) = (\rho^r, r(\varphi + 2k\pi)), \end{aligned}$$

luego la fórmula:

$$(28) \quad z^r = (\rho^r, r(\varphi + 2k\pi)), \quad r = \frac{m}{n},$$

es válida para cualquier exponente racional r .

3. a) Si r es un número racional y $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, se verifica que $z^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{m'}{n'}}$. b) Si r y s son números racionales se verifica que $z^r z^s = z^{r+s}$. c) $\frac{z^r}{z^s} = z^{r-s}$. d) $(z^r)^s = z^{rs}$. e) $z^r w^r = (zw)^r$. f) $\frac{z^r}{w^r} = \left(\frac{z}{w}\right)^r$

DEMOSTRACIÓN.—a) $z^{\frac{m}{n}} = (\rho^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi))$. Ahora bien, de $mn' = m'n$ se deduce que $mn'k = m'nk$, siendo k una variable entera, de donde $\frac{m}{n}k = \frac{m'}{n'}k$, siendo k una variable entera, luego el conjunto $\left\{\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi)\right\}$, cuando k recorre el conjunto de los números enteros, es igual al conjunto $\left\{\frac{m'}{n'}(\varphi + 2k\pi)\right\}$, cuando k recorre el conjunto de los números enteros.

$$\text{b) } z^r z^s = (\rho^r, r(\varphi + 2k\pi)) (\rho^s, s(\varphi + 2k\pi)) = (\rho^{r+s}, (r+s)(\varphi + 2k\pi)) = z^{r+s}.$$

$$\text{c) } \frac{z^r}{z^s} = \frac{(\rho^r, r(\varphi + 2k\pi))}{(\rho^s, s(\varphi + 2k\pi))} = (\rho^{r-s}, (r-s)(\varphi + 2k\pi)) = z^{r-s}.$$

$$\text{d) } (z^r)^s = (\rho^r, r(\varphi + 2k\pi))^s = (\rho^{rs}, rs(\varphi + 2k\pi)) = z^{rs}.$$

$$\text{e) } z^r w^r = (\rho^r, r(\varphi + 2k\pi)) (\rho^{r'}, r'(\varphi' + 2l\pi)) = ((\rho\rho')^r, r(\varphi + \varphi' + 2l\pi)) = (zw)^r.$$

Análogamente f).

(Obsérvese que, al no ser la potenciación de exponente racional uniforme, las igualdades anteriores tienen el significado de que el conjunto de números del primer miembro es igual al conjunto de números del segundo miembro.)

EJERCICIOS:

774. Calcular $z^{\frac{2}{3}}$ y $z^{\frac{4}{6}}$.

775. Demostrar que la correspondencia $x + iy \rightarrow x - iy$ es un automorfismo de $\mathbb{C}$, llamado automorfismo de conjugación.

3. Topología en el cuerpo de los números complejos.—El módulo de un número complejo es una aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}^+$, que permite definir una topología en $\mathbb{C}$, a partir de los entornos, de un modo totalmente análogo al seguido en el cuerpo de los números reales.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *entorno* de radio ϵ , siendo ϵ un número real positivo, de un número complejo a , y se representa por $E_\epsilon(a)$, al conjunto de todos los números complejos z tales que $|z - a| < \epsilon$.

Los afijos de los números del entorno de un número complejo forman (fig. 19) un círculo sin la circunferencia.

Un *abierto* es la unión de un número finito o infinito de entornos.

Los abiertos de números complejos poseen las mismas propiedades de los abiertos de números reales.

Las definiciones de número adherente, número de acumulación, adherencia de un conjunto, conjunto cerrado, conjunto compacto, etc., son las mismas que en el caso de los números reales.

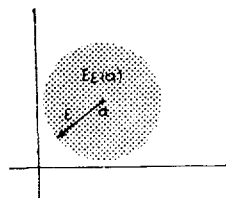


Fig. 89.

DEFINICIÓN 2.—Se llama *sucesión de números complejos* a toda aplicación z_n del conjunto de los números naturales en el cuerpo de los números complejos. Una sucesión de números complejos es *convergente* cuando dado un número positivo arbitrario, ϵ , existe un número natural, n , tal que para todo n' y $n'' > n$, sea $|z_{n'} - z_{n''}| < \epsilon$. Una sucesión de números complejos es *divergente* cuando dado un número positivo arbitrario, m , existe un número natural, n , tal que, para todo $n' > n$, sea $|z_{n'}| > m$. Las sucesiones que no son convergentes ni divergentes se llaman *oscilantes*. Se dice que a es el *límite* de la sucesión z_n , y se escribe: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, cuando, dado un número positivo arbitrario, ϵ , existe un n , tal que, para todo $n' > n$ se verifica $|a - z_{n'}| < \epsilon$.

Dada la sucesión $z_n = x_n + i y_n$ de números complejos, se obtienen a partir de ella tres sucesiones de números reales: x_n , y_n , $|z_n|$.

1. Si z_n es convergente lo son también x_n , y_n y $|z_n|$.

DEMOSTRACIÓN.—De

$$|z_{n'} - z_{n''}| = \sqrt{(x_{n'} - x_{n''})^2 + (y_{n'} - y_{n''})^2} \geq \sqrt{(x_{n'} - x_{n''})^2} = |x_{n'} - x_{n''}|,$$

se deduce que la convergencia de z_n implica la de x_n , y, análogamente, la de y_n . Ahora bien, de $|a + b| \leq |a| + |b|$, poniendo $a + b = c$, se deduce que $|a - c| \geq |c| - |a|$; luego,

$$||z_{n'}| - |z_{n''}|| \leq |z_{n'} - z_{n''}|$$

expresa que la convergencia de z_n implica la convergencia de $|z_n|$.

2. Si x_n e y_n son convergentes, z_n es convergente.

DEMOSTRACIÓN.—Si ε es un número positivo arbitrario, existe un n tal que, para todo n' y n'' mayores que n se verifique que $|x_{n'} - x_{n''}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $|y_{n'} - y_{n''}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, de donde: $|z_{n'} - z_{n''}| = \sqrt{(x_{n'} - x_{n''})^2 + (y_{n'} - y_{n''})^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Toda sucesión convergente de números complejos posee límite, esto es, el cuerpo de los números complejos es completo.

DEMOSTRACIÓN.—La primera igualdad es consecuencia de

$$|a + i b - (x_n + i y_n)| = |a - x_n + i(b - y_n)| = \sqrt{(a - x_n)^2 + (b - y_n)^2}.$$

La segunda proposición es consecuencia de la primera y de la compleción del cuerpo de los números reales.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *serie de números complejos* a toda expresión de la forma:

$$(1) \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots,$$

en donde z_i , $i = 1, \dots$, son números complejos. A partir de la expresión (1) se obtiene la sucesión:

$$(2) \quad s_n = z_1 + \dots + z_n.$$

Si s_n es convergente, divergente, oscilante, se dice que (1) es, respectivamente, *convergente*, *divergente*, *oscilante*. Si (1) es convergente, al límite de (2) se le llama suma de (1):

$$(3) \quad \text{suma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + \dots + x_n).$$

4. Si s y s' son las sumas de las series:

$$(4) \quad x_1 + \dots + x_n + \dots, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots,$$

respectivamente, se verifica que

$$\text{suma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i \right) = s + i s'.$$

A partir de (1) se obtiene la siguiente serie de términos positivos:

$$(5) \quad |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$$

5. La convergencia de (5) implica la convergencia de (1), pero no recíprocamente.

Si la serie (5) es convergente la serie (1) se llama *absolutamente convergente*.

EJERCICIOS:

776. Calcular la suma de la serie

$$1 + (a + i b) + \left(\frac{a^2}{2} + i \frac{b^2}{2} \right) + \dots + \left(\frac{a^n}{n!} + i \frac{b^n}{n!} \right) + \dots$$

777. Demostrar que la serie:

$$1 + (a + i b) + \frac{(a + i b)^2}{2} + \dots + \frac{(a + i b)^n}{n!} + \dots$$

es convergente.

Al número suma de la serie:

$$(6) \quad 1 + (x + i y) + \frac{(x + i y)^2}{2} + \dots + \frac{(x + i y)^n}{n!} + \dots$$

se le representa por

$$(7) \quad e^{x+iy},$$

esto es, se define:

$$e^{x+iy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2} + \dots + \frac{(x+iy)^n}{n!} \right].$$

Por ser (6) absolutamente convergente, la definición de producto de series es equivalente a la siguiente:

$$(8) \quad (u_1 + \dots + u_n + \dots)(v_1 + \dots + v_n + \dots) = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots \\ + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots$$

Como consecuencia, se verifica que

$$1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2} + \dots + \frac{(x+iy)^n}{n!} + \dots \\ = \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) \left(1 + iy + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots \right),$$

de donde, teniendo en cuenta (7):

$$(9) \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

§ 4. TOPOLOGÍA DEL ESPACIO EUCLIDEO

1. El espacio euclídeo.

DEFINICIÓN 1.—Si se admite el siguiente postulado, se dice que la recta es una *recta real*:

POSTULADO DE CONTINUIDAD DE LA RECTA.—Si $\mathbb{R} = \{O; u\}$ es un sistema de referencia en la recta, existe una biyección entre los puntos de la recta y el cuerpo de los números reales, en la que a cada punto le corresponde su abscisa respecto de $\mathbb{R}$.

En lo sucesivo supondremos que se verifica este postulado, por lo que podremos usar como términos equivalentes los de punto de una recta y número real.

DEFINICIÓN 2.—Sea $V_n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, el espacio vectorial real n -dimensional. El conjunto V_n se llama *espacio euclídeo real n -dimensional*, y se representa por E_n , cuando se define la dependencia lineal del siguiente modo:

$$(1) \quad \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \text{ son l. d.} \iff \begin{cases} \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0, \end{cases}$$

no siendo cero todas las λ_i . Cuando se toma como definición de dependencia lineal (1) en lugar de la definición de dependencia lineal de vectores, a los elementos $\mathbf{x}$ de V_n se les llama puntos del *espacio euclídeo real n -dimensional*, y los representaremos por letras mayúsculas.

Se llama distancia entre los puntos $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{y}$ se representa por $\text{dist.}(X, Y)$, al siguiente número:

$$(2) \quad \text{dist.}(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

La distancia posee las siguientes propiedades:

1. a) $\text{dist.}(X, Y) = 0 \iff X = Y$.
- b) $\text{dist.}(X, Y) = \text{dist.}(Y, X)$.
- c) $\text{dist.}(X, Y) + \text{dist.}(Y, Z) \geq \text{dist.}(X, Z)$.

El vector $(x_1, \dots, x_n)$ formado por las coordenadas del punto X se llama *vector de posición del punto X* . Se llama *módulo* del vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, y se representa por $|\mathbf{x}|$ al número:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Si $O = (0, \dots, 0)$ es el punto origen del espacio, resulta que si $\mathbf{x}$ es el vector de posición del punto X e $\mathbf{y}$ el vector de posición del punto Y , se verifica que

$$|\mathbf{x}| = \text{dist.}(O, X), \quad |\mathbf{y}| = \text{dist.}(O, Y), \quad |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \text{dist.}(X, Y)$$

y las relaciones 1 dan lugar a las siguientes:

- 1 a) $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- b) $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.
- c) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *entorno-intervalo* de radio ϵ , o simplemente *entorno de radio ϵ* , de un punto A del espacio euclídeo E_n , y se representa por

$E_\epsilon(A)$, al conjunto de todos los puntos X tales que: $\text{dist.}(A, X) < \epsilon$. Esto es:

$$(3) \quad E_\epsilon(A) = \{X \mid \text{dist.}(A, X) < \epsilon\}.$$

DEFINICIÓN 4.—Se llama *entorno-intervalo de radio ϵ* , o simplemente *entorno de radio ϵ* , de un punto A del espacio euclídeo E_n , y se representa por $E_\epsilon(A)$, al conjunto de todos los puntos X del espacio tales que $|x_i - a_i| < \epsilon$, $i = 1, \dots, n$, siendo $(a_1, \dots, a_n)$ las coordenadas de A y $(x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas de X .

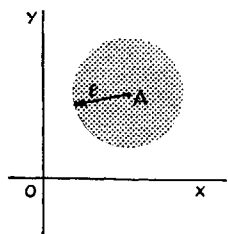


Fig. 90 a).

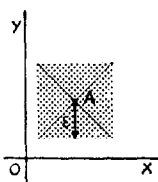


Fig. 90 b).

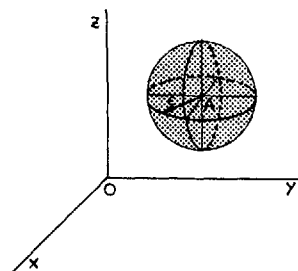


Fig. 91 a).

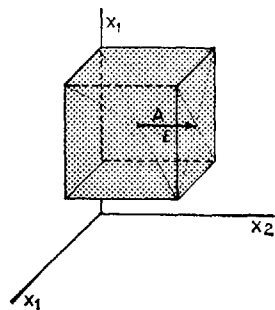


Fig. 91 b).

En el caso del plano euclídeo, el entorno de radio ϵ del punto A es el círculo de centro A y radio ϵ , sin la circunferencia (fig. 90 a)), cuando se emplea la definición 3 y el cuadrado de centro A y lado 2ϵ cuando se emplea la definición 4 (fig. 90 b)). En el caso del espacio euclídeo de dimensión tres, el entorno de radio ϵ de A es una esfera de centro A y radio ϵ , sin la superficie esférica, cuando se emplea la definición 3 (fig. 91 a)) y el cubo de centro A y arista 2ϵ , sin las caras, cuando se emplea la definición 4 (figura 91 b)).

DEFINICIÓN 5.—Se llama *abierto* de E_n a la unión de un número finito o infinito de entornos. Se llama *entorno* de un punto A , y lo representaremos por $E(A)$, a todo conjunto de E_n , que contiene un abierto, que contiene a A :

$$E(A) \text{ entorno de } A \Leftrightarrow A \in B \subset E(A), \quad B = \text{conjunto abierto.}$$

Se dice que P es *punto adherente* del conjunto C de E_n cuando en todo entorno de P existe un punto de C . Se dice que P es *punto de acumulación* de C cuando en todo entorno de P existe un punto de C , distinto de P . Al conjunto de todos los puntos adherentes al conjunto C se le llama *adherencia de C* . Los conjuntos iguales a su adherencia se llaman *cerrados*.

Los conjuntos abiertos según la definición 3 de entorno coinciden con los abiertos según la definición 4, luego son equivalentes ambas definiciones de entorno.

EJERCICIOS:

778. a) ¿Es el interior de un polígono un abierto? b) ¿Es el interior de un elipsoide un abierto? c) ¿Es el conjunto puntado de la figura 92 un abierto?

779. a) ¿Es el borde de un triángulo un cerrado? b) ¿Es el conjunto de las aristas de un poliedro un cerrado? c) ¿Es una superficie poliédrica un cerrado? d) ¿Es un poliedro un cerrado? e) ¿Es una

esfera, con su borde, un cerrado? f) Es el interior de una elipse juntamente con su borde un cerrado? g) ¿Es un punto cerrado? h) ¿Es un conjunto finito de puntos un cerrado?

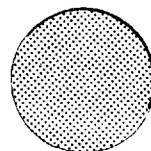


Fig. 92.

DEFINICIÓN 5.—Se dice que la familia de subconjuntos $\{C_i\}_{i \in I}$ de E_n es un *recubrimiento* del conjunto M , cuando todo punto de M pertenece a un conjunto C_i (al menos). Si todos los conjuntos del recubrimiento son abiertos el *recubrimiento* se llama *de abiertos*. Un subconjunto M de E_n se llama un *compacto* cuando de todo recubrimiento de abiertos de M se puede extraer un subrecubrimiento finito de M .

2. Funciones entre espacios euclídeos. Límites.—Vamos a estudiar funciones cuyos conjuntos inicial y final sean espacios euclídeos. A estas funciones las llamaremos *funciones reales*. La función $E_n \xrightarrow{f} E_m$ se dice que es una *función de n variables reales con valores en E_m* . En particular, si $n = m = 1$, se dice que es una *función real de una variable real*.

EJERCICIOS:

780. Definir el conjunto original y el conjunto imagen y representar gráficamente la función $y = \sin x$.

781. Representar gráficamente la función $y = \cos x$.

782. Representar gráficamente y definir el conjunto original y el conjunto imagen de la función $y = \operatorname{tg} x$.

783. Representar gráficamente y definir el conjunto original y el conjunto imagen de la función $y = \operatorname{cot} x$.

784. Una función $y = f(x)$ se llama *periódica*, de *periodo* t , cuando t es el menor número

real positivo para el cual es $f(x+t) = f(x)$, para todo x . Comprobar que las funciones seno y coseno son funciones periódicas de periodo 2π y que tangente y cotangente son funciones periódicas de periodo π .

785. Representar gráficamente y determinar or. e im. de la siguiente función, llamada *coseno hiperbólico*:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (\exp. (x) + \exp. (-x))$$

(cuando no se indica la base de la exponencial se conviene en suponer que dicha base es el número e).

786. Representar gráficamente y determinar or. e im. de la siguiente función, llamada *seno hiperbólico*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (\exp. (x) - \exp. (-x)).$$

787. A partir de las definiciones de $\operatorname{ch} x$ y de $\operatorname{sh} x$, demostrar las siguientes fórmulas de la trigonometría hiperbólica:

a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. b) $\operatorname{ch} (-x) = \operatorname{ch} x$. c) $\operatorname{sh} (-x) = -\operatorname{sh} x$. d) $\operatorname{ch} (x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$. e) $\operatorname{ch} (x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$. f) $\operatorname{sh} (x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$. g) $\operatorname{sh} (x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

788. Comprobar que la curva $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ es una hipérbola equilátera.

DEFINICIÓN 1.—Sea $E_n \xrightarrow{f} E_m$ una función uniforme de E_n en E_m . A los puntos de E_n y de E_m los representaremos por sus vectores de posición correspondientes y a éstos con letras negritas. Se dice que el punto ***b*** es el límite de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende hacia ***a***, y se escribe $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ cuando para todo entorno $E_\epsilon(\mathbf{b})$, existe un entorno $E_\delta(\mathbf{a})$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in E_\delta(\mathbf{a})$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, se verifique que $f(\mathbf{x}) \in E_\epsilon(\mathbf{b})$.

Simbólicamente, se puede expresar esta definición del siguiente modo:

$$(1) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall E_\epsilon(\mathbf{b}) \Rightarrow \exists E_\delta(\mathbf{a}) \mid \forall \mathbf{x} \in E_\delta(\mathbf{a}), \mathbf{x} \neq \mathbf{a}, f(\mathbf{x}) \in E_\epsilon(\mathbf{b}).$$

EJERCICIOS:

789. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

790. Demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x+y) = 5$.

791. Demostrar que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,4,2)} (3x-y+2z, x+2z) = (3, 5)$.

792. Si a es cualquier número real, demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$.

793. Demostrar que si $a > 0$ y b es cualquier número real, $\lim_{x \rightarrow b} \exp_a(x) = \exp_a(b)$

794. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Un caso particular de funciones reales lo constituyen las aplicaciones del conjunto N de los números naturales en un espacio euclídeo n -dimensional E_n . Estas aplicaciones se llaman *sucesiones de puntos de E_n* , y se representan en la forma:

$$(2) \quad N \xrightarrow{a} E_n: \quad n \rightarrow a_n.$$

La definición 1 de límite es válida para estas aplicaciones, sustituyendo a por ∞ y $E_\delta(a)$ por $E(n) = \{n' > n \mid n' \in N\}$. Resulta, por tanto, que:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(b) \Rightarrow \exists E(n) \mid \forall n' \in E(n), a_{n'} \in E_\varepsilon(b).$$

Se verifica la siguiente proposición:

1. $[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b] \Leftrightarrow [Para\ toda\ sucesión\ a_n\ tal\ que\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\ se\ verifica\ que\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b].$

En el caso de una función real de una variable real tiene interés compactificar la recta real añadiéndole dos puntos, llamados $-\infty$ y $+\infty$, el primero que precede a todos los números reales y el segundo que sigue a todos ellos. Se llama *entorno de $+\infty$ de frontera ε* , siendo ε cualquier número real, al conjunto de todos los números reales x , tales que $x > \varepsilon$. Análogamente, se llama *entorno de $-\infty$ de frontera ε* , al conjunto de todos los números reales x tales que $x < -\varepsilon$, y se escribe, respectivamente:

$$(4) \quad E_\varepsilon(\infty) = \{x \mid x > \varepsilon\}, \quad E_\varepsilon(-\infty) = \{x \mid x < -\varepsilon\}.$$

Con esta definición de entorno de los nuevos puntos de la recta real, la definición 1 da lugar a los siguientes casos particulares:

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(+\infty) \Rightarrow \exists E_\delta(a) \mid \forall x \in E_\delta(a), x \neq a, f(x) \in E_\varepsilon(+\infty)$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(b) \Rightarrow \exists E_\delta(+\infty) \mid \forall x \in E_\delta(+\infty), f(x) \in E_\varepsilon(b).$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(+\infty) \Rightarrow \exists E_\delta(+\infty) \mid \forall x \in E_\delta(+\infty), f(x) \in E_\varepsilon(+\infty).$$

En algunas ocasiones no existe el límite igual a $+\infty$ o a $-\infty$, pero existe el siguiente límite hacia ∞ :

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists E_{\frac{1}{\epsilon}}(a) \mid \forall x \in E_{\frac{1}{\epsilon}}(a), x \neq a, |f(x)| > \epsilon.$$

EJERCICIOS:

$$795. \text{ Demostrar que } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x^3-4x+4} = +\infty.$$

$$796. \text{ Demostrar que } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty.$$

LÍMITES POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA.—Sea $f(x)$ una función uniforme de una variable real. Sea r la semirrecta de origen a , siendo a un número real, tal que $r = \{x \mid x \geq a\}$. Se llama *entorno de un punto* b de la semirrecta r a la intersección de un entorno de b en la recta con la semirrecta r . Si b es distinto de a , los entornos de b en la semirrecta y en la recta son esencialmente iguales. Únicamente cuando $b = a$, los entornos en la semirrecta son distintos a los entornos de la recta. Un entorno del origen a de la semirrecta r , en dicha semirrecta se llama un *entorno por la derecha de a* . A un entorno por la derecha de a , de radio ϵ , lo representaremos por $E_{+\epsilon}(a)$. Por consiguiente:

$$(9) \quad E_{+\epsilon}(a) = \{x \mid 0 \leq x - a < \epsilon\}.$$

Análogamente, se definen los *entornos por la izquierda de a* :

$$(10) \quad E_{-\epsilon}(a) = \{x \mid -\epsilon < x - a \leq 0\}.$$

Si en la definición 1 de límite se sustituye $E_{\delta}(a)$ por un entorno por la derecha (por la izquierda) se obtiene el concepto de *límite por la derecha*, que se representa por $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (*límite por la izquierda*, que se representa por $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$). El límite por la derecha se designa también del siguiente modo: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ (análogamente, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$). Por consiguiente:

$$(11) \quad f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall E_{\epsilon}(b) \Rightarrow \exists E_{+\delta}(a) \mid \forall x \in E_{+\delta}(a), x \neq a, f(x) \in E_{\epsilon}(b).$$

$$(12) \quad f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall E_{\epsilon}(b) \Rightarrow \exists E_{-\delta}(a) \mid \forall x \in E_{-\delta}(a), x \neq a, f(x) \in E_{\epsilon}(b).$$

EJERCICIOS:

$$797. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x+1}{x^2-5x+6} \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x+1}{x^2-5x+6}.$$

$$798. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x.$$

$$799. \text{ Sea la función escalonada } f(x) = [x], \text{ siendo } [x] \text{ el mayor número entero tal que } [x] \leq x. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x).$$

PRODUCTO DE LÍMITES. CONVERGENCIA UNIFORME.—Sea $E_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una función de n variables reales definida en un abierto A de E_n : $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Sea B un conjunto de puntos de E_{n-1} tal que, para todo punto $(x_2, \dots, x_n) \in B$, exista $\lim_{x_1 \rightarrow a} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. La correspondencia $(x_2, \dots, x_n) \rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow a} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función uniforme definida en B , que llamaremos $F(x_2, \dots, x_n)$:

$$(13) \quad F(x_2, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow a} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

En virtud de la definición 1 de límite, se verifica que:

$$2. \quad F(x_2, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow a} f(x_1, \dots, x_n) \iff [\forall E_\varepsilon (F(x_2, \dots, x_n)) \implies$$

$$(14) \quad \exists E_{\delta(x_2, \dots, x_n)}(a) \mid \forall x_1 \in E_{\delta(x_2, \dots, x_n)}(a), \quad x_1 \neq a, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_\varepsilon(F(x_2, \dots, x_n))].$$

DEFINICIÓN 2.—Se dice que la función $f(x_1, \dots, x_n)$ converge uniformemente hacia la función $F(x_2, \dots, x_n)$ en el conjunto B cuando, para todo punto $(x_2, \dots, x_n) \in B$ se verifica (14) para un δ que no depende de $(x_2, \dots, x_n)$. Esto es:

$$(15) \quad F(x_2, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow a} u. (f(x_1, \dots, x_n)) \iff [\forall E_\varepsilon (F(x_2, \dots, x_n))$$

$$\implies \exists E_\delta(a) \mid \forall x_1 \in E_\delta(a), \quad x_1 \neq a, \quad f(x_1, \dots, x_n) \in E_\varepsilon(F(x_2, \dots, x_n))]. \quad \forall (x_2, \dots, x_n) \in B.$$

EJERCICIOS:

$$800. \text{ Demostrar que } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x y^2 + y^3) = 1 - y^2 + y^3, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

801. ¿Es uniforme la convergencia del ejercicio anterior en $\mathbb{R}$? ¿Lo es en $[-m, m]$, siendo m un número real positivo arbitrario?

802. ¿Es uniforme la convergencia de la función $f(x, y) = 3x - x \operatorname{tg} y$ cuando $x \rightarrow a$, siendo a cualquier número real, en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$? ¿Lo es en el segmento $[0, \frac{\pi}{3}]$?

Un caso particular de función de variables reales es el formado por las funciones uniformes: $N \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$: $f(n, x_1, \dots, x_m)$, en donde n varía en N y $(x_1, \dots, x_m)$ en un abierto A de E_m . Estas funciones se llaman *sucesiones funcionales* y se acostumbra a representar con la siguiente notación:

$$(16) \quad f(n, x_1, \dots, x_m) = f_n(x_1, \dots, x_m).$$

A estas funciones se pueden aplicar las definiciones (14) y (15), sin más que sustituir el entorno $E_{\delta(x_1, \dots, x_m)}$ por $E(n(x_1, \dots, x_m))$, resultando la siguiente:

DEFINICIÓN 3.—Se dice que $F(x_1, \dots, x_m)$ es el límite de la sucesión funcional $f_n(x_1, \dots, x_m)$ cuando $n \rightarrow \infty$, y se escribe:

$$F(x_1, \dots, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1, \dots, x_m),$$

cuando, para todo entorno $E_\epsilon(F(x_1, \dots, x_m))$, existe un entorno $E(n(x_1, \dots, x_m))$ tal que, para todo $n' \in E(n(x_1, \dots, x_m))$ se verifica que $f_{n'}(x_1, \dots, x_m) \in E_\epsilon(F(x_1, \dots, x_m))$. Esto es:

$$(15) \quad F(x_1, \dots, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1, \dots, x_m) \Leftrightarrow [\forall E_\epsilon(F(x_1, \dots, x_m)) \\ \Rightarrow \exists n(x_1, \dots, x_m) \in N \mid \forall n' > n(x_1, \dots, x_m), f_{n'}(x_1, \dots, x_m) \in E_\epsilon(F(x_1, \dots, x_m))].$$

Cuando se puede hallar el número $n(x_1, \dots, x_m)$ de modo que no dependa del punto $(x_1, \dots, x_m)$, se dice que *la convergencia (o el límite) es uniforme en A*. Luego:

$$(16) \quad F(x_1, \dots, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} u. \quad f_n(x_1, \dots, x_m) \Leftrightarrow [\forall E_\epsilon(F(x_1, \dots, x_m)) \\ \Rightarrow \exists n \in N \mid \forall n' > n, f_{n'}(x_1, \dots, x_m) \in E_\epsilon(F(x_1, \dots, x_m)), \forall (x_1, \dots, x_m) \in A].$$

EJERCICIOS:

803. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x|$. ¿Es este límite uniforme en toda la recta? ¿Lo es en el segmento $[-m, m]$?

804. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n}$, $x \neq 0$.

805. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n}$ y averiguar si la convergencia es uniforme en el segmento $[0, a]$.

En lugar de considerar aplicaciones de E_n en $\mathbb{R}$ se pueden considerar, en general, aplicaciones de $E_{n_1} \times \dots \times E_{n_r} \xrightarrow{f} E_m$, de la forma:

$$(17) \quad f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) = \mathbf{y} \in E_m, \quad \mathbf{x}_i \in E_{n_i},$$

y se pueden extender las definiciones (13) y (14) a estas aplicaciones.

DEFINICIÓN 4.

$$(18) \quad F(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r) = \lim_{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) \Leftrightarrow [\forall \epsilon (F(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r)) \\ \Rightarrow \exists E_{\delta(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r)}(\mathbf{a}) \mid \forall \mathbf{x}_1 \in E_{\delta(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r)}(\mathbf{a}), \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{a}, f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) \in E_\epsilon(F)].$$

Si en (18) δ no depende de los puntos $\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$, para $(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r) \in A$ se dice que *el límite, o la convergencia, es uniforme en A*. Un caso particular de (18) es cuando las coordenadas del vector $\mathbf{x}_1$ varían en $\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$, en cuyo caso la aplicación (17) se escribe en la forma:

$$(19) \quad f(i_1, \dots, i_{n_1}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r) = f_{i_1, \dots, i_{n_1}}(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r)$$

Las aplicaciones (19) se llaman *sucesiones múltiples de aplicaciones*. El caso más particular de (19) es cuando $r = 1$; en este caso $f_{i_1, \dots, i_{n_1}}$ es una aplicación $\mathbb{N}_1 \times \dots \times \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{R}$, llamada *sucesión múltiple de números reales*. Por consiguiente, la definición 4 se puede aplicar, como caso particular, a las sucesiones múltiples.

EJERCICIOS:

806. Enunciar la definición (18) en el caso de las sucesiones múltiples.

807. Calcular $\lim_{i_1 \rightarrow \infty} \frac{(i_2 + 1) i_1}{i_2 i_1 - 1}$.

3. TEOREMA.—Sea $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = z$ una aplicación de E_2 en E_1 definida en un abierto A de E_2 . Si existen los tres límites: $\lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} u. f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in E(\mathbf{b})$; $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} u. f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x} \in E(\mathbf{a})$, se verifica que

$$(20) \quad \lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

DEMOSTRACIÓN. — Sea $\lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$, $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x})$. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Dado el entor-

no $E_{\frac{\epsilon}{2}}(c)$, se verifica que existe un entorno $E_{\delta_1}(a, b)$, tal que $\forall (x, y) \in E_{\delta_1}(a, b)$, se verifica que

$$(21) \quad |f(x, y) - c| < \frac{\epsilon}{2},$$

De la segunda hipótesis, se deduce: $\forall y \in E_{\delta_1}(b), \exists E_{\delta_2}(a) \mid \forall x \in E_{\delta_2}(a) \implies$

$$(22) \quad |f(x, y) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea, por tanto, $y \in E_{\delta_1}(b) \cap E_{\delta_2}(b)$ y $x \in E_{\delta_2}(a) \cap E_{\delta_1}(a)$, se verificará:

$$|g(y) - c| = |g(y) - f(x, y) + f(x, y) - c| \leq |g(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - c| < \epsilon,$$

lo que expresa que

$$\lim_{y \rightarrow b} (g(y)) = c,$$

con lo que ha quedado probada la primera igualdad (30). Análogamente, se prueba la igualdad del primer miembro y el tercero.

EJERCICIOS:

808. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} y^x = 0, \forall y \in (0, 1)$, pero que la convergencia no es uniforme.

809. Como consecuencia del ejercicio anterior, comprobar que

$$\lim_{y \rightarrow 1} \lim_{x \rightarrow \infty} y^x \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow 1} y^x, \quad 0 < y \leq 1.$$

El teorema 3 se puede enunciar también para cualquier número de variables y de límites.

4. Si $F(y, z)$ es una función uniforme de dos variables independientes, y, z , y si $y = f(x), z = g(x)$ y existen los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad y \quad \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} F(y, z) = l,$$

se verifica que:

$$\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} F(y, z) = \lim_{x \rightarrow a} F(f(x), g(x))$$

DEMOSTRACIÓN.—De $\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} F(y,z) = l$, se deduce que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un entorno $E_\delta(b, c)$ tal que $\forall (y, z) \in E_\delta(b, c)$, $(y, z) \neq (b, c)$, es $F(y, z) \in E_\varepsilon$. Análogamente, existen δ_1 y δ_2 tales que $\forall x \in E_{\delta_1}(a)$, $x \neq a$, $f(x) \in E_\delta(b)$, y $\forall x \in E_{\delta_2}(a)$, $x \neq a$, $g(x) \in E_\delta(c)$, luego, suponiendo que los entornos que se emplean son cuadrados y que $\delta' = \min. (\delta_1, \delta_2)$, se verifica que $\forall x \in E_{\delta'}(a) \implies (f(x), g(x)) \in E_\delta(b, c)$, luego $F(f(x), g(x)) \in E_\varepsilon(l)$.

COROLARIO.—Si $\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} F(y,z) = F(b, c)$, se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} F(f(x), g(x)) = F(\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x))$, siendo $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $c = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

CÁLCULO DE LÍMITES.

5. Si y y z son dos variables reales independientes, se verifica:
a) $\lim_{y \rightarrow b} (z y) = z \lim_{y \rightarrow b} y$. b) $\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} (m y + n z) = m \lim_{y \rightarrow b} y + n \lim_{z \rightarrow c} z$,
siendo m y n números reales. c) $\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} (y z) = \lim_{y \rightarrow b} y \cdot \lim_{z \rightarrow c} z$. d)

$$\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} \frac{y}{z} = \frac{\lim_{y \rightarrow b} y}{\lim_{z \rightarrow c} z}, c \neq 0. \text{ e) } \lim_{y \rightarrow b} \log_a y = \log_a \lim_{y \rightarrow b} y. \text{ f) } \lim_{y \rightarrow b} \sin y$$

$$= \sin \lim_{y \rightarrow b} y. \text{ g) } \lim_{y \rightarrow b} \cos y = \cos \lim_{y \rightarrow b} y. \text{ h) Si } f(y, z) > 0 \text{ en un entorno}$$

$$E(b, c) \text{ y si } \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} f(y, z) = m > 0, \text{ se verifica que } \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} \log_a f(y, z)$$

$$= \log_a \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} f(y, z). \text{ i) } \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} y^z = \left(\lim_{y \rightarrow b} y \right)^{\lim_{z \rightarrow c} z}, b > 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—a) Si $|z| \leq m$, y si ε es un número positivo arbitrario, se verifica que, para todo y tal que $|y - b| < \frac{\varepsilon}{m}$, se verifica que $|z y - z b| = |z| |y - b| < \varepsilon \frac{|z|}{m} \leq \varepsilon$.

b) Si ε es un número positivo arbitrario, para todo $(x, y) \in E_\delta(b, c)$, siendo $\delta = \min. \left(\frac{\varepsilon}{2|m|}, \frac{\varepsilon}{2|n|} \right)$ se verifica que

$$|m y + n z - (m b + n c)| \leq |m| |y - b| + |n| |z - c| < |m| \frac{\varepsilon}{2|m|} + |n| \frac{\varepsilon}{2|n|} = \varepsilon.$$

c) Sea ε un número positivo arbitrario. $\forall (y, z) \in E_\delta(b, c)$, siendo $\delta = \min. \left(\frac{\varepsilon}{2|c|}, \frac{\varepsilon}{2\left(|b| + \frac{\varepsilon}{2|c|}\right)} \right)$ se verifica que

$$|yz - bc| = |yz - yc + yc - bc| \leq |y||z - c| + |c||y - b| \\ < |y| \frac{\varepsilon}{2\left(|b| + \frac{\varepsilon}{2|c|}\right)} + |c| \frac{\varepsilon}{2|c|} < \varepsilon,$$

ya que

$$|y| = |b + (y - b)| \leq |b| + |y - b| < |b| + \frac{\varepsilon}{2|c|} \Rightarrow \frac{|y|}{|b| + \frac{\varepsilon}{2|c|}} < 1,$$

d) Sea ε un número positivo arbitrario. $\forall (y, z) \in E_\delta(b, c)$, siendo $|x| > m$ y $\delta = \min. \left(\frac{\varepsilon m}{2}, \frac{\varepsilon m|c|}{2|b|} \right)$, se verifica:

$$\left| \frac{y}{z} - \frac{b}{c} \right| = \frac{|yc - bz|}{|z||c|} = \frac{|yc - bc + bc - bz|}{|z||c|} \leq \frac{|y - b||c| + |b||c - z|}{|z||c|} \\ < \frac{\varepsilon m}{2|z|} + \frac{|b|\varepsilon m|c|}{2|z||c||b|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

e) Sea ε un número positivo arbitrario. Se supone que $a > 0$, $b > 0$. $\forall y \in E_\delta(b)$, siendo $\delta = \min. (b(a^\varepsilon - 1), b(1 - a^{-\varepsilon}))$

$$|\log_a y - \log_a b| = \left| \log_a \frac{y}{b} \right| = \begin{cases} (y > b), \log_a \frac{y}{b} < \log_a a^\varepsilon = \varepsilon, \\ (y < b), \log_a \frac{b}{y} < \log_a a^\varepsilon = \varepsilon. \end{cases}$$

f) Sea ε un número positivo arbitrario. Recordando que $\forall x$, $|\sin x| \leq |x|$, resulta que $\forall y \in E_\varepsilon(b)$, se verifica:

$$|\sin y - \sin b| = \left| 2 \cos \frac{y+b}{2} \sin \frac{y-b}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{y-b}{2} \right| \leq \frac{2|y-b|}{2} < \varepsilon.$$

g) Es consecuencia de f) y de $\cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$.

h) Sea ε un número positivo arbitrario. Sea $\eta = \min. (m(a^\varepsilon - 1), m(1 - a^{-\varepsilon}))$ (se supone $a > 1$). De $\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} f(y, z) = m$, se deduce que existe un número positivo δ tal que $\forall (y, z) \in E_\delta(b, c)$ se verifica que $|f(y, z) - m| < \eta$, luego $\forall (y, z) \in E_\delta(b, c)$ se verifica que

$$|\log_a f(y, z) - \log_a m| = \left| \log \frac{f(y, z)}{m} \right| = \begin{cases} (f(y, z) > m), \log_a \frac{f(y, z)}{m} < \log_a \frac{m a^\varepsilon}{m} = \varepsilon \\ (f(y, z) < m), \log_a \frac{m}{f(y, z)} < \log_a a^\varepsilon = \varepsilon. \end{cases}$$

i) El límite: $\lim_{y \rightarrow b} \log_a y^z = \lim_{y \rightarrow b} z \log_a y$ es uniforme para todo $z \in E_M(0)$, cualquiera que sea M , ya que $\forall y \in E_\delta(b)$, siendo $\delta = \min. (b(a^{\frac{\epsilon}{M}} - 1), b(1 - a^{-\frac{\epsilon}{M}}))$, siendo ϵ un número positivo arbitrario, se verifica que

$$|z \log_a y - z \log_a b| = |z| |\log_a y - \log_a b| = |z| \left| \log_a \frac{y}{b} \right| < |z| \log_a a^{\frac{\epsilon}{M}} = \frac{|z| \epsilon}{M} < \epsilon.$$

Por consiguiente, en virtud del teorema 3, se verificará:

$$\begin{aligned} \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} \log_a y^z &= \lim_{z \rightarrow c} \lim_{y \rightarrow b} (z \log_a y) = \lim_{z \rightarrow c} z \cdot \lim_{y \rightarrow b} \log_a y = c \log_a \lim_{y \rightarrow b} y \\ &= c \log_a b = \log_a b^c. \end{aligned}$$

Ahora bien, en virtud de h) es $\lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} \log_a y^z = \log_a \lim_{(y,z) \rightarrow (b,c)} y^z$, y en virtud de la uniformidad de log, resulta i).

Supondremos en lo que sigue que existen los límites: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

De los teoremas 3, 4 y 5, resultan inmediatamente las siguientes fórmulas:

6. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = g(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
7. $\lim_{x \rightarrow a} [m f(x) + n g(x)] = m \lim_{x \rightarrow a} f(x) + n \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
8. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
9. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$.
10. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
11. $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$.
12. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ y $|\lim_{x \rightarrow a} g(x)| < +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

EJERCICIOS:

810. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_m}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

811. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{(n)}}{(3x)^{(n)}}$, siendo $x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

$$812. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{2x^2 + x^2 - 4x + 1}{5x^2 - 6x + 2}}$$

813. Demostrar que si en un entorno de a se verifica que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, y si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$814. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}.$$

$$815. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$816. \text{ Calcular } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}.$$

3. Funciones continuas de variables reales.

DEFINICIÓN 1.—Sea $E_n \xrightarrow{f} E_m$ una función uniforme definida en un abierto A de E_n : $y = f(x)$. Sea a un punto de A . Se dice que la función f es continua en a cuando se verifica que

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a).$$

La función $f(x)$ se dice que es continua en el conjunto A cuando es continua en todos los puntos de A .

EJERCICIOS:

817. Demostrar que las siguientes funciones son continuas en A : a) $y = x^n$, n natural, para $A = \mathbb{R}$. b) $y = x^a$, a real, para $A = \mathbb{R}^+$. c) $y = \exp_a(x)$, $a > 0$, para $A = \mathbb{R}$. d) $y = \log_a(x)$, $a > 0$, para $A = \mathbb{R}^+$. e) $y = \sin x$, para $A = \mathbb{R}$. f) $y = \operatorname{tg} x$, para $A = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

818. Sea $f(x) = 2x + 1$, para $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Probar que $f(x)$ no es continua para $x = 1$.

819. Demostrar que la función $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no es continua para $x = 1$.

820. Demostrar que la función $y = \operatorname{tg} x$ no es continua en el punto $x = \frac{\pi}{2}$.

821. Demostrar que la función $y = [x]$, siendo $[x]$ = mayor entero menor que x , no es continua en el punto $x = n$, siendo n un número entero.

822. Demostrar que la función $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ no es continua para $x = \pi$.

823. Demostrar que la función $z = e - (x^2 + y^2)$ es continua en todo el plano E_2 .

Las funciones que no son continuas en el punto $\mathbf{a}$ se llaman *discontinuas* en $\mathbf{a}$, y $\mathbf{a}$ es *punto de discontinuidad* de la función.

Recordando la definición 1, 2, y la definición general de entorno (definición 5, 1), la definición de función continua en un punto $\mathbf{a}$ es equivalente a las siguientes:

DEFINICIÓN 1'.— $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ es continua en el punto $\mathbf{a} \iff \forall E_\epsilon(f(\mathbf{a})) \implies \exists E_\delta(\mathbf{a}) \mid \forall \mathbf{x} \in E_\delta(\mathbf{a}), f(\mathbf{x}) \in E_\epsilon(f(\mathbf{a}))$.

DEFINICIÓN 1''.— $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ es continua en el punto $\mathbf{a} \iff \forall E(f(\mathbf{a})) \implies f^{-1}(E(f(\mathbf{a})))$ es un entorno de $\mathbf{a}$, siendo este entorno el definido en la def. 5 de 1.

La equivalencia de las definiciones 1 y 1' es trivial. Vamos a probar la equivalencia de 1' y 1''.

1. Las definiciones 1' y 1'' son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN.—Def. 1' $\implies$ Def. 1''. Sea $E(f(\mathbf{a}))$ un entorno generalizado de $f(\mathbf{a})$, esto significa que existe un abierto $A \subset E(f(\mathbf{a}))$ y $f(\mathbf{a}) \in A$. Como A es una unión de entornos-intervalo, $f(\mathbf{a})$ pertenecerá a un entorno-intervalo y si ϵ es la mínima distancia de $f(\mathbf{a})$ a la frontera de este entorno-intervalo, $E_\epsilon(f(\mathbf{a})) \subset A$ y, por la def. 1', existe $E_\delta(\mathbf{a})$, tal que $f(E_\delta(\mathbf{a})) \subset E_\epsilon(f(\mathbf{a})) \subset A \subset E(f(\mathbf{a}))$, luego $f^{-1}(E_\delta(\mathbf{a})) \subset f^{-1}(E(f(\mathbf{a})))$, es decir, $E_\delta(\mathbf{a}) \subset f^{-1}(E(f(\mathbf{a})))$ y como $E_\delta(\mathbf{a})$ es un abierto que contiene a $\mathbf{a}$, resulta que $f^{-1}(E(f(\mathbf{a})))$ es un entorno de $\mathbf{a}$.

Def. 1'' $\implies$ Def. 1'. Sea $E_\epsilon(f(\mathbf{a}))$ un entorno-intervalo arbitrario de $f(\mathbf{a})$. Por la Def. 1'' se verifica que $f^{-1}E_\epsilon(f(\mathbf{a}))$ es un entorno de $\mathbf{a}$, luego existe un abierto A tal que $\mathbf{a} \in A \subset f^{-1}(E_\epsilon(f(\mathbf{a})))$, luego $\mathbf{a}$ pertenece a un entorno-intervalo I de A , y llamando δ a la distancia de $\mathbf{a}$ a la frontera de I , se verifica que $E_\delta(\mathbf{a}) \subset I \subset A \subset f^{-1}(E_\epsilon(f(\mathbf{a})))$, de donde:

$$f(E_\delta(\mathbf{a})) \subset E_\epsilon(f(\mathbf{a})).$$

Q. E. D.

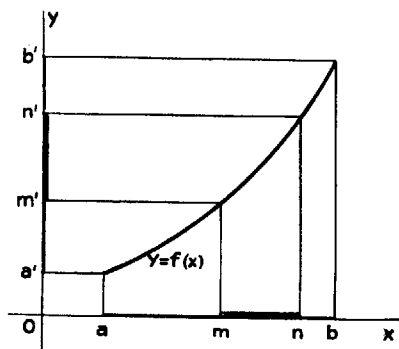


Fig. 93.

Consideremos los ejemplos de las figuras 93, 94 y 95. Se trata de tres funciones uniformes definidas las tres en un abierto $I = (a, b)$. Obsérvense

los siguientes hechos: a) Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en I y la función $h(x)$ no es continua en I . b) $f(a, b) = (a', b')$, $g(a, b) = (a', c')$,

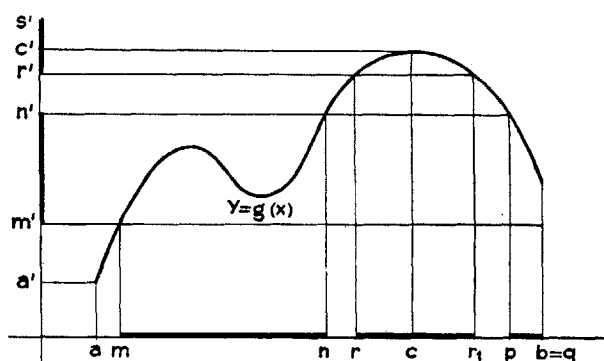


Fig. 94.

$h(a, b) = (a', b')$. Esto es, una función continua puede transformar un abierto en un conjunto no abierto y una función discontinua puede transformar

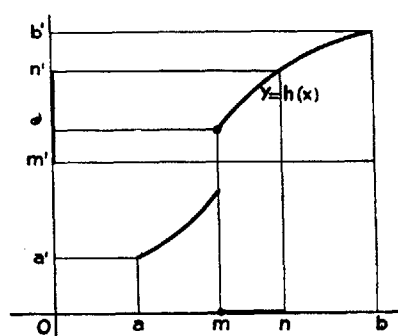


Fig. 95.

un abierto en otro abierto. c) Las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ definidas en los abiertos I son tales que las funciones recíprocas, f^{-1} y g^{-1} transforman siempre abiertos del eje y en abiertos del eje x ($f^{-1}(m', n') = (m, n)$, $g^{-1}(m', n') = (m, n) \cup (p, q)$, $g^{-1}(r', s') = (r, r_1)$), mientras que la función discontinua en el abierto $I = (a, b)$ es tal que $h^{-1}(m', n') = [m, n]$, que no es abierto. Estas observaciones experimentales conducen a enunciar el siguiente teorema:

2. La función uniforme $E_n \xrightarrow{f} E_m$, definida en el abierto A , es continua en el abierto $A \iff$ Para todo abierto B de E_m se verifica que $f^{-1}(B)$ es un abierto de E_n .

DEMOSTRACIÓN $\implies$.—Sea B un abierto arbitrario de E_m . Si $B \cap f(A) = \emptyset$ ya está demostrado. Supongamos que $a' \in B \cap f(A)$, luego $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Como un abierto es una unión de entornos, todo punto de un abierto pertenece a un entorno, luego, si a es un punto de un abierto, existe un entorno de a que pertenece al abierto. Recíprocamente, si C es un conjunto tal que todo punto de C posee un entorno contenido en C , se verifica que C

es el abierto unión de los entornos de todos sus puntos. Por consiguiente, para probar que $f^{-1}(B)$ es un abierto bastará ver que contiene un entorno de cada uno de sus puntos. Si $\mathbf{a} \in f^{-1}(B)$, será $\mathbf{a}' = f(\mathbf{a}) \in B \cap f(A)$. Por ser B un abierto, existe un entorno $E_\epsilon(\mathbf{a}') \subset B$ y por ser f continua en $\mathbf{a}$, existe un entorno $E_\delta(\mathbf{a})$ tal que $f(E_\delta(\mathbf{a})) \subset E_\epsilon(\mathbf{a}') \subset B \implies E_\delta(\mathbf{a}) \subset f^{-1}(B)$, luego $f^{-1}(B)$ es un abierto.

$\longleftarrow$. Sea $\mathbf{a}$ un punto arbitrario de A . Sea $E(f(\mathbf{a}))$ un entorno arbitrario de $f(\mathbf{a})$, luego $f(\mathbf{a}) \in B \subset E(f(\mathbf{a}))$, siendo B un abierto. De la hipótesis resulta que $f^{-1}(B)$ es un abierto, luego $\mathbf{a} \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(E(f(\mathbf{a})))$, que prueba que $f^{-1}(E(f(\mathbf{a})))$ es un entorno de $\mathbf{a}$, y por la Def. 1" f es continua en $\mathbf{a}$. Q. E. D.

Quedan como ejercicios para el lector las demostraciones de las proposiciones siguientes:

3. Si $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})$ son funciones continuas (en un punto $\mathbf{a}$ o en un abierto A) se verifica:

- a) $\lambda f(\mathbf{x})$ es continua (en $\mathbf{a}$, en A , respectivamente), siendo λ una constante.
- b) $\lambda f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})$ es continua (en $\mathbf{a}$, en A , respectivamente).
- c) $f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ es continua (en $\mathbf{a}$, en A , respectivamente).
- d) $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ es continua (en $\mathbf{a}$, si $g(\mathbf{a}) \neq 0$; en A , si $g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in A$).

4. La función producto de dos funciones continuas es una función continua.

DEMOSTRACIÓN.—Emplearemos la Def. 1". Sean f y g dos funciones continuas tales que $\text{im}(gf) \neq \emptyset$. Por hipótesis, f es continua en $\mathbf{a}$ y g es continua en $f(\mathbf{a})$. Vamos a probar que gf es continua en $\mathbf{a}$. Recordando que $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$, sea $E(gf(\mathbf{a}))$ un entorno arbitrario de $gf(\mathbf{a})$. Por ser g continua en $f(\mathbf{a})$ se verifica que $g^{-1}[E(gf(\mathbf{a}))] = E(f(\mathbf{a}))$, y, por ser f continua en $\mathbf{a}$, $f^{-1}[E(f(\mathbf{a}))] = E(\mathbf{a})$, luego $(gf)^{-1}[E(gf(\mathbf{a}))] = E(\mathbf{a})$, que prueba que gf es continua en $\mathbf{a}$.

Como aplicación del teorema 4 y de propiedades conocidas, resulta inmediatamente:

5. a) Si $f(\mathbf{a}) > 0$ y f es continua en $\mathbf{a}$, $\log f(\mathbf{a})$ es también continua en $\mathbf{a}$.

b) Si $f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{a}$, $\sin f(\mathbf{x})$ y $\cos f(\mathbf{x})$ son continuas en $\mathbf{a}$.

c) Si $f(\mathbf{x}) > 0$ y $|g(\mathbf{x})| < +\infty$, las continuidades de f y de g en $\mathbf{x}$ implican la continuidad de $f(\mathbf{x})^{g(\mathbf{x})}$ en $\mathbf{x}$.

EJERCICIOS:

824. Dibujar una función continua definida en un abierto que transforme un abierto en un cerrado.

825. ¿Sería posible la construcción de la función del ejercicio anterior, imponiendo, además, la condición de ser f^{-1} uniforme?

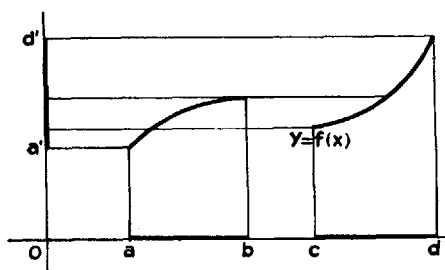


Fig. 96.

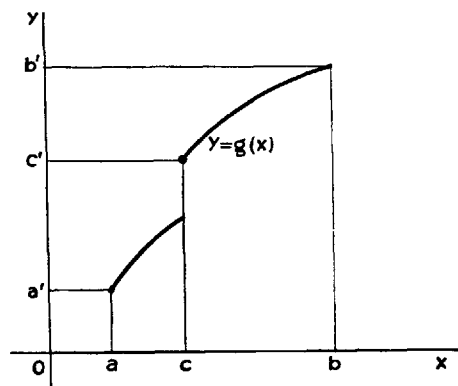


Fig. 97.

826. Decir si son o no continuas, en su conjunto original, las funciones representadas en las gráficas de las figuras 96 y 97: a) $y = f(x)$ definida en $(a, b) \cup (c, d)$. b) $y = g(x)$ definida en (a, b) .

CONTINUIDAD POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA.

DEFINICIÓN 2.—Se dice que la función uniforme $f(x)$ es *continua por la derecha en el punto a*, cuando se verifica que:

$$(2) \quad f(a+0) = f(a).$$

Se dice que la función uniforme $f(x)$ es *continua por la izquierda en a* cuando:

$$(3) \quad f(a-0) = f(a).$$

EJERCICIO:

827. Averiguar por qué lado es continua la función $y = [x]$, siendo $[x]$ = mayor entero menor que x , en los puntos de abscisa entera.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

6. Si $E_n \xrightarrow{f} E_m$ es una aplicación continua de un conjunto compacto, C , de E_n , en E_m se verifica que $f(C)$ es un conjunto compacto de E_m .

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de abiertos de $f(C)$. Por ser f continua en C , los conjuntos $\{f^{-1}(A_i) \cap C\}_{i \in I}$ son un recubrimiento de abiertos de la topología subordinada por la topología de E_n en C . Por ser C compacto, se puede extraer de él un subrecubrimiento finito: $\{f^{-1}(A_i) \cap C\}_{i \in J}$ siendo J un subconjunto finito de I . Como $f[f^{-1}(A_i) \cap C] = A_i$, el conjunto $\{A_i\}_{i \in J}$ es un subrecubrimiento finito de $f(C)$, luego $f(C)$ es compacto.

DEFINICIÓN 3.—Se llama *homeomorfismo* entre dos subespacios C y C' de E_n y E_m , respectivamente, a toda biyección $C \xrightarrow{f} C'$, que sea continua, siendo la aplicación inversa también continua.

7. Toda biyección continua $C \xrightarrow{f} C'$, $C \subset E_n$, $C' \subset E_m$, siendo C compacto, es homeomorfismo.

8. Si $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es una función uniforme y continua cuyo original, $\text{or}(f)$, es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$, se verifica que $f(\text{or}(f))$ posee máximo y mínimo.

DEMOSTRACIÓN DE 8.—En virtud del teorema 6 se verifica que $f(\text{or}(f))$ es compacto. En virtud de 18 (3, § 1) se verifica que $f(\text{or}(f))$ es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y en virtud de 14 b) (3, § 1) $f(\text{or}(f))$ posee máximo y mínimo.

Al máximo (mínimo) de $f(\text{or}(f))$ en el teorema anterior se le llama *máximo absoluto* (*mínimo absoluto*) de la función f .

DEFINICIÓN 4.—La función uniforme $E_n \rightarrow E_m$ se llama *uniformemente continua* en C , siendo $C \subset \text{or}(f)$, cuando, para todo número positivo, ε , existe otro, δ , tal que, para todo par de puntos, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, de C tales que distancia $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, se verifique que distancia $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon$.

9. Toda función continua sobre un compacto C de E_n es uniformemente continua en él.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\{I_n\}_{n \in J}$ un recubrimiento de $f(C)$ mediante intervalos de diámetro ε . $\{f^{-1}(I_n)\}_{n \in J}$ es un recubrimiento de abiertos de C . Este recubrimiento se puede descomponer en un recubrimiento de intervalos, puesto que $f^{-1}(I_n) = \bigcup_{i_n \in I_n} I_{i_n}$. Por ser C compacto, se puede extraer de este último

recubrimiento un subrecubrimiento finito, $\{I_j\}_{j \in L}$, L un subconjunto finito de índices. Sea $M = \{A_j, B_j\}$ el conjunto de los extremos de los segmentos I_j y sea δ el mínimo de las distancias entre dos de los puntos de M . Si x e y son dos puntos de C tales que su distancia $|x - y|$ sea menor que δ , se verifica que ambos pertenecen al mismo intervalo I_j , pues, si no fuese así, esto es, $x \in I_j$, $y \in I_k$ (fig. 98) (el razonamiento que sigue se hace en la recta x y respecto de las intersecciones de los intervalos con ella).

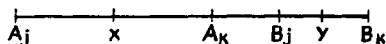


Fig. 98.

$x \notin I_k$, $y \notin I_j$, si, p. e., $A_j < x < B_j$, $A_k < y < B_k$, $x < y$, se verificaría que A_k y B_j se hallarían entre x e y , luego $|x - y| > |A_k - B_j| \geq \delta$, contradicción. Si x e y pertenecen al mismo segmento, I_j , sus imágenes $f(x)$, $f(y)$ pertenece al mismo segmento I_n , luego $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

10. Si $f(x)$ es una función continua definida en un segmento cerrado $s = [a, b]$, $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo absolutos.

DEMOSTRACIÓN.—En virtud del teorema de Borel, s es un espacio compacto, luego también lo es $f(s)$. Sean $M = f(x)$ y $m = f(y)$ los máximo y mínimo absolutos de $f(x)$. Si existiese un número z tal que $m < z < M$ y que no perteneciese a $f(s)$, como $f(s)$ es cerrado en la recta real, existiría un entorno E de z que no contendría ningún punto de $f(s)$. Sea 2ϵ el radio de E . Por ser $f(x)$ uniformemente continua, se puede hallar un δ tal que de $|x' - y'| < \delta$ se deduzca $|f(x') - f(y')| < \epsilon$. Por ser $M \neq m$ es $x \neq y$. Sea, por ejemplo, $x < y$. Sea C el subconjunto de $f(s)$ formado por todos los puntos c tales que $f(c) > z$ y C' el conjunto de todos los puntos c' de $f(s)$ tales que $f(c') < z$. Evidentemente: $C \cup C' = f(s)$, $C \cap C' = \emptyset$, $M \in C$, $m \in C'$. Por consiguiente, los puntos del segmento $[x, y]$ se pueden clasificar en dos clases, C_1 y C'_1 por la condición: $f(C_1) \subset C$, $f(C'_1) \subset C'$. De aquí resulta que $s = C_1 \cup C'_1$, $C_1 \cap C'_1 = \emptyset$, $x \in C_1$, $y \in C'_1$. C_1 poseerá un extremo superior, $t < y$. En el entorno $E_t(\delta)$ habrá un punto $p \in C_1$ y un punto $q \in C'_1$. De $|p - q| < \delta$ se deduce que $|f(p) - f(q)| < \epsilon$ y de $p \in C_1$ y $q \in C'_1$ se deduce $f(p) \in C$, $f(q) \in C'$, luego $|f(p) - f(q)| > 2\epsilon$, contradicción.

11. Si $f(x)$ es una función continua en el segmento $[a, b]$ y $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, existe un punto c tal que $a < c < b$ y $f(c) = 0$.

EJERCICIOS:

828. ¿Es la función $y = \operatorname{tg} x$ uniformemente continua en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

829. ¿Es la función $y = \operatorname{tg} x$ uniformemente continua en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$? ¿Y en el segmento $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$?

830. El teorema 11 permite calcular una raíz de una ecuación con tanta aproximación como se desee. Aplicarlo para calcular la raíz de la ecuación

$$f(x) = \operatorname{sen} x + x - \frac{\pi}{2} = 0$$

con un error inferior a una centésima.

831. Calcular la raíz de la siguiente ecuación:

$$f(x) = \log_{10} x + x - 10 = 0,$$

con error inferior a una milésima.

832. Calcular una raíz de la ecuación

$$f(x) = x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0,$$

con un error inferior a una milésima

CAPITULO SEXTO

CALCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIABLES REALES

§ 1. DIFERENCIALES Y DERIVADAS

1. El problema del cálculo diferencial.—Dada una aplicación $A \xrightarrow{f} E_m$ de un abierto A de E_n , se desea sustituirla por otra $B \xrightarrow{g} E_m$, tal que se aproxime a la aplicación f suficientemente en el entorno de un punto a de A . La aplicación g se elige lo más sencilla posible siempre que la aproximación sea suficientemente buena. Este problema es el problema propio del llamado cálculo diferencial. El planteamiento del problema exige definir una medida de la aproximación de dos aplicaciones en el entorno de un punto.

OBSERVACIONES EXPERIMENTALES.—En las aplicaciones de la figura 99 a) se verifica que $f(a + dx) - g(a + dx) = \Delta$ es aproximadamente igual a dx , y esto para cualquier dx , siempre que éste sea suficientemente pequeño.

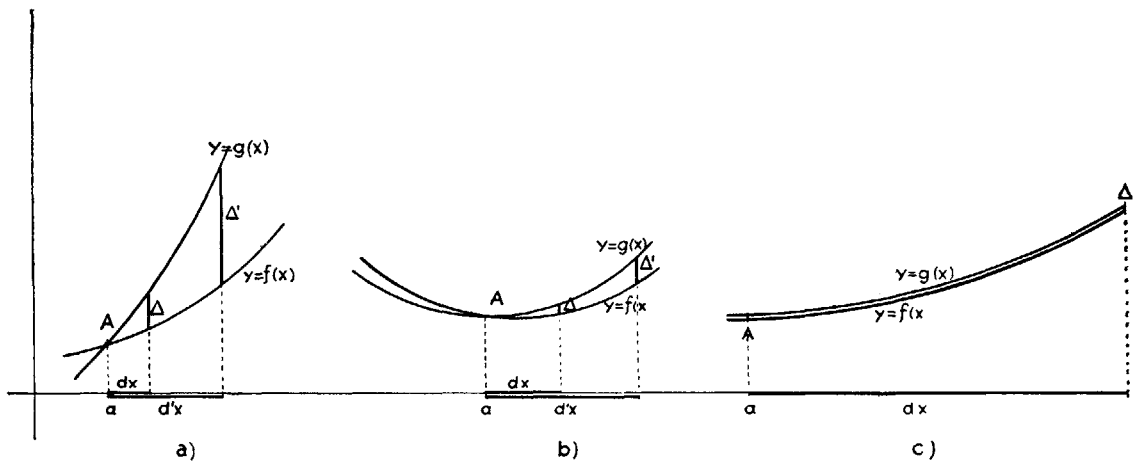


Fig. 99.

En la fig. 99 b) si, por ejemplo $dx = 0,1$, Δ es aproximadamente $0,01$. En la figura 99 c) si $dx = 0,1$, Δ es aproximadamente $0,001$. Esto es, Δ es,

en el primer caso, aproximadamente igual a $m dx$, en el segundo a $m dx^2$, en el tercero a $m dx^3$, luego los exponentes de dx pueden tomarse como medida de la aproximación.

Para definir con precisión estos exponentes se procede del siguiente modo:

DEFINICIÓN 1.—Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos aplicaciones de $E(a)$ en E_m , siendo $E(a)$ un entorno del punto a de E_n , tales que $f(a) = g(a)$. Tomando en el espacio $E_n \times E_m$ como origen el punto $(a, f(a))$, y llamando a la nueva va-

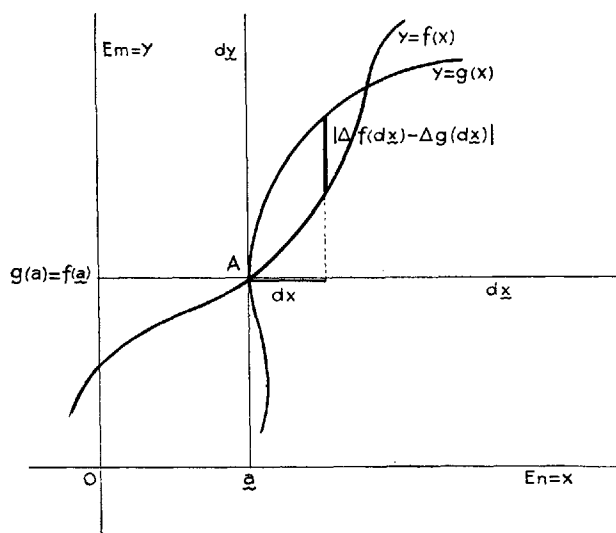


Fig. 100.

riable dx , esto es, poniendo $x = a + dx$ y $\Delta f(dx) = f(a + dx) - f(a)$, $\Delta g(dx) = g(a + dx) - g(a)$ (fig. 100), se puede tomar como medida de la separación de las aplicaciones en el punto dx la diferencia:

$$(1) \quad |\Delta f(dx) - \Delta g(dx)|.$$

Ahora bien, (1) es una aplicación de un entorno $E(0)$ de 0 en $\mathbb{R}$. Si existe:

$$(2) \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - \Delta g(dx)|}{|dx|^r} = l,$$

siendo $l \neq 0$, se dice que la medida de la aproximación de $g(\mathbf{x})$ a $f(\mathbf{x})$ en un entorno de $\mathbf{a}$ es igual a r . Esto es:

$$(3) \quad \text{med. aprox. } (g(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}))_{E(\mathbf{a})} = r \Leftrightarrow \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(d\mathbf{x}) - \Delta g(d\mathbf{x})|}{|d\mathbf{x}|^r} = l \neq 0.$$

EJERCICIOS:

833. Sean $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x + 2$. Medir la aproximación de $f(x)$ a $g(x)$ en un entorno del punto común a las dos aplicaciones.

834. Sea $f(x) = 2x^2 - x + 4$, $g(x) = 3x + 4$. Medir la aproximación de $g(x)$ a $f(x)$ en un entorno del punto $a = 2$.

835. Medir la aproximación de $g(x) = 7x - 4$ a $f(x)$, siendo $f(x)$ la función del ejercicio 834.

836. Sea $f(x) = \log x$, siendo $\log x$ el logaritmo neperiano de x , $g(x) = 2x - 2e + 1$, $h(x) = \frac{1}{e}x$. Medir la aproximación de g y h a f en un entorno del punto $a = e$.

1. med. aprox. $(g(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}))_{E(\mathbf{a})} = \text{med. aprox. } (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))_{E(\mathbf{a})}$. Es consecuencia inmediata de la definición (3).

Para estudiar el problema general de la aproximación de una aplicación arbitraria mediante una aplicación conocida se comienza por resolver este problema en el caso en que la aplicación conocida sea una aplicación lineal.

APROXIMACIÓN LINEAL DE UNA APLICACIÓN.—Sea $A \xrightarrow{f} E_m$ una aplicación de un abierto A de E_n en E_m , sea $\mathbf{a} \in A$ un punto de A y sea $\Delta f(d\mathbf{x}) = f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ la expresión de la aplicación f tomando como origen el punto $\mathbf{a}$. La aplicación $\Delta f(d\mathbf{x})$ es una aplicación de un abierto, A' , que es entorno de $\mathbf{0}$, en E_m . Sea $V_n \xrightarrow{\varphi} V_m$ un homomorfismo o aplicación lineal del espacio vectorial V_n en el espacio vectorial V_m . Al vector variable en V_n lo representaremos por $d\mathbf{x}$.

Se trata de resolver el siguiente problema:

2. Dada la aplicación $\Delta f(d\mathbf{x})$, cuyo conjunto original es un abierto A' del origen, determinar el homomorfismo $V_n \xrightarrow{\varphi} V_m$ por la condición de que la medida de la aproximación de φ a $\Delta f(d\mathbf{x})$ en un entorno $E(\mathbf{0})$ del origen sea máxima.

2. Diferencial de una función de una variable real.—Para simplificar el razonamiento vamos a tratar el problema general de aproximar una

aplicación arbitraria en el entorno de un punto mediante una aplicación lineal en el caso de una aplicación $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, siendo A un abierto de $\mathbb{R}$.

Sea la aplicación $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $A = (p, q)$ (fig. 101): $y = f(x)$. Supongamos que el grafo de la aplicación tenga por gráfica la curva de la figura 101. Tomando como nuevo origen el punto P de la gráfica y llamando dx y dy a los ejes paralelos a x e y , respectivamente, trazados por P , la expresión de la aplicación $y = f(x)$, respecto de los ejes $\{dx, dy\}$, es:

$$(4) \quad \Delta f(dx) = f(a + dx) - f(a), \\ x = a + dx.$$

Un homomorfismo φ de V_1 en V_1 tiene por ecuación: $dy = t dx$ y su gráfica, respecto de los ejes $\{dx, dy\}$, es una recta que pasa por el origen P . El problema de aproximación en este caso se formulará del siguiente modo:

$$(5) \quad \text{med. aprox. } (\varphi, \Delta f(dx))_{E(0)} = \text{máx.}$$

Ahora bien, en virtud de (3), es

$$\text{med. aprox. } (\varphi, \Delta f(dx))_{E(0)} = r \Leftrightarrow \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - \varphi|}{|dx|^r} = l \neq 0,$$

pero

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - \varphi|}{|dx|^r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - t dx|}{|dx|^r}.$$

Supondremos que existe el límite:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - t dx|}{|dx|}$$

para todo t , de donde med. aprox. $(\varphi, \Delta f(dx)) \geq 1$. Para que la aproximación sea mayor que 1 será por tanto necesario que

$$(6) \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - t dx|}{|dx|} = 0.$$

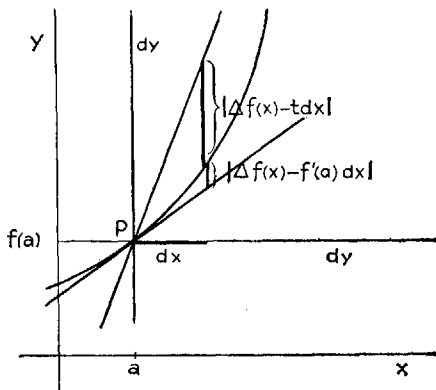


Fig. 101.

Ahora bien, la condición (6) es equivalente a

$$(7) \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta f(dx) - t dx}{dx} = 0,$$

de donde

$$(8) \quad t = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta f(dx)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}.$$

Por consiguiente, la aplicación $\varphi: dy = t dx$, cuando t toma el valor (8), se aproxima a la aplicación $\Delta f(dx)$ en un entorno de $\mathbf{o}$ más que cualquier otra aplicación lineal. A esta aplicación se le llama *diferencial de la aplicación $f(x)$ en el punto a* .

Al número definido por (8) se le llama *derivada de la función $f(x)$ para $x = a$* , y se representa con las notaciones siguientes:

$$(9) \quad Df(x)_{x=a} = f'(x)_{x=a} = f'(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx}.$$

A la aplicación φ se la representa por $df(a, dx)$, o simplemente, cuando no haya lugar a confusión, por $df(x)_{x=a}$. Por consiguiente:

$$(10) \quad df(a, dx) = f'(x)_{x=a} dx = f'(a) dx.$$

De (10) resulta la siguiente expresión para la derivada:

$$(11) \quad f'(x)_{x=a} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a}$$

Cuando existe el límite (8) se dice que la función $f(x)$ *es diferenciable o derivable para $x = a$* .

EJERCICIOS:

837. Calcular $df(3, dx)$, siendo: a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = 5x + 1$, c) $f(x) = \frac{1}{x}$.

838. Calcular $df(3, 10)$ para las diferenciales del ejercicio anterior.

De la definición de diferencial resulta que la recta de ecuación $dy = f'(x)_{x=a} dx$, respecto de los ejes $\{dx, dy\}$, es la que más se aproxima en el punto P a la curva de ecuación $dy = \Delta f(dx)$. A aquella recta se le llama *tangente* a la curva en el punto P . Por consiguiente, la ecuación de

la tangente a la curva $dy = \Delta f(dx)$ en el punto P es, respecto de los ejes $\{dx, dy\}$:

$$(12) \quad dy = f'(a) dx,$$

y la ecuación de la tangente, respecto de los ejes $\{x, y\}$, será, por tanto,

$$(13) \quad y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

EJERCICIOS:

839. Escribir la ecuación de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $x = 3$. Idem a la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, en el punto $x = 5$.

3. Diferencial de una aplicación $A \xrightarrow{f} E_m$.—En donde A es un abierto de E_n .

Estudiando el problema general enunciado en 2 de un modo análogo al seguido en el caso $n = m = 1$, se obtiene la siguiente definición general de diferencial de una aplicación en un punto a .

DEFINICIÓN 2.—Se llama *diferencial en el punto a de la aplicación f del abierto A de E_n en E_m* , siendo a un punto de A, a todo homomorfismo, que se representa por $df(a, d\mathbf{x})$, de V_n en V_m , que verifique la relación:

$$(14) \quad \boxed{\lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(a + d\mathbf{x}) - f(a) - df(a, d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} = 0.}$$

Por ser $df(a, d\mathbf{x})$ un homomorfismo se verifican las dos relaciones siguientes:

$$(15) \quad \begin{cases} df(a, d\mathbf{x} + d\mathbf{x}') = df(a, d\mathbf{x}) + df(a, d\mathbf{x}') \\ df(a, \lambda d\mathbf{x}) = \lambda df(a, d\mathbf{x}), \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Si existe la diferencial de la aplicación f en a , es única.

DEMOSTRACIÓN.—Sean $df(a, d\mathbf{x})$ y $\delta f(a, d\mathbf{x})$ dos diferenciales de f en a . Sea $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|}$. Por hipótesis se verifican (14) y

$$(16) \quad \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(a + d\mathbf{x}) - f(a) - \delta f(a, d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} = 0,$$

luego, restando (14) y (16) y recordando la aditividad del límite, resulta:

$$\lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{u} | d\mathbf{x}) - df(\mathbf{a}, \mathbf{u} | d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} = 0,$$

y por ser d y δ homomorfismos,

$$\lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} [\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{u}) - df(\mathbf{a}, \mathbf{u})] = 0,$$

de donde

$$\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{u})$$

y

$$\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{u}) | d\mathbf{x} | = df(\mathbf{a}, \mathbf{u}) | d\mathbf{x} |,$$

esto es,

$$\delta f(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}), \quad \forall d\mathbf{x} \in V_n.$$

Cuando existe la diferencial de la aplicación f en el punto $\mathbf{a}$, se dice que f es diferenciable en $\mathbf{a}$.

Si $A \xrightarrow{f} E_m$ y $A \xrightarrow{g} E_m$ son dos aplicaciones, se llama *suma* de las aplicaciones, y se representa por $f + g$, a la aplicación:

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}).$$

2. Si f y g son diferenciables en $\mathbf{a}$, se verifica que $f + g$ es también diferenciable en $\mathbf{a}$, y

$$(17) \quad d(f + g)(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) + dg(\mathbf{a}, d\mathbf{x}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Por ser df y dg homomorfismos, $df + dg$ es también un homomorfismo. Además, de (14) y de la análoga para g , se deduce, por la aditividad del límite:

$$\lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{(f + g)(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - (f + g)(\mathbf{a}) - [df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) + dg(\mathbf{a}, d\mathbf{x})]}{|d\mathbf{x}|} = 0,$$

que prueba, en virtud de 1, (17).

Si $f(\mathbf{x})$ es una aplicación, $(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda [f(\mathbf{x})]$ es otra aplicación, llamada producto del número λ por la aplicación f .

3. Si f es una aplicación diferenciable en $\mathbf{a}$, λf es también diferenciable en $\mathbf{a}$, y se verifica que

$$(18) \quad d(\lambda f)(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = \lambda d f(\mathbf{a}, d\mathbf{x}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Multiplicando (14) por λ , resulta:

$$\lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{(\lambda f)(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - (\lambda f)(\mathbf{a}) - \lambda d f(\mathbf{a}, d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} = 0,$$

que, en virtud de 1, prueba (18).

Las propiedades 2 y 3 se pueden resumir diciendo: *la diferencial es un operador lineal*.

4. Toda aplicación, f , diferenciable en $\mathbf{a}$ es continua en $\mathbf{a}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|}$. De (14) se deduce:

$$\begin{aligned} \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} [f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - d f(\mathbf{a}, d\mathbf{x})] &= 0, \\ \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} d f(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \cdot |d\mathbf{x}| = f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA DIFERENCIAL.—Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base métrica de V_n , esto es, tal que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, siendo el primer miembro el producto escalar y δ_{ij} las δ de Kronecker, y $B^* = \{\mathbf{u}^*_1, \dots, \mathbf{u}^*_m\}$ una base métrica de V_m . Sea la aplicación

$$(19) \quad A \xrightarrow{f} V_m: \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{x}^* \in V_m.$$

Sea $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$, $\mathbf{x}^* = x^*_1 \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^*_m \mathbf{u}^*_m$. Las aplicaciones $\mathbf{x}^* \xrightarrow{\pi_i} x^*_i$, que hacen corresponder a cada vector $\mathbf{x}^*$ de V_m su coordenada i -ésima respecto de la base B^* , permiten definir aplicaciones de A en $\mathbb{R}$, del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & V_m \\ & \searrow \pi_i & \swarrow \pi_i \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

esto es, $x^*_i(\mathbf{x}) = \pi_i f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in A$. Teniendo en cuenta (19), resulta:

$$\mathbf{x}^* = x^*_1 \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^*_m \mathbf{u}^*_m = f(\mathbf{x}) = x^*_1(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^*_m(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*_m,$$

de donde:

$$(20) \quad \mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = x_1^*(\mathbf{x}), \\ \dots\dots\dots \\ x_m^* = x_m^*(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Las ecuaciones del segundo miembro de la equivalencia (20) se llaman ecuaciones de la aplicación f respecto de la base B^* . Si $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base B , el producto de la biyección $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbf{x}$, por la aplicación f da lugar a las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1^* = x_1^*(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ x_m^* = x_m^*(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

de la aplicación f respecto de las bases B y B^* de V_n y V_m , respectivamente.

EJERCICIO:

840. Dada la aplicación: $V_2 \xrightarrow{f} V_2$: $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^2\mathbf{x} - 2\mathbf{x}$, y si $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$, $\mathbf{x}^* = x_1^*\mathbf{u}_1 + x_2^*\mathbf{u}_2$, escribir las ecuaciones de dicha aplicación.

Sea $d\mathbf{x}^* = df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})$ la diferencial de la aplicación f en $\mathbf{a}$ y sea $d\mathbf{x}^* = dx_1^*\mathbf{u}_1 + \dots + dx_m^*\mathbf{u}_m$. Se verifica:

$$\begin{aligned} \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - df(\mathbf{a}; d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} &= 0 \Leftrightarrow \\ \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{[x_1^*(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - x_1^*(\mathbf{a}) - dx_1^*]\mathbf{u}_1^* + \dots + [x_m^*(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - x_m^*(\mathbf{a}) - dx_m^*]\mathbf{u}_m^*}{|d\mathbf{x}|} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{[x_1^*(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - x_1^*(\mathbf{a}) - dx_1^*]\mathbf{u}_1^* + \dots}{|d\mathbf{x}|} &+ \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{[x_m^*(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - x_m^*(\mathbf{a}) - dx_m^*]\mathbf{u}_m^*}{|d\mathbf{x}|} = 0 \Leftrightarrow \\ (21) \quad \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{x_i^*(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - x_i^*(\mathbf{a}) - dx_i^*}{|d\mathbf{x}|} &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Como la aplicación $d\mathbf{x} \rightarrow d\mathbf{x}^*$ es, por hipótesis, un homomorfismo, y la aplicación $d\mathbf{x}^* \rightarrow dx_i^*$ también lo es, su producto, $d\mathbf{x} \rightarrow dx_i^*$, es también un homomorfismo, y, en virtud de (21), se verifica que este homomorfismo es la diferencial de la aplicación $\mathbf{x} \xrightarrow{x_i^*} x_i^*$ en el vector $\mathbf{a}$, esto es:

$$dx_i^* = dx_i^*(\mathbf{a}, d\mathbf{x}),$$

luego:

$$(22) \quad df(a, d\mathbf{x}) = dx_1^*(a, d\mathbf{x}) \mathbf{u}_1^* + \dots + dx_m^*(a, d\mathbf{x}) \mathbf{u}_m^*.$$

Por otra parte, si $d\mathbf{x} = dx_1 \mathbf{u}_1 + \dots + dx_n \mathbf{u}_n$, teniendo en cuenta que la diferencial es un homomorfismo, se verifica que:

$$(23) \quad df(a, d\mathbf{x}) = df(a; dx_1 \mathbf{u}_1 + \dots + dx_n \mathbf{u}_n) = df(a, \mathbf{u}_1) dx_1 + \dots + df(a, \mathbf{u}_n) dx_n.$$

Para obtener el significado de $df(a, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, \dots, n$, basta poner en la definición (14) de diferencial, $d\mathbf{x} = \mathbf{u}_i dx_i$, de donde $|d\mathbf{x}| = |dx_i|$, y se obtiene:

$$\lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{f(a + \mathbf{u}_i dx_i) - f(a) - df(a; \mathbf{u}_i dx_i)}{|dx_i|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{f(a + \mathbf{u}_i dx_i) - f(a) - df(a; \mathbf{u}_i) dx_i}{dx_i} = 0,$$

de donde:

$$(24) \quad df(a; \mathbf{u}_i) = \lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{f(a + \mathbf{u}_i dx_i) - f(a)}{dx_i}.$$

Como la expresión del segundo miembro de (24) recuerda a la expresión (9) de una derivada, a $df(a, \mathbf{u}_i)$ se le llama *vector derivado parcial del vector $\mathbf{x}^*$ respecto de la variable x_i* , y se representa por:

$$(25) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{f(a + \mathbf{u}_i dx_i) - f(a)}{dx_i}.$$

Por consiguiente, la expresión (23) se podrá escribir en la siguiente forma:

$$(26) \quad df(a, d\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} dx_n.$$

Recordando que $x_i^*(\mathbf{x})$ es una aplicación de A en $\mathbb{R}$ y aplicando (26) a esta aplicación, se obtiene:

$$(27) \quad dx_i^*(a, d\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial x_1} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} dx_n, \quad (i = 1, \dots, m).$$

o lo equivalente: dado un número positivo arbitrario, ϵ , existe otro número positivo, δ_1 , tal que

$$(81) \quad \frac{|g(\mathbf{b} + d\mathbf{x}^*) - g(\mathbf{b}) - dg(\mathbf{b}, d\mathbf{x}^*)|}{|d\mathbf{x}^*|} < \epsilon,$$

para todo $d\mathbf{x}^*$ tal que $|d\mathbf{x}^*| < \delta_1$, $d\mathbf{x}^* \neq 0$. Ahora bien, siendo las aplicaciones $g(\mathbf{b} + d\mathbf{x}^*)$ y $dg(\mathbf{b}, d\mathbf{x}^*)$ continuas para $d\mathbf{x}^* = 0$, puede suprimirse la restricción $d\mathbf{x}^* \neq 0$ para el numerador de (81), pero no así para el denominador. Ahora bien, siendo $df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})$ una aplicación continua para $d\mathbf{x} = 0$, se verifica que existe un número δ_2 , positivo, tal que, para todo $d\mathbf{x}$ tal que $|d\mathbf{x}| < \delta_2$, se verifique que

$$(82) \quad |df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})| < \delta_1.$$

Sea $\delta = \min. \{\delta_1, \delta_2\}$. De (81) y (82) se deduce que, para todo $d\mathbf{x}$ tal que $|d\mathbf{x}| < \delta$, $d\mathbf{x} \neq 0$, se verifica que:

$$\frac{|g(f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a})) - dg(f(\mathbf{a}), df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}))|}{|d\mathbf{x}|} < \epsilon,$$

o bien:

$$(83) \quad \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{g(f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a})) - dg(f(\mathbf{a}), df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}))}{|d\mathbf{x}|} = 0.$$

Ahora bien, por ser $f(\mathbf{x})$ diferenciable en $\mathbf{a}$ es

$$\lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) = \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} [f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})]$$

y por ser g una aplicación continua en $\mathbf{a}$ es:

$$(84) \quad \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} g(f(\mathbf{a} + d\mathbf{x})) = \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} g(f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})),$$

luego, sustituyendo (84) en (83), resulta:

$$(85) \quad \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - h(\mathbf{a}) - dg(f(\mathbf{a}), df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}))}{|d\mathbf{x}|} = 0.$$

Finalmente, la aplicación $dg(f(\mathbf{a}), df(\mathbf{a}, d\mathbf{x}))$ es el producto del homomorfismo $df(\mathbf{a}, d\mathbf{x})$ por el homomorfismo $dg(\mathbf{b}, d\mathbf{x}^*)$ y, por tanto, otro homomorfismo (60, 8, § 1, cap. II), luego la unicidad de la diferencial establece

ce, en virtud de (35), que la diferencial de la aplicación h es $dg(f(\mathbf{a}); d\mathbf{f}(\mathbf{a}, d\mathbf{x}))$.

DIFERENCIAL DE LA APLICACIÓN INVERSA.—Se llama aplicación idéntica de V_n sobre V_n a la aplicación I tal que, para todo $\mathbf{x} \in V_n$, se verifica que $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. En el caso particular de homomorfismos, la aplicación recibe el nombre de homomorfismo idéntico.

6. *La diferencial de la aplicación idéntica es el homomorfismo idéntico.*

DEMOSTRACIÓN.—Recordando que $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}$, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{I(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - I(\mathbf{a}) - dI(\mathbf{a}, d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} &= 0 \Leftrightarrow \\ \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x} - dI(\mathbf{a}, d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} &= 0 \Rightarrow d\mathbf{x} = dI(\mathbf{a}, d\mathbf{x}), \\ \Rightarrow d\mathbf{x} &= dI(\mathbf{a}, d\mathbf{x}), \quad \text{siendo} \quad d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}| \mathbf{u}, \\ &\text{q. e. d.} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.—La aplicación g , de $\text{im}(f)$ en V_n , se llama *aplicación inversa* de la aplicación f de A en V_m , siendo A un abierto de V_n , cuando, para todo $\mathbf{x} \in A$ se verifica que

$$(36) \quad gf(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Sea $\mathbf{y}$ un vector arbitrario de $\text{im}(f)$ y sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ vectores de A tales que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') = \mathbf{y}$. De $gf(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, se deduce que $gf(\mathbf{x}) = gf(\mathbf{x}') = \mathbf{x} = \mathbf{x}'$, luego la aplicación f es inyectiva. Además, de $\mathbf{x} = gf(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y})$, se deduce que $fg(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{y} \in \text{im}(f)$ y de aquí, como antes, que g es una aplicación inyectiva. La aplicación f es, por tanto, biyectiva en A como consecuencia de poseer inversa.

Supongamos que la aplicación f posea inversa, g , en A :

$$(37) \quad gf = I, \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

De **5** y **6**, resulta:

7. *La diferencial de la aplicación inversa de una aplicación dada es el homomorfismo inverso de la diferencial de la aplicación dada. Esto es:*

$$(38) \quad dg(f(\mathbf{a}); d\mathbf{x}^*) = (df)^{-1}(\mathbf{a}; d\mathbf{x}). \quad d\mathbf{x}^* = df(\mathbf{a}; d\mathbf{x}).$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DE LA DIFERENCIAL DEL PRODUCTO DE APLICACIONES.—Sean las aplicaciones $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ y $\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$. Sea $\mathbf{z} = h(\mathbf{x}) = g f(\mathbf{x})$ la aplicación producto. Sean

$$(39) \quad d\mathbf{y} = d\mathbf{x} J_{\mathbf{a}}, \quad d\mathbf{z} = d\mathbf{y} J_{\mathbf{b}} \quad \text{siendo} \quad d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n),$$

$$d\mathbf{y} = (dy_1, \dots, dy_m), \quad d\mathbf{z} = (dz_1, \dots, dz_p), \quad J_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} & \dots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} & \dots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} & \dots & \left(\frac{\partial z_p}{\partial y_1}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_m}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} & \dots & \left(\frac{\partial z_p}{\partial y_m}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} \end{pmatrix},$$

las expresiones de las diferenciales de f y g en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$, respectivamente, respecto de las bases métricas $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, $B^* = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ y $B^{**} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$, respectivamente.

De (29) y (39) se deduce que la diferencial de h es:

$$(40) \quad dh(\mathbf{a}; d\mathbf{x}) = d\mathbf{z} = d\mathbf{x} J_{\mathbf{a}} J_{\mathbf{b}} = d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} & \dots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} & \dots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} & \dots & \left(\frac{\partial z_p}{\partial y_1}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_m}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} & \dots & \left(\frac{\partial z_p}{\partial y_m}\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

En el caso particular de ser tanto f como g funciones de una única variable, resulta:

$$(41) \quad dg f(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = f'(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{b}) d\mathbf{x}.$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DE LA DIFERENCIAL DE LA APLICACIÓN INVERSA DE UNA APLICACIÓN.—Dada la aplicación $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, supongamos que existe la aplicación inversa en un entorno de $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$. Sea

$$(42) \quad d\mathbf{y} = d\mathbf{x} J_{\mathbf{a}},$$

la expresión analítica de la diferencial de f en el vector $\mathbf{a}$. De (38) se deduce que la expresión analítica de la aplicación inversa será:

$$(43) \quad df^{-1}(f(\mathbf{a}), d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} = d\mathbf{y} J_{\mathbf{a}}^{-1},$$

en donde $J_{\mathbf{a}}^{-1}$ es la matriz inversa de $J_{\mathbf{a}}$.

En particular, si f es una función de una única variable,

$$(44) \quad d(f^{-1})_{y=a} = \frac{1}{f'(a)} dy.$$

4. Diferenciales de las funciones elementales.

1. $y = c$, siendo c un número real. $dy = 0 dx$.

2. $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$.

3. $d[cf(x)] = c df(x)$.

4. $z = g(f(x))$. $dz = f'(x) g'(f(x)) dx$.

5. $df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} dy$, $y = f(x)$.

6. $d \log |x| = \frac{dx}{x}$ (siendo $\log = \log$ neperiano).

DEMOSTRACIÓN DE 6.—

$$\begin{aligned} D \log |x| &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\log |x+dx| - \log |x|}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \log \left| 1 + \frac{dx}{x} \right| \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left| 1 + \frac{dx}{x} \right|^{\frac{x}{dx}} = \frac{1}{x} \log \lim_{dx \rightarrow 0} \left(1 + \frac{dx}{x} \right)^{\frac{x}{dx}} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

7. $d[f(x) \cdot g(x)] = f(x) dg(x) + g(x) df(x)$.

DEMOSTRACIÓN DE 7.— $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. $\log F(x) = \log f(x) + \log g(x)$. (Se supone, que $f(x) > 0$, $g(x) > 0$; en caso contrario se tomaría $-f(x)$, o $-g(x)$.) De 4 y 6 se deduce:

$$\frac{1}{F(x)} dF(x) = \frac{1}{f(x)} df(x) + \frac{1}{g(x)} dg(x),$$

y, multiplicando por $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, resulta:

$$df(x) = F(x) dg(x) + g(x) dF(x),$$

8.

$$d \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) df(x) - f(x) dg(x)}{g^2(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN DE 8.—De $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se deduce, $f(x) = F(x) g(x)$ y, teniendo en cuenta 7,

$$df(x) = F(x) dg(x) + g(x) dF(x),$$

de donde,

$$dF(x) = \frac{df(x) - \frac{f(x)}{g(x)} dg(x)}{g(x)} = \frac{g(x) df(x) - f(x) dg(x)}{g^2(x)}.$$

$$9. \quad d[f(x)^{g(x)}] = g(x) f(x)^{g(x)-1} df(x) + f(x)^{g(x)} \log f(x) dg(x).$$

DEMOSTRACIÓN DE 9.—Sea $F(x) = f(x)^{g(x)}$, de donde $\log F(x) = g(x) \log f(x)$, y teniendo en cuenta 7, 4 y 6, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x)} dF(x) &= g(x) \frac{1}{f(x)} df(x) + \log f(x) dg(x), \\ dF(x) &= g(x) f(x)^{g(x)-1} df(x) + f(x)^{g(x)} \log f(x) dg(x). \end{aligned}$$

$$10. \quad d(f^a(x)) = a f^{a-1}(x) df(x).$$

Basta hacer $g(x) = a$, siendo a un número real, en 9.

$$11. \quad dx^a = a x^{a-1} dx.$$

$$12. \quad d(a^{g(x)}) = a^{g(x)} \log a \cdot dg(x).$$

$$13. \quad d(a^x) = a^x \log a \cdot dx.$$

$$14. \quad d(e^x) = e^x dx.$$

$$15. \quad d(\log_a x) = \frac{1}{x \log a} = \frac{\log_a e}{x}.$$

$$16. \quad d \sin x = \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{DEMOSTRACIÓN DE 16.} \quad D \sin x &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sin(x+dx) - \sin x}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \\ \frac{2 \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

$$17. \quad d \cos x = -\sin x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{DEMOSTRACIÓN DE 17.} \quad d \cos x &= d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\sin x dx. \end{aligned}$$

$$18. \quad d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx.$$

$$19. \quad d \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx.$$

$$20. \quad d \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{dx}{\pm \sqrt{1-x^2}}$$

$$21. \quad d \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = \frac{dx}{\mp \sqrt{1-x^2}}$$

$$22. \quad d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$23. \quad d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$24. \quad d \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x.$$

$$25. \quad d \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x.$$

$$26. \quad d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th}^2 x) dx.$$

$$27. \quad d \operatorname{cotgh} x = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = (1 - \operatorname{cotgh}^2 x) dx.$$

$$28. \quad d \operatorname{arg} \operatorname{sh} x = \frac{dx}{\pm \sqrt{1+x^2}}$$

$$29. \quad d \operatorname{arg} \operatorname{ch} x = \frac{dx}{\pm \sqrt{x^2-1}}$$

$$30. \quad d \operatorname{arg} \operatorname{th} x = \frac{dx}{1-x^2} = d \operatorname{arg} \operatorname{coth} x.$$

EJERCICIOS:

841. Calcular las diferenciales de las siguientes funciones: a) $y = x^5$. b) $y = 3x^4$. c) $y = 2 - 3x + 2x^2 - 4x^3 + x^5$. d) $y = \frac{1}{x^3}$. e) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$. j) $y = \frac{2x^4 - x^2 + x - 1}{x^3 + 4x^2 + 2}$

842. Calcular las diferenciales de las siguientes funciones: a) $y = \sqrt{x}$. b) $y = \sqrt[3]{x^2}$. c)

$$y = \sqrt[5]{2x^2 - 3x + 1}. \quad d) \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}. \quad e) \quad y = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x} \sqrt[6]{x}}. \quad f) \quad y = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$$

$$g) \quad y = \frac{\sqrt[4]{x-1} \sqrt[6]{x+1} \sqrt[12]{4x+4}}{\sqrt[8]{x^2-1}}.$$

843. Calcular las diferenciales de las siguientes funciones: a) $y = \operatorname{sen}(2x + 1)$. b) $y = \operatorname{sen} x \cos x$. c) $y = \cos(x^3 - 1)$. d) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(3x + 4)$. e) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$. f)

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x). \quad g) \quad y = 2 \operatorname{tg} 2x - \frac{16 \operatorname{sen} x \cos x}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}}.$$

844. Calcular las diferenciales de las siguientes aplicaciones: a) $y = \log(3x + 1)$. b) $y = \log \operatorname{sen} x$. c) $y = \sqrt{\log x}$. d) $y = \log(\log x) = \log^2 x$. e) $y = \log^n x$. f) $y = \log \operatorname{arctg} x$. g) $y = e^{x^2 + \operatorname{sen}(x^3 - 1)}$. h) $y = \operatorname{sen} \log(\sqrt[3]{x-1})$.

$$i) \quad y = \operatorname{sen} \operatorname{arg} \operatorname{ch} x + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\log \operatorname{sen} x}}}$$

845. Calcular la diferencial de la siguiente función en el punto a : a) $y = Lx$, $a = 100$ ($L = \log$, decimal). b) $y = \sqrt{2x-1}$, $a = 5$. c) $y = \sqrt[3]{(3x^2 - 5x - 1)^5}$, $a = 5$. d) $y = \operatorname{sen} \log(3x + 2)$, $a = -\frac{1}{3}$. e) $y = \log \operatorname{arctg}(5x - 2)$, $a = \frac{3}{5}$. f) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen}$

$$\sqrt{1 - 4x^2}, \quad a = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

846. Escribir las ecuaciones de las tangentes a las siguientes curvas en el punto a : a) $y = 2x^3 - x^2 + 1$, $a = 1$. b) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$, $\sqrt[3]{x^2 + x - 2}$, $\sqrt[3]{x + 2}$, $a = 3$. c) $y = \arctg \sqrt[4]{2x^3 - x + 2}$, $a = 2$. d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$, $a = 2$.

847. Calcular las diferenciales de las siguientes funciones en el punto a : a) $z = x^3 - 2x^2y + xy - y^2 + 2$, $a = (1, 2)$. b) $z = x_1^2 + 3x_1x_2x_3 - x_1^2x_3 + 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 1$, $a = (-1, 1, 2)$. c) $z = \sqrt{3x^3 - 2y^2}$, $a = (3, -2)$. d) $z = \log(x^2 - 3xy + 4y)$, $a = (2, 1)$. e) $z = e^{x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 31}$, $a = (1, 3)$. f) $z = \sin \sqrt[3]{3xy^2 + 2x + y} + \log(x^2 - xy + 4y)$, $a = \left(\frac{\pi^3 - 1}{5}, 1 \right)$.

848. Calcular las diferenciales de las siguientes aplicaciones en el punto x : a) $z = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}$. b) $y = \sin(x_1 + 2x_2) + \cos(3x_3 + 4x_4)$. c) $y = \sin(x_1 + \cos(x_2 + \sin(x_3 + \cos(x_4))))$. d) $y = \log(x_1 + \log(x_2 + \log(x_3)))$. e) $y = \arctg(x_1 \sin(x_2 + \sqrt{x_3 \log x_4}))$.

849. Calcular las diferenciales de las siguientes aplicaciones en el punto a : a) $x_1^* = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2$, $x_2^* = x_1 + 3x_2^2$, $a = (1, -3)$. b) $x_1^* = x_1^4 - x_2 + x_3$, $x_2^* = x_1x_2x_3 - x_2^2 + x_3^2$, $a = (1, -1, 2)$. c) $x_1^* = 2x_1^2 + 1 + 4x_2x_1$, $x_2^* = x_1^3 + 3x_1^2x_2$, $x_3^* = 3x_1 + 1 + 3x_2$; $a = (2, 3)$; $b = (2, 0)$. d) $x_1^* = \cos x_1 \sin x_2$, $x_2^* = \sin x_1 \sin x_2$, $x_3^* = \cos x_2$, $a = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$.

850. Calcular las diferenciales de las siguientes aplicaciones en el punto x : a) $x_1^* = x_1^4 - 2x_2$, $x_2^* = x_1x_2^2 + x_1$, $x_3^* = 2x_1x_2 - x_1 + 2x_2$. b) $x_1^* = \cos x$, $x_2^* = \sin x$, $x_3^* = x$. c) $x_1^* = x$, $x_2^* = x^2$, $x_3^* = x^3$. d) $x_1^* = \log(x_1^2 + x_2^2)$, $x_2^* = \arctg(x_1^2 + x_2^2)$, $x_3^* = e^{x_1^2 + x_2^2}$. e) $F = g \circ f$; $f: y_1 = x_1^2 - 2x_1x_2$, $y_2 = \sqrt{x_1x_2}$; $g: x_1^* = \log(y_1 + y_2)$, $x_2^* = \sqrt[3]{2y_1 + 3y_2}$, $x_3^* = y_1^2 - 4y_2^2$.

851. Dada la aplicación $x^* = f(x)$, diferenciable en a , se llama *variedad tangente* en a a la variedad representada por las ecuaciones explícitas $x^* = f(x)$, en el punto a , a la variedad $x^* - f(a) = (x - a)J$, siendo J la matriz jacobiana de la diferencial en a . Escribir las variedades tangentes en a a las siguientes variedades: a) $x_1^* = x^2$, $x_2^* = x^3$, $a = 2$. b) $x_1^* = 2 \cos x$, $x_2^* = 3 \sin x$, $a = \frac{\pi}{6}$. c) $x_1^* = \frac{2}{x^2 + 1}$, $x_2^* = \frac{3x}{x^2 + 1}$, $a = 1$. d) $x_1^* = \frac{x^2 - 1}{x^3}$, $x_2^* = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $a = 2$. e) $x_1^* = x$, $x_2^* = x^2$, $x_3^* = x^3$, $a = 3$. f) $x_1^* = \cos x$, $x_2^* = \sin x$, $x_3^* = x$, $x = \frac{\pi}{6}$. g) $x_1^* = \frac{1}{x^4}$, $x_2^* = \frac{1+x}{x^3}$, $x_3^* = \frac{1-x}{x}$, $a = 2$. h) $x_1^* = 2x_1 + 5x_2$, $x_2^* = x_1^2 - 4x_2$, $x_3^* = x_1x_2 + 3x_1$, $a = (1, 2)$. i) $x_1^* = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} - \frac{x_1^2 - 1}{x_1}x_2$, $x_2^* = 3x_2$, $x_3^* = \frac{x_1^2 - 1}{x_1} - \frac{x_1^2 + 1}{x_1}x_2$, $a = (1, 3)$. j) $x_1^* = 2 \frac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2} + 5x_2$, $x_2^* = \frac{6x_1}{1 + x_1^2} + 3x_2$, $x_3^* = -\frac{4x_1^2 + 24x_1}{1 + x_1^2} - 2x_2$, $x = (x_1, x_2)$.

852. Hallar las ecuaciones implícitas de las variedades tangentes del ejercicio anterior.

853. Calcular la diferencial en a de la función F , producto de las siguientes funciones:

a) $F = g \circ f$; $f: y_1 = x_1^2 - x_2$, $y_2 = 2x_1 + x_2^3$; $g: x_1^* = \frac{y_1}{y_2}$, $x_2^* = y_1 - y_2$, $a = (2, 3)$.

b) $F = h g f$; $f: y = 2x_1 + x_2^3$; $g: z_1 = 2y - 3, z_2 = \frac{1}{y}$; $h: x_1^* = z_1 - z_2, x_2^* = \frac{z_2}{1 + z_1}$, $x_3^* = z_1 z_2$; $a = (3, -1)$. c) $F = k h g f$; $f: y_1 = x_1 - 2x_2, y_2 = x_1 x_3$; $g: z = y_1 y_2$; $h: t_1 = \sqrt{z}, t_2 = z + 2, t_3 = z^2$; $k: x_1^* = t_1 - t_2, x_2^* = t_2 - t_3, x_3^* = t_1 t_2 t_3$. $a = (1, -1, 2)$.

§ 2. ESTUDIO LOCAL DE LAS FUNCIONES DE VARIABLES REALES

La diferencial de una aplicación f proporciona una primera aproximación de f en el entorno del punto a , pero esta aproximación no es suficiente en algunos casos, por lo que interesa disponer de un proceso que permita estudiar una aplicación, en el entorno de uno de los puntos a en que está definida, con tanta aproximación como se desee. Esto no es posible para una aplicación arbitraria, pero sí para una familia suficientemente amplia de aplicaciones. La finalidad de este § es la de aproximar una aplicación dada, en el entorno de uno de sus puntos, mediante aplicaciones definidas mediante polinomios, de modo que la aproximación sea tan buena como se desee.

1. Diferenciales sucesivas de una aplicación.—Sea f una aplicación de un abierto A de E_n en E_m , diferenciable en todos los puntos x de A . La diferencial $df(x, d\mathbf{x})$ es entonces una aplicación de $A \times E_n$ en E_m :

$$(1) \quad A \times E_n \xrightarrow{df(x, d\mathbf{x})} E_m,$$

lineal respecto del vector $d\mathbf{x}$. Considerando $df(x, d\mathbf{x})$ como aplicación de A en E_m :

$$(2) \quad A \xrightarrow{df(x, d\mathbf{x})} E_m,$$

se puede aplicarle la definición de diferencial: $d(df(x; d\mathbf{x}; d\mathbf{y}))$, como una aplicación lineal, respecto del vector $d\mathbf{y}$, de E_n en E_m , tal que:

$$(3) \quad \lim_{d\mathbf{y} \rightarrow 0} \frac{df(x + d\mathbf{y}; d\mathbf{x}) - df(x; d\mathbf{x}) - d(df(x; d\mathbf{x}; d\mathbf{y}))}{|d\mathbf{y}|} = 0.$$

Si existe el homomorfismo $d(df(x, d\mathbf{x}; d\mathbf{y}))$ que verifica la condición (3), se dice que la diferencial $df(x, d\mathbf{x})$ es diferenciable en el vector x y a la aplicación que resulta de identificar los vectores $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{y}$ en $d(df(x, d\mathbf{x};$

$d\mathbf{y}$) se le llama *diferencial segunda de la aplicación f en el vector $\mathbf{x}$* , y se escribe:

$$(4) \quad d^2 f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = d(d f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; d\mathbf{x})),$$

en donde $d(d f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; d\mathbf{x}))$ es el resultado de sustituir $d\mathbf{y}$ por $d\mathbf{x}$ en $d(d f(\mathbf{x}, d\mathbf{x}; d\mathbf{y}))$ y éste es un homomorfismo respecto de $d\mathbf{y}$ que verifica la condición (3).

EXPRESIÓN ANALÍTICA DE LA DIFERENCIAL SEGUNDA.—Sea $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de V_n y $\mathbf{B}^* = \{\mathbf{u}^*_1, \dots, \mathbf{u}^*_m\}$ una base de V_m . Recordando la expresión de la diferencial de una aplicación respecto de unas bases:

$$(5) \quad \begin{aligned} d f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}) &= d f(\mathbf{x}; \mathbf{u}_1) d x_1 + \dots + d f(\mathbf{x}; \mathbf{u}_n) d x_n \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} d x_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} d x_n, \end{aligned}$$

resulta:

$$d(d f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; d\mathbf{y})) = d \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} d x_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} d x_n \right],$$

y por la linealidad del operador diferencial, recordando que la diferencial segunda se refiere a la aplicación (2), esto es, que $d\mathbf{x}$ se considera como constante,

$$(6) \quad d(d f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; d\mathbf{y})) = d \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) d x_1 + \dots + d \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) d x_n.$$

Ahora bien, aplicando (5) a $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, se obtiene:

$$(7) \quad d \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\partial x_1} d y_1 + \dots + \frac{\partial \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\partial x_n} d y_n.$$

NOTACIÓN.—Se pone:

$$(8) \quad \frac{\partial \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}(\mathbf{x}).$$

Por consiguiente, (7) se escribirá en la forma:

$$(9) \quad d \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_1} d y_1 + \dots + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_n} d y_n.$$

Ahora bien, si

$$(10) \quad \mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}) = x^*_1(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^*_m(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*_m,$$

resulta que

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= df(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = d[x^*_1(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^*_m(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*_m] \\ &= dx^*_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}^*_1 + \dots + dx^*_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}^*_m \\ &= \frac{\partial x^*_1}{\partial x_i} \mathbf{u}^*_1 + \dots + \frac{\partial x^*_m}{\partial x_i} \mathbf{u}^*_m, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} &= df_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}_j) = d \frac{\partial x^*_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \mathbf{u}^*_1 + \dots + d \frac{\partial x^*_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \mathbf{u}^*_m \\ &= \frac{\partial^2 x^*_1(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{u}^*_1 + \dots + \frac{\partial^2 x^*_m(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{u}^*_m, \end{aligned}$$

y sustituyendo en (9) y luego en (6), resulta:

$$(12) \quad \begin{aligned} d(df(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; d\mathbf{y})) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dy_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{u}^*_k \right) dx_i dy_j = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dy_j \right) \right] \mathbf{u}^*_k. \end{aligned}$$

Por consiguiente, llamando $d^2 \mathbf{x}^* = d^2 x^*_1 \mathbf{u}^*_1 + \dots + d^2 x^*_m \mathbf{u}^*_m$, a la diferencial segunda y recordando la definición (4), resulta, en virtud de (12),

$$(13) \quad d^2 \mathbf{x}^* = d^2 x^*_1 \mathbf{u}^*_1 + \dots + d^2 x^*_m \mathbf{u}^*_m = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dy_j \right] \mathbf{u}^*_k,$$

de donde:

$$(14) \quad d^2 x^*_k = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dy_j = dx H_k dx',$$

en donde

$$(15) \quad dx = (dx_1, \dots, dx_n), \quad H_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 x^*_k(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

La matriz H_k se llama matriz *hessiana* de la aplicación $x^*_k = x^*_k(\mathbf{x})$. Obsérvese que las coordenadas, $d^2 x^*_k$, de la diferencial segunda son formas cuadráticas n -arias.

EJERCICIOS:

854. Calcular la diferencial segunda de las siguientes aplicaciones: a) $x^* = x^5 - 2x^3 + 1$. b) $x^* = \log x$. c) $x^* = \sin x$. d) $x^* = \arctg x$. e) $x^* = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. f) $x^* = \log^2 x$. g) $x^* = \exp(\sqrt{x})$. h) $x^* = \sin \exp(x^3)$. i) $x^* = \exp(\sqrt{\log \sin x})$.

855. Calcular la diferencial segunda de las siguientes aplicaciones: a) $x^* = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 2x_2^3$. b) $x^* = x_1 \log x_2$. c) $x^* = \exp(x_1 - \sin x_2)$. d) $x^* = a_{00} + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. e) $x^* = \log(\sin x_1 - \sqrt{x_2})$. f) $x^* = x_1^3 - x_1x_2x_3 + \log(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$. g) $x^*_1 = x^3$, $x^*_2 = x^4$. h) $x^*_1 = x_1^2 - x_1x_2$, $x^*_2 = 3x_1x_2 + x_2^2$.

DEFINICIÓN 1.—A la diferencial estudiada en el § 1 le llamaremos *diferencial de primer orden*, o *diferencial primera*. Supuesta existente la diferencial n -ésima, $d^n f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x})$ en todos los puntos de un abierto A de E_n , y considerándola como una aplicación de A en E_m :

$$A \xrightarrow{d^n f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x})} E_m,$$

si como tal aplicación es diferenciable, a su diferencial, cuando se identifique el vector variable con $d\mathbf{x}$, se le llama *diferencial de orden $n+1$* , o *diferencial $(n+1)$ -ésima*, y se representa por:

$$(16) \quad d^{n+1} f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x}) = d(d^n f(\mathbf{x}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x})).$$

1. Si f es una aplicación de A en $\mathbb{R}$, siendo A un abierto de E_n , y si existe la diferencial de orden n en A , se verifica que:

$$(17) \quad d^n f(\mathbf{x}) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in C_{n,m}} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m},$$

en donde $(i_1, \dots, i_m)$ recorre todas las combinaciones con repetición de los números $1, \dots, n$ tomados de m en m y

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \right).$$

DEMOSTRACIÓN.—La fórmula (17) es cierta para $m = 1$. Supongamos que es cierta para $m - 1$. De la definición (16), y por la linealidad de la diferencial, resulta:

$$\begin{aligned} d^m f(\mathbf{x}) &= d(d^{m-1} f(\mathbf{x})) = d \sum_{(i_1, \dots, i_{m-1}) \in \mathbb{C} R_{n, m-1}} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{m-1}} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{m-1}) \in \mathbb{C} R_{n, m-1}} \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}} \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{C} R_{n, m}} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}. \end{aligned}$$

2. Si existen y son continuas en un entorno $E(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ las dos derivadas parciales $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$, estas derivadas parciales son iguales en $\mathbf{x}$:

$$(18) \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

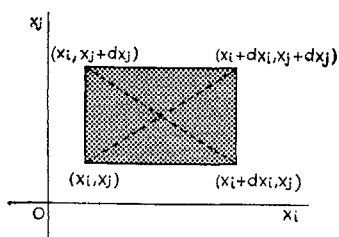


Fig. 102.

DEMOSTRACIÓN.—Tomando un rectángulo cerrado R , de vértices (x_i, x_j) , $(x_i + dx_i, x_j)$, $(x_i, x_j + dx_j)$, $(x_i + dx_i, x_j + dx_j)$, contenido en $E(\mathbf{x})$ (fig. 102), las funciones $f_{ij}(\mathbf{x})$

y $f_{ji}(\mathbf{x})$ consideradas como funciones de las únicas variables x_i y x_j , son uniformemente continuas en R (por ser R compacto) y como consecuencia, los límites

$$\lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{u}_i dx_i) - f(\mathbf{x})}{dx_i} \quad \text{y} \quad \lim_{dx_j \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{u}_j dx_j) - f(\mathbf{x})}{dx_j},$$

son uniformes en R y existe $\lim_{(dx_i, dx_j) \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{u}_i dx_i + \mathbf{u}_j dx_j) - f(\mathbf{x})}{\sqrt{dx_i^2 + dx_j^2}}$, luego,

(3, 2, § 4, V) los límites son permutables y se verifica (18).

3. Si es permutable el orden de derivación, la fórmula (17) se puede escribir del siguiente modo:

$$(19) \quad d^m f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n},$$

en donde $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ recorre todas las particiones de m en n sumandos.

EJERCICIOS:

856. Calcular las siguientes diferenciales: a) $d^3 f(x)$; $f(x) = x \log x$. b) $d^3 \exp(\sqrt{x})$.

857. Calcular las siguientes diferenciales: a) $d^3 f$; $f(\mathbf{x}) = x_1^3 + 2x_1x_2^2 + 3x_2^3$. b) $d^3(x_1^2x_2^2 + x_1x_3^2 + 2x_2^2x_3 + 3x_1x_2)$. c) $d^4(x_1^3x_2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_1^4 - x_2^4 + x_1x_2x_3)$. d) $d^3(\log x_1 + x_2^2x_3 - x_2^3 + x_3^3 + x_2^2x_4^2 - x_1^2x_4^2)$.

2. Teorema del valor medio.

1. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE ROLLE).—Si $y = f(x)$ es una función continua en el segmento cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) , y si $f(a) = f(b) = 0$, existe un punto c del intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.—1.º Si $f(x) = 0$, en todo el segmento $[a, b]$ el teorema es trivial. 2.º Si $f(x)$ no es nula en todo el segmento $[a, b]$, poseerá en él un máximo y un mínimo absolutos accesibles y uno de ellos, por lo menos, será distinto de cero. Sea, por ejemplo, (fig. 103), el máximo absoluto $M \neq 0$ y sea $M = f(c)$. De las hipótesis se deduce que $c \in (a, b)$ y que $M > 0$. Como $f(x)$ es derivable en c , será $f'(c) = f'(c + o) = f'(c - o)$; pero por ser M un máximo, es $f'(c + o) \leq 0$ y $f'(c - o) \geq 0$, de donde $f'(c) = 0$.

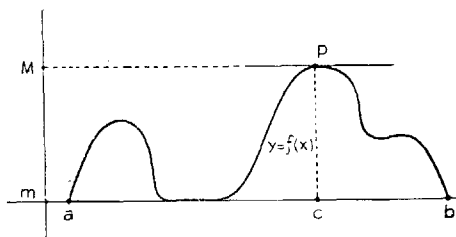


Fig. 103.

2. (TEOREMA DEL VALOR MEDIO. PRIMER ENUNCIADO).—Si $y = f(x)$ es una función continua en el segmento cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) , existe un punto c de este intervalo tal que:

$$1) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. (TEOREMA DE VALOR MEDIO. SEGUNDO ENUNCIADO).—Si $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ son dos funciones continuas en el segmento $[a, b]$ y derivables en el intervalo (a, b) , existe un punto c de (a, b) tal que:

$$(2) \quad \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

DEMOSTRACIÓN.—El primer enunciado es un caso particular del segundo cuando se pone $x = t$, $y = f(t)$,

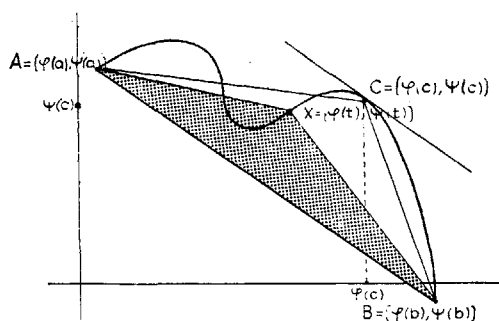


Fig. 104.

por lo que basta demostrar este último. Consideremos los puntos $A = (\varphi(a), \psi(a))$, $B = (\varphi(b), \psi(b))$ y $X = (\varphi(t), \psi(t))$, $a < t < b$. El área del triángulo $\triangle ABX$ (fig. 104) es función de t y la representaremos por $F(t)$:

$$(2') \quad F(t) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) & 1 \\ \varphi(a) & \psi(a) & 1 \\ \varphi(b) & \psi(b) & 1 \end{vmatrix}.$$

Si en (2') hacemos $t = a$, el segundo miembro tendrá la primera fila igual a la segunda, por lo que $F(a) = 0$. Si hacemos $t = b$, la primera fila será igual a la tercera, por lo que $F(b) = 0$. Por otra parte, desarrollando el determinante, resulta:

$$(3) \quad F(t) = \frac{1}{2} [\psi(a) - \psi(b)] \varphi(t) - \frac{1}{2} [\varphi(a) - \varphi(b)] \psi(t) + \frac{1}{2} [\varphi(a)\psi(b) - \psi(a)\varphi(b)].$$

Como $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son derivables en (a, b) , también lo es, en virtud de (3), $F(t)$. Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, por lo que existirá un punto c , $a < c < b$, tal que $F'(c) = 0$. Derivando en (3) y haciendo $t = c$, se obtiene:

$$0 = F'(c) = \frac{1}{2} [\psi(a) - \psi(b)] \varphi'(c) - \frac{1}{2} [\varphi(a) - \varphi(b)] \psi'(c).$$

De donde resulta inmediatamente (2).

4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.— $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pueden considerarse como las ecuaciones de una curva (fig. 104). A y B son los extremos de un arco de esta curva. La cuerda AB tiene por ecuación

$$y - \psi(a) = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} (x - \varphi(a));$$

luego el segundo miembro de la igualdad (2) es la pendiente de la cuer-

da A B. La ecuación de la cuerda X X', siendo $X' = (\varphi(t + \Delta t), \psi(t + \Delta t))$, será:

$$y - \psi(t) = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)} (x - \varphi(t)).$$

Dividiendo numerador y denominador de la fracción del segundo miembro por Δt y haciendo tender Δt a cero, la cuerda X X' se transformará en la tangente en X a la curva, es decir, la ecuación de esta tangente será:

$$(4) \quad y - \psi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} (x - \varphi(t)).$$

Esto nos dice que el primer miembro de la igualdad (2) representa la pendiente de la tangente a la curva en el punto c . Por consiguiente, el teorema del valor medio puede enunciarse geoméricamente así: *si A y B son los extremos de un arco de curva derivable, existe un punto intermedio de este arco en el que la tangente a la curva es paralela a la cuerda A B.*

En la práctica es corriente usar las relaciones (1) y (2) en una forma algo distinta. De $a < c < b$ se deduce que $c = a + \theta(b - a)$, siendo $0 < \theta < 1$, con lo que (1) se podrá escribir así:

$$(5) \quad f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + \theta(b - a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Llamando h a $b - a$, resulta:

$$(6) \quad f(b) = f(a) + hf'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1;$$

y la igualdad (2) se escribirá:

$$(7) \quad \frac{\psi(a + h) - \psi(a)}{\varphi(a + h) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(a + \theta h)}{\varphi'(a + \theta h)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Todavía, poniendo $a = x$, $h = dx$, (6) y (7) se pueden escribir, respectivamente, así:

$$(8) \quad f(x + dx) = f(x) + dx f'(x + \theta dx), \quad 0 < \theta < 1,$$

$$(9) \quad \frac{\psi(x + dx) - \psi(x)}{\varphi(x + dx) - \varphi(x)} = \frac{\psi'(x + \theta dx)}{\varphi'(x + \theta dx)}, \quad 0 < \theta < 1,$$

que son todas las formas más usuales de emplear el teorema del valor medio.

5. LÍMITES INDETERMINADOS.—El teorema del valor medio es uno de los teoremas básicos del cálculo diferencial. Vamos a estudiar ahora una primera aplicación del mismo al cálculo de límites indeterminados. Consideremos dos funciones derivables y con derivadas continuas en el punto a , $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, que se anulan para $x = a$, es decir: $\varphi(a) = \psi(a) = 0$. La función $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ no está, por tanto, definida en el punto a ; sin embargo, puede existir el límite cuando $x \rightarrow a$. El teorema del valor medio puede permitir el cálculo de este límite. En efecto:

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{\psi(a+h) - \psi(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Obsérvese que para la validez de esta cadena de igualdades es esencial que $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, pues de otro modo no sería siempre cierta la segunda igualdad. Si $\psi'(a) = \varphi'(a) = 0$, siendo $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ derivables en a , y con derivadas continuas se podría volver a aplicar la igualdad (10) a $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, y así sucesivamente. La igualdad (10) es conocida con el nombre de *regla de l'Hôpital*.

La regla (10) es también válida cuando $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, es decir, se verifica que si $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, y si existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ es:

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

EJERCICIO:

858. Demostrar (11).

También pueden calcularse, mediante (10), los límites:

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) \psi(x), \quad \text{siendo} \quad \varphi(a) = 0, \psi(a) = \infty,$$

ya que

$$\varphi(x) \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}.$$

Lo mismo sucede con los límites de la forma $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)^{\psi(x)}$, siendo $\varphi(a) = 1$, $\psi(a) = \infty$, ya que $\log \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \cdot \log \varphi(x)$, con lo que nos encontramos en el caso (12).

Otras expresiones indeterminadas son las de la forma $\varphi(x) - \psi(x)$, cuando $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, que se reducen al caso (10) sin más que poner:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}}.$$

EJERCICIO:

859. Calcular los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$. c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$. d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$. e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}\right)$.

DEFINICIÓN 1.—Si h es un homomorfismo del espacio vectorial euclídeo V_n en el espacio vectorial euclídeo V_m , se llama *norma* del homomorfismo h , y se representa por $\|h\|$ al número real no negativo:

$$(13) \quad \|h\| = \text{ext. sup.} \left\{ \frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n}$$

6. La norma de los homomorfismos entre dos espacios vectoriales posee las siguientes propiedades:

1. Si λ es un número real y h un homomorfismo: $\|\lambda h(\mathbf{x})\| = |\lambda| \|h(\mathbf{x})\|$.

2. Si h y k son dos homomorfismos de V_n en V_m : $\|h + k\| \leq \|h\| + \|k\|$.

3. $\|h\| = 0 \iff h = 0$.

4. $\|hk\| \leq \|h\| \cdot \|k\|$, siendo k un homomorfismo de V_n sobre V_m y h un homomorfismo de V_m en V_p .

DEMOSTRACIÓN.—1. $\|\lambda h(\mathbf{x})\| = \text{ext. sup.} \left\{ \frac{|\lambda h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} = \text{ext. sup.} \left\{ \frac{|\lambda| |h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} = |\lambda| \cdot \text{ext. sup.} \left\{ \frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} = |\lambda| \cdot \|h\|$.

2. De $|(h+k)(\mathbf{x})| = |h(\mathbf{x}) + k(\mathbf{x})| \leq |h(\mathbf{x})| + |k(\mathbf{x})|$ se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{|(h+k)(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} &\leq \frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} + \frac{|k(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \text{ de donde, ext. sup. } \left\{ \frac{|(h+k)(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} \\ &\leq \text{ext. sup.} \left\{ \frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} + \text{ext. sup.} \left\{ \frac{|k(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} \end{aligned}$$

3. Si $h = 0$, será $h(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x}$, luego $\frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0$, $\forall \mathbf{x} \neq 0$.

$$\text{ext. sup. } \left\{ \frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} = 0 \Rightarrow \frac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0, \forall \mathbf{x} \Rightarrow |h(\mathbf{x})| = 0, \forall \mathbf{x} \\ \Rightarrow h(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x}.$$

$$4. \|h\| = \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|h(k(\mathbf{x}))|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} = \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|h(k(\mathbf{x}))|}{|k(\mathbf{x})|} \cdot \frac{|k(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} \\ \leq \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|h(k(\mathbf{x}))|}{|k(\mathbf{x})|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} \cdot \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|k(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n}$$

Ahora bien, se verifica que $\text{ext. sup. } \left\{ \frac{|h(k(\mathbf{x}))|}{|k(\mathbf{x})|} \right\}_{\mathbf{x} \in V_n} \leq \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|h(\mathbf{x}^*)|}{|\mathbf{x}^*|} \right\}_{\mathbf{x}^* \in V_m}$

EJERCICIO:

860. Calcular la norma de las siguientes aplicaciones lineales: a) $x^* = a x$. b) $x^*_1 = a_1 x$, $x^*_2 = a_2 x$, $x^*_3 = a_3 x$. c) $x^* = a x_1 + b x_2$.

Siendo las diferenciales homomorfismos, poseerán norma. En el caso particular de la diferencial de una aplicación f de V_1 en V_m , se verifica que

$$(14) \quad \|df(x)\| = \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|df(x, dx)|}{|dx|} \right\}_{dx \in \mathbb{R}} = |df(x, 1)| = |Df(x)| \\ = \sqrt{f_1'^2(x) + \dots + f_m'^2(x)}.$$

Para las aplicaciones f de V_n en V_1 , se verifica que

$$(15) \quad \|df(\mathbf{x})\| = \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|df(\mathbf{x}, d\mathbf{x})|}{|d\mathbf{x}|} \right\}_{d\mathbf{x} \in V_n} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}.$$

7. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA $V_1 \xrightarrow{f} V_m$.—Sea f una aplicación de V_1 en V_m , diferenciable en un entorno $E_\varepsilon(a)$, de radio ε , del punto a , tal que $\|df(x, dx)\| \leq c$, $\forall x \in E_\varepsilon(a)$. Para todo $a + dx \in E_\varepsilon(a)$ se verifica que

$$(16) \quad |f(a + dx) - f(a)| \leq c \sqrt{m} |dx|.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B^*\{\mathbf{u}^*_1, \dots, \mathbf{u}^*_m\}$ una base de V_m y $f(x) = x^*_1(x) \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^*_m(x) \mathbf{u}^*_m$, de donde: $df(x, dx) = x^{*'}_1(x) dx \mathbf{u}^*_1 + \dots + x^{*'}_m(x) dx \mathbf{u}^*_m$. Por ser las aplicaciones $V_1 \xrightarrow{x^*_i} V_1$ diferenciables para todo $x = a + dx \in E_\varepsilon(a)$, se verifica, en virtud de (5):

$$(17) \quad x^*_i(a + dx) - x^*_i(a) = dx \cdot x^{*'}_i(a + \theta_i dx), \quad 0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ahora bien, de $a < a + \theta_i dx < a + dx$, se deduce que $a + \theta_i dx \in E_\varepsilon(a)$, $i = 1, \dots, n$, luego, en virtud de la hipótesis y de (14), se deduce:

$$\|df(a + \theta_i dx, dx)\| = \|Df(a + \theta_i dx)\| = \sqrt{x_1'^2(a + \theta_i dx) + \dots + x_n'^2(a + \theta_i dx)} \leq c,$$

y como $|x_i^{*'}(a + \theta_i dx)| \leq \sqrt{x_1'^2(a + \theta_i dx) + \dots + x_n'^2(a + \theta_i dx)}$, resulta que $|x_i^*(a + dx) - x_i^*(a)| \leq |dx| c$, luego:

$$|f(a + dx) - f(a)| = \sqrt{[x_1^*(a + dx) - x_1^*(a)]^2 + \dots + [x_n^*(a + dx) - x_n^*(a)]^2} \leq c \sqrt{m} |dx|.$$

8. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA $V_n \xrightarrow{f} V_m$.—Sea $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x})$ una aplicación del abierto A de V_n en V_m . Sea $\mathbf{a}$ un vector de A y $E_\varepsilon(\mathbf{a})$ un entorno intervalo de $\mathbf{a}$, y $\mathbf{a} + d\mathbf{x} \in E_\varepsilon(\mathbf{a})$.

Si $f(\mathbf{x})$ es diferenciable en $E_\varepsilon(\mathbf{a})$ y si $\|df(\mathbf{x}, d\mathbf{x})\| \leq c$ para todo $\mathbf{x} \in E_\varepsilon(\mathbf{a})$, se verifica que

$$(18) \quad |f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| \leq c \sqrt{m} |d\mathbf{x}|, \quad \mathbf{a} + d\mathbf{x} \in E_\varepsilon(\mathbf{a}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $V_1 \xrightarrow{g} V_n$ una aplicación de V_1 en V_n definida por:

$$(19) \quad g(t) = \mathbf{a} + t d\mathbf{x}.$$

La aplicación producto fg :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{g} & V_n \\ fg \searrow & & \swarrow f \\ & V_m & \end{array}$$

es una aplicación de V_1 en V_m , y como tanto g como f son diferenciables, resulta que fg es diferenciable en un torno de 0 que contiene al segmento $[0, 1]$. Del teorema de la diferencial de la función producto de dos funciones se deduce que $d(fg(t)) = df(\mathbf{x}) \circ dg(t) = df(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} \cdot dt$, y por la propiedad 4, de la norma:

$$\|d(fg(t))\| \leq \|df(\mathbf{x})\| \cdot \|d\mathbf{x} \cdot dt\| = \|df(\mathbf{x})\| \cdot |d\mathbf{x}|.$$

Como, por hipótesis, es $\|df(\mathbf{x})\| \leq c$, será: $\|d(fg(t))\| \leq c |d\mathbf{x}|$, $\forall t \in [0, 1]$, luego, aplicando (16) para $a = 0$, $dx = 1$, y teniendo en cuenta que $g(1) = \mathbf{a} + d\mathbf{x}$, $g(0) = \mathbf{a}$, resulta que

$$|f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| \leq c \sqrt{m} |d\mathbf{x}| \cdot 1 = c \sqrt{m} |d\mathbf{x}|.$$

3. El teorema de Taylor.

LEMA 1.— $d|\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

DEMOSTRACIÓN.

$$d|\mathbf{x}| = d\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \frac{x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Sea $V_1 \xrightarrow{f} V_1$ una aplicación de un abierto A de $V_1 = \mathbb{R}$ en $V_1 = \mathbb{R}$. Sea $a \in A$ un punto de A y supongamos que f admite diferencial $n + 1$ -ésima, continua en un entorno $E_\varepsilon(a)$ y no nula en a . Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio de grado n .

DEFINICIÓN 1.—Se dice que la medida de la aproximación del polinomio $P(x)$ a la aplicación $f(x)$ en un entorno del punto a es igual a r , y se escribe

$$\text{med. aprox. } (P(x), f(x))_a = r,$$

cuando

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a + dx) - P(a + dx)}{dx^r} = c \neq 0.$$

1. TEOREMA DE TAYLOR.—Si f es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con diferencial $n + 1$ -ésima no nula en a y continua en un entorno $E_\varepsilon(a)$, existe un polinomio único $P(x)$ de grado n tal que

$$(2) \quad \text{med. aprox. } (P(x), f(x))_a = n + 1.$$

DEMOSTRACIÓN.—1.º *Unicidad*. Supongamos que exista un polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, de grado n , que verifique la condición (2). Poniendo

$$(3) \quad o(dx) = \frac{f(a + dx) - P(a + dx) - c dx^{n+1}}{dx^{n+1}}$$

se verifica, en virtud de (2), que

$$(4) \quad \lim_{dx \rightarrow 0} o(dx) = 0$$

De $f(a + dx) - P(a + dx) = c dx^{n+1} + o(dx) dx^{n+1} = O(dx) dx^{n+1}$, siendo $\lim_{dx \rightarrow 0} O(dx) = c \neq 0$, se deduce, derivando respecto de la variable dx ,

$$\begin{aligned} f^{(r)}(a + dx) - P^{(r)}(a + dx) = \\ = [(n+1) \dots (n+2-r) O(dx) dx^{n+1-r} + \dots + O^{(r)}(dx) dx^{n+1}], \end{aligned}$$

de donde resulta que $\lim_{dx \rightarrow 0} [f^{(r)}(a + dx) - P^{(r)}(a + dx)] = 0$, $r = 0, 1, \dots, n$ y $\lim_{dx \rightarrow 0} [f^{(n+1)}(a + dx) - P^{(n+1)}(a + dx)] \neq 0$. Por consiguiente,

$$(5) \quad \begin{cases} P(a) = f(a) \\ P'(a) = f'(a) \\ P''(a) = f''(a) \\ \dots\dots\dots \\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \end{cases}$$

Las ecuaciones (5) determinan unívocamente al polinomio $P(x)$. En efecto, poniendo $P(x) = a_0 + a_1(a + dx) + \dots + a_n(a + dx)^n = b_0 + b_1 dx + \dots + b_n dx^n = Q(dx)$, resulta que $P(a) = Q(0)$, $P'(a) = Q'(0)$, ..., $P^{(n)}(a) = Q^{(n)}(0)$, y como $Q(0) = b_0$, $Q'(0) = b_1$, ..., $Q^{(n)}(0) = n! b_n$, las ecuaciones (5) proporcionan:

$$(6) \quad b_0 = f(a), \quad b_1 = f'(a), \quad b_2 = \frac{1}{2} f''(a), \dots, \quad b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

luego:

$$\begin{aligned} (7) \quad Q(x) &= f(a) + f'(a) dx + \frac{1}{2} f''(a) dx^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) dx^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n. \end{aligned}$$

2.º *Existencia.* El polinomio (7) verifica la condición (2). En efecto, aplicando sucesivamente la regla de l'Hôpital, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a + dx) - \left[f(a) + f'(a) dx + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) dx^n \right]}{dx^{n+1}} = \\ \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(a + dx) - \left[f'(a) dx + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a) dx^{n-1} \right]}{(n+1) dx^n} = \dots \\ = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(a + dx)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = c \neq 0. \end{aligned}$$

2. COTA DEL ERROR.—Si $|f^{(n+1)}(x)| < c$, $\forall x \in [a, a + dx]$, se verifica que

$$(8) \quad \left| f(a + dx) - \left[f(a) + f'(a)dx + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) d^n x^n \right] \right| < c \frac{|dx|^{n+1}}{(n+1)!}$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $F(dx) = f(a + dx) - Q(dx) - \mu dx^{n+1}$, en donde μ se determina por la condición de que $F(b) = 0$, $0 \leq b \leq dx$, de donde

$$(9) \quad \mu = \frac{f(a+b) - Q(b)}{b^{n+1}}$$

Aplicando el teorema de Rolle sucesivamente se obtiene: $F(0) = F(b) = 0 \implies F'(\theta_1 b) = 0$, $0 < \theta_1 < 1$; $F'(\theta_1 b) = F'(0) = 0 \implies F''(\theta_1 \theta_2 b) = 0$, $0 < \theta_2 < 1$, ..., $F^{(n)}(\theta_1 \dots \theta_n b) = F^{(n)}(0) = 0 \implies F^{(n+1)}(\theta b) = 0$, $\theta = \theta_1 \dots \theta_n \theta_{n+1}$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \dots, n+1$, luego $0 < \theta < \theta_1 \dots \theta_n < \dots < \theta_1 < 1$. Ahora bien,

$$(10) \quad 0 = F^{(n+1)}(\theta b) = f^{(n+1)}(a + \theta b) - \mu(n+1)!,$$

luego, eliminando μ entre (9) y (10), se obtiene:

$$(11) \quad f(a+b) - Q(b) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta b)}{(n+1)!} b^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 \leq b \leq dx,$$

luego, en particular:

$$(12) \quad f(a+dx) - P(a+dx) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta dx)}{(n+1)!} d^{n+1} x^{n+1}.$$

Al segundo miembro de (12) se le llama *término complementario de la fórmula de Taylor*. De la hipótesis y de (12) resulta (8).

3. FÓRMULA DE TAYLOR.—(12) se puede escribir del siguiente modo:

$$(13) \quad \boxed{f(a+dx) = f(a) + f'(a)dx + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) d^n x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta dx) d^{n+1} x^{n+1}}$$

o bien:

$$(14) \quad \boxed{f(a+dx) = f(a) + df(a, dx) + \dots + \frac{1}{n!} d^n(a, dx) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}(a + \theta dx, dx)}$$

que se conocen con el nombre de fórmulas de Taylor.

EJERCICIOS:

861. Calcular $\sin(0,2)$ con un error inferior a una diezmilésima.862. Calcular $\sin(1^\circ)$ con un error inferior a una cienmilésima.863. Calcular $\sqrt[7]{135}$ con un error inferior a una diezmilésima.864. Calcular $\sqrt[7]{1965}$ con un error inferior a una décima.865. Calcular π con un error inferior a dos décimas.866. Calcular $\operatorname{ch}(1)$ con un error inferior a una millonésima.

4. APROXIMACIÓN LOCAL DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES MEDIANTE POLINOMIOS.

$$(15) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$(16) \quad \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$(17) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+2)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{(2k+1)+1}}{(2k+2)!} \sin \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$(18) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$(19) \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{60}x^5 + \frac{x^6}{6!} \frac{35 \sin \theta x + 54 \sin \theta x \cos \theta x + 8 \sin^3 \theta x \cos \theta x + 135 \sin^3 \theta x + 10 \sin^5 \theta x}{\cos^6 \theta x} + \dots$$

$$(20) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R(\theta x), \quad |R(\theta x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

$$(21) \quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-i+1)}{i!}x^i + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1},$$

$$0 < \theta < 1, a^{(i)} = a(a-1)\dots(a-i+1), i \in \mathbb{N}.$$

$$(22) \quad \operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R(\theta x),$$

$$(23) \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{sh}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

$$(24) \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \operatorname{ch}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

EJERCICIOS:

867. Aproximar mediante polinomios la función $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

868. Dibujar las curvas $y = \cos x$ e $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ en las proximidades del punto $x = 0,75$.

5. FÓRMULA DE TAYLOR PARA APLICACIONES $V_n \xrightarrow{f} V_1$.—Sea f una aplicación de un abierto A de V_n en $V_1 = \mathbb{R}$, con diferencial de orden $n+1$ continua en un entorno $E_x(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in A$. Sea $\mathbf{a} + d\mathbf{x} \in E_x(\mathbf{a})$ y definamos la aplicación $V_1 \xrightarrow{g} V_n$ del siguiente modo:

$$g(t) = \mathbf{a} + t d\mathbf{x}.$$

La aplicación producto $F = f \circ g$ es una aplicación de V_1 en V_1 con diferencial $n+1$ -ésima continua en un entorno de $t = 0$, por lo que se podrá aplicar la fórmula de Taylor:

$$F(t) = F(0) + dF(0, t) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0, t) + \frac{1}{n!} d^{n+1} F(\theta t, t d\mathbf{x}).$$

Ahora bien, recordando la diferencial de la función producto de dos funciones, resulta:

$$F(0) = f(g(0)) = f(\mathbf{a}), \quad dF(0, t) = df(\mathbf{a}; d\mathbf{x}) t, \quad d^2 F(0, t) = d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}; d\mathbf{x}) t^2, \\ \dots, \quad d^n F(0, t) = d^n f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x}) t^n,$$

resulta:

$$F(t) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}; d\mathbf{x}) t + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}; d\mathbf{x}) t^2 + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x}) t^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\mathbf{a} + \theta t d\mathbf{x}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x}) t^{n+1}$$

y, para $t = 1$, resulta:

$$(25) \quad \boxed{\begin{aligned} f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}; d\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}; d\mathbf{x}) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} d^n f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x}) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x}; d\mathbf{x}; \dots; d\mathbf{x}). \end{aligned}}$$

que es la *fórmula de Taylor para una función real de varias variables reales*. La fórmula (25) se puede escribir del siguiente modo:

$$(26) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^m f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n} \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

969. Aplicar la fórmula de Taylor a la función $y = \cos(x_1 + x_2)$.

870. Calcular los tres primeros términos de la fórmula de Taylor para la función $y = \sqrt{x_2}$ en un entorno de $\mathbf{a} = (1, 1)$.

871. Calcular los cuatro primeros términos de la fórmula de Taylor para la función $y = \frac{\sqrt{x_1}}{1+x_2}$ en el entorno del punto $(2, 3)$.

872. Calcular los tres primeros términos de la fórmula de Taylor de la función $y = \frac{x_1}{1+x_2+x_3^2}$, en el entorno de $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$.

6. FÓRMULA DE TAYLOR PARA UNA APLICACIÓN $V_n \xrightarrow{f} V_m$.—Sea $B^* = \{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_m^*\}$ una base de V_m . Sea $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}) = x_1^* \mathbf{u}_1^* + \dots + x_m^* \mathbf{u}_m^*$. La aplicación f es equivalente al sistema de aplicaciones:

$$(27) \quad f \begin{cases} x_1^* = x_1^*(\mathbf{x}), \\ \dots\dots\dots \\ x_m^* = x_m^*(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Supongamos que la aplicación f posea diferencial de orden $r+1$, continua en un entorno $E_\epsilon(\mathbf{a})$ de $\mathbf{a}$. De

$$(28) \quad d^r f(\mathbf{x}) = d^r x_1^*(\mathbf{x}) \mathbf{u}_1^* + \dots + d^r x_m^*(\mathbf{x}) \mathbf{u}_m^*.$$

se deduce que las aplicaciones $x_i^*(\mathbf{x})$ poseen también diferencial $r+1$ -ésima

EJERCICIOS:

873. Escribir la fórmula de Taylor para la aplicación $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^* \in V_m$.

874. Aplicar la fórmula de Taylor a la aplicación $x_1^* = \cos t$, $x_2^* = \sin t$, $x_3^* = t$.

875. Escribir los tres primeros términos de la fórmula de Taylor para la aplicación $x_1^* = 2 \cos x_1 \sin x_2$, $x_2^* = 3 \sin x_1 \sin x_2$, $x_3^* = 4 \cos x_2$ en el entorno del punto $\mathbf{a} = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Sucesiones funcionales.—Ya se ha dicho (3, § 4, cap. V) que una aplicación u de $N \times A$ en V_m , siendo A un abierto de V_n y N el conjunto de los números naturales se llama una sucesión de aplicaciones de A en V_m y que se emplea la siguiente notación:

$$(1) \quad \mathbf{x}^* = u(n, \mathbf{x}) = u_n(\mathbf{x}).$$

Se ha visto que las definiciones de convergencia y de límite, así como de convergencia y de límite uniforme, establecidas en el caso general sirven también, con las oportunas modificaciones, en el presente caso.

1. Si $u_n(\mathbf{x})$ es una sucesión de aplicaciones continuas y uniformemente convergentes en el abierto A de V_n y si $u(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\mathbf{x})$, se verifica que $u(\mathbf{x})$ es una aplicación continua en A .

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathbf{x} \in A$ y ε un número real positivo arbitrario. Por ser la convergencia uniforme se verifica que existe un número natural n tal que, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$ y para todo $n' > n$, se verifica que

$$(2) \quad |u(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |u(\mathbf{x}') - u_{n'}(\mathbf{x}')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea n' un número fijo tal que $n' > n$. Entonces se verificará (2) y, por ser $u_{n'}(\mathbf{x})$ una aplicación continua, existe un número δ tal que, para todo $\mathbf{x}'$ que verifique $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta$, sea

$$(3) \quad |u_{n'}(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x}')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente, para todo $\mathbf{x}'$ tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta$ se verifica que

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}')| &= |u(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x}) + u_{n'}(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x}') + u_{n'}(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}')| \\ &\leq |u(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x})| + |u_{n'}(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x}')| + |u_{n'}(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}')| < \varepsilon. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.—La sucesión de diferenciales $du_n(x)$ se llama *convergente* en $\mathcal{A}$ cuando, para todo vector $\mathbf{x}$ de $\mathcal{A}$ y todo ε positivo arbitrario, se pueda hallar una función natural $N(\varepsilon, \mathbf{x})$ tal que, para todo par $n, n' > N(\varepsilon, \mathbf{x})$, se verifique que $\|du_n(\mathbf{x}) - du_{n'}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$. Si la función $N(\varepsilon, \mathbf{x})$ depende sólo de ε , se dice que la convergencia es uniforme. Se dice que la diferencial $du(\mathbf{x})$ es el *límite* (el *límite uniforme*) de la sucesión de diferenciales $du_n(\mathbf{x})$ cuando $n \rightarrow \infty$, y se escribe:

$$(4) \quad du(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} du_n(\mathbf{x}).$$

cuando dado un número positivo arbitrario ε , para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ existe una función natural $N(\varepsilon, \mathbf{x})$ ($N(\varepsilon)$) tal que para todo $n > N(\varepsilon, \mathbf{x})$ (para todo $n > N(\varepsilon)$), se verifique que $\|du(\mathbf{x}) - du_n(\mathbf{x})\| < \varepsilon$.

2. TEOREMA.—Si $u_n(\mathbf{x})$ es una sucesión de aplicaciones diferenciables de un entorno-intervalo E de V_n en V_m , tal que: 1.º La sucesión de las diferenciales $du_n(\mathbf{x})$ sea uniformemente convergente en E . 2.º La sucesión $u_n(\mathbf{x})$ sea convergente en E , siendo $u(\mathbf{x})$ su límite. Se verifica que: a) $u_n(\mathbf{x})$ es uniformemente convergente en E . b) La aplicación $u(\mathbf{x})$ es diferenciable y

$$(5) \quad du(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} du_n(\mathbf{x}).$$

DEMOSTRACIÓN.—*Demostración de a).* Supondremos, por comodidad, que el entorno E es esférico y de radio r . Sea $\mathbf{a}$ su centro y $\mathbf{x}$ un vector arbitrario de E . Si ε es un número positivo arbitrario, por la primera hipótesis, se puede hallar un $N_1(\varepsilon)$ tal que para todo par $n, n' > N_1(\varepsilon)$ se verifique:

$$\|du_n(\mathbf{x}) - du_{n'}(\mathbf{x})\| < \varepsilon.$$

De esta relación, por el teorema del valor medio, se deduce que

$$(6) \quad |u_n(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x}) - (u_n(\mathbf{a}) - u_{n'}(\mathbf{a}))| < \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \varepsilon r.$$

Ahora bien, por la segunda hipótesis, se puede calcular un $N_2(\varepsilon)$ tal que para todo par $n, n' > N_2(\varepsilon)$ sea

$$(7) \quad |u_n(\mathbf{a}) - u_{n'}(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

De (6) y (7) se deduce, para todo par $n, n' > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$|u_n(\mathbf{x}) - u_{n'}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon(1 + r).$$

Demostración de b).—Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} d u_n(\mathbf{x}) = d v(\mathbf{x})$. Por ser $u(\mathbf{x})$ el límite de $u_n(\mathbf{x})$, dado un ϵ positivo arbitrario se puede hallar, en virtud de a), un $N(\epsilon)$ tal que para todo $n > N(\epsilon | d \mathbf{x}|)$ sea

$$|u(\mathbf{x} + d \mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) - (u_n(\mathbf{x} + d \mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x}))| < \epsilon |d \mathbf{x}|.$$

Por ser $u_n(\mathbf{x})$ diferenciable, dado ϵ , se puede hallar un δ tal que, siempre que $|d \mathbf{x}| < \delta$, sea

$$|u_n(\mathbf{x} + d \mathbf{x}) - u_n(\mathbf{x}) - d u_n(\mathbf{x}, d \mathbf{x})| < \epsilon |d \mathbf{x}|.$$

Como además es $d v(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d u_n(\mathbf{x})$, se podrá hallar un $N_2(\epsilon |d \mathbf{x}|)$ tal que $n > N_2(\epsilon |d \mathbf{x}|)$ implique

$$|d u_n(\mathbf{x}, d \mathbf{x}) - d v(\mathbf{x}, d \mathbf{x})| < \epsilon |d \mathbf{x}|.$$

De estas tres acotaciones se obtiene:

$$|u(\mathbf{x} + d \mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) - d v(\mathbf{x}, d \mathbf{x})| < 3 \epsilon |d \mathbf{x}|,$$

lo que implica que

$$\lim_{|d \mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x} + d \mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) - d v(\mathbf{x}, d \mathbf{x})}{|d \mathbf{x}|} = 0,$$

es decir,

$$d v(\mathbf{x}, d \mathbf{x}) = d u(\mathbf{x}, d \mathbf{x}),$$

q. e. d.

EJERCICIOS:

876. Demostrar que la función $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 + x^n}$ es continua en cualquier intervalo contenido en la semirrecta $x > -1$, que no contenga al punto $x = 1$, siendo éste el único punto de discontinuidad.

877. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

878. Aplicado el ejercicio anterior, demostrar que $D \sin x = \cos x$.

879. Si $a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)$ y si la sucesión $a_0 + \dots + a_n x^n$ es uniformemente convergente en I , hallar una función $b(x)$ definida en I cuya derivada sea $a(x)$.

880. Se llama primitiva de una diferencial a toda aplicación cuya diferencial es la diferencial dada. Hallar una primitiva de $\sin x dx$.

5. Series funcionales.—Sea $u_n(\mathbf{x})$ una sucesión de aplicaciones de un abierto $\mathcal{A}$ de V_n en V_m . Se llama *serie* cuyos *términos* son las aplicaciones $u_n(\mathbf{x})$, a la expresión siguiente:

$$(8) \quad u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \dots + u_n(\mathbf{x}) + \dots$$

A partir de la serie (8) se forma la sucesión

$$(9) \quad s_n(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + \dots + u_n(\mathbf{x}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

llamada *sucesión de las sumas parciales* de (8).

DEFINICIÓN 1.—Se dice que la serie (8) es *convergente* o *uniformemente convergente* en $\mathcal{A}$ cuando la sucesión (9) es convergente o, respectivamente, uniformemente convergente en $\mathcal{A}$.

CONSECUENCIAS.—1. *La condición necesaria y suficiente para que la serie (8) sea convergente en $\mathcal{A}$ es que dado un número positivo arbitrario ϵ exista una función natural $N(\epsilon, \mathbf{x})$ tal que para todo $n, n' > N(\epsilon, \mathbf{x})$ se verifique*

$$|u_{n+1}(\mathbf{x}) + \dots + u_{n'}(\mathbf{x})| < \epsilon, \quad n < n'.$$

2. *La condición necesaria y suficiente para que la serie (8) sea uniformemente convergente en $\mathcal{A}$ es que dado un número positivo arbitrario ϵ exista una función natural $N(\epsilon)$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ y todo $n, n' > N(\epsilon)$ sea*

$$|u_{n+1}(\mathbf{x}) + \dots + u_{n'}(\mathbf{x})| < \epsilon, \quad n < n'.$$

DEFINICIÓN 2.—Si la serie es convergente en $\mathcal{A}$ y si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})$, la aplicación $s(\mathbf{x})$ se llama *suma* de la serie (8).

Como la suma de un número finito de funciones continuas o diferenciables es otra función continua o, respectivamente, diferenciable, los teoremas 1 y 2 del número anterior dan lugar a los siguientes teoremas para las series.

1. TEOREMA.—*Si (8) es una serie de aplicaciones continuas que tiende uniformemente a la aplicación suma $s(\mathbf{x})$ en $\mathcal{A}$, la aplicación $s(\mathbf{x})$ es continua en $\mathcal{A}$.*

2. TEOREMA.—Si (8) es una serie de aplicaciones diferenciables en un entorno-intervalo E de V_n , tal que: 1.º La serie de las diferenciales

$$(10) \quad du_1(x) + \dots + du_n(x) + \dots$$

sea uniformemente convergente en E . 2.º La serie dada sea convergente en E , siendo $s(x)$ su suma. Se verifica: a) La serie dada es uniformemente convergente en E . b) La aplicación $s(x)$ es diferenciable en E y

$$ds(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [du_1(x) + \dots + du_n(x)].$$

EJERCICIOS:

881. Sabiendo que $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$, demostrar que $de^x = e^x dx$.

882. Sabiendo que $\log(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\right)$, $|x| < 1$, demostrar que $d \log(1+x) = \frac{dx}{1+x}$.

883. Sabiendo que $\sin x = \lim_{2k+1 \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$ y $\cos x = \lim_{2k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$, demostrar que $d \sin x = \cos x dx$ y $d \cos x = -\sin x dx$.

884. Demostrar que la serie $x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ es convergente en el intervalo $(0, 1)$, pero no es uniformemente convergente en él.

DEFINICIÓN 3.—Se dice que la serie funcional (8) es *absolutamente convergente en $\mathcal{A}$* cuando es convergente en $\mathcal{A}$ la serie

$$(11) \quad |u_1(x)| + \dots + |u_n(x)| + \dots$$

CONSECUENCIAS.—1. Si la serie (8) es absolutamente convergente es convergente.

2. Las propiedades de las series numéricas absolutamente convergentes son válidas también para las series funcionales absolutamente convergentes.

3. Si la serie de los módulos de una serie funcional es uniformemente convergente, ésta también lo es.

3. SERIES POTENCIALES.—El caso particular más importante de series funcionales de una variable es el de las series de funciones potenciales:

$$(12) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

llamadas *series potenciales* o *series de potencias*.

4. TEOREMA.—Si la serie (12) es convergente para $x = \xi$, es absolutamente convergente para todo valor de x tal que $|x| < |\xi|$.

DEMOSTRACIÓN.—1.º Por ser convergente la serie numérica

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n + \dots,$$

sus términos están acotados. En efecto, dado un número positivo arbitrario ϵ se puede hallar un N tal que para todo $n > N$ sea $|a_n \xi^n| < \epsilon$, luego si $M - 1 = \max \{|a_0|, |a_1 \xi|, \dots, |a_n \xi^n|, \epsilon\}$, se verificará que, para todo n , será $|a_n \xi^n| < M$.

2.º Si x es un punto cualquiera que cumple la condición $|x| < |\xi|$, será:

$$|a_n x^n| = \left| a_n \xi^n \frac{x^n}{\xi^n} \right| < M \left| \frac{x}{\xi} \right|^n,$$

pero la serie $\sum M \frac{|x|^n}{|\xi|^n}$ es, para todo x tal que $|x| < |\xi|$, una serie geométrica de razón inferior a la unidad y mayorante de la serie

$$|a_0| + |a_1 x| + \dots + |a_n x^n| + \dots,$$

luego ésta es convergente.

Dada la serie (12) se puede afirmar que es convergente para $x = 0$. Si no es convergente para cualquier valor de x , existirá un extremo superior del conjunto formado por todos los puntos en los cuales la serie es convergente. Si R es este extremo superior, se verificará que para todo punto x tal que $|x| < R$ la serie será convergente, y para todo punto x tal que $|x| > R$ no lo será. Para $|x| = R$ la serie puede ser o no convergente. A este número R se le llama *radio de convergencia de la serie*. Si la serie sólo es convergente para $x = 0$, se dice que el radio de convergencia es cero. Si la serie es convergente en toda la recta, se dice que el radio de convergencia es infinito.

El criterio de d'Alembert permite calcular el radio de convergencia en muchos casos. En efecto, como la serie es absolutamente convergente en todo el intervalo de convergencia $(-R, R)$, si x es un punto de este intervalo se verificará, según el criterio de d'Alembert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = k < 1,$$

Por consiguiente, si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha$, la serie (12) será absolutamente convergente para todo valor de x tal que $|x| < \frac{1}{\alpha}$, luego

$$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

5. TEOREMA.—*Toda serie potencial es uniformemente convergente en cualquier segmento cerrado contenido en su intervalo de convergencia. Ya que si $0 < \xi < R$, para todo x tal que $|x| \leq \xi$ se verifica:*

$$|a_n x^n + \dots + a_{n'} x^{n'}| \leq |a_n| \xi^n + \dots + |a_{n'}| \xi^{n'} < \epsilon, \quad n, n' > N(\epsilon).$$

Como las funciones x^n son continuas, de este teorema y de los teoremas 1 y 2 se deduce:

COROLARIO 1.—*La suma de una serie potencial es una función continua dentro de su intervalo de convergencia.*

COROLARIO 2.—*La derivada de la suma de una serie potencial es igual a la suma de la serie derivada dentro del intervalo de convergencia de ésta.*

6. TEOREMA.—*La derivada de una serie potencial posee el mismo intervalo de convergencia que ella. Puesto que el radio de convergencia de la serie derivada:*

$$(13) \quad a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

viene dado por

$$R^* = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = R'$$

El teorema 6 y el corolario 2 se pueden resumir en el enunciado siguiente: *la derivada de la suma de una serie potencial es igual, en el intervalo de convergencia de ésta, a la suma de la serie derivada. Esto se expresa brevemente diciendo: las series potenciales se pueden derivar término a término en su intervalo de convergencia.*

DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE LA FÓRMULA DE TAYLOR.—Una aplicación f se llama de clase n en A cuando posee diferencial de orden n , continua en A . En particular, una función se llama

de clase C^∞ cuando posee diferenciales de todos los órdenes en A . Si una función $f(x)$ es de clase C^∞ en el intervalo I , se puede aproximar en un entorno de cualquier punto de I mediante un polinomio de grado tan grande como se desee. Esto es, toda función $f(x)$ de clase infinito en I da lugar a una serie:

$$(14) \quad f(x) \in C^\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{\omega} f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots,$$

suponiendo, por sencillez, que $0 \in I$.

Sea $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)f^{(n+1)}(0)}{f^{(n+1)}(0)} \right| \neq 0$ y sea $J = (-r, r)$ el intervalo de convergencia de la serie del segundo miembro de (14). Sea

$$(15) \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n].$$

Se presenta la siguiente situación:

$$\forall f(x) \in C^\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

$\swarrow S \quad \searrow S$
 $\quad \quad F(x)$

¿Qué relación es la aplicación $S \omega$? El siguiente teorema responde, en ciertas condiciones, a esta pregunta.

7. TEOREMA.—La función $f(x)$ es uniforme y de clase infinito en el abierto A . $J = (-r, r)$ es el intervalo de convergencia de la serie (14). Para todo punto x de J se verifica una de las dos condiciones siguientes:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } |f^{(n)}(x)| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \forall x \in J, \\ \text{b) } \left| \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n)}(0)} \right| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \forall x \in J. \end{array} \right.$$

entonces se verifica que:

$$f(x) = F(x), \quad \forall (x \in J).$$

DEMOSTRACIÓN.—De $x \in J$ se deduce, por ser (14) uniforme y absolutamente convergente en $[-m, m]$, $m \in J$, que, dado un número positivo arbitrario, ε , $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n > n_1$, y $\forall x \in [-m, m]$, se verifica que

$$(17) \quad \left| F(x) - \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)x^i}{i!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ser $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ uniformemente convergente en toda la recta, ya que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} = e^x$, se verifica que, existe un número $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_2$, se verifica que $\left| \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2M}$ de donde

$$(18, a) \quad \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) x^{n+1} \right| < \frac{\varepsilon |f^{(n+1)}(0)|}{2M}.$$

Si se emplea la hipótesis b), por ser (14) uniformemente convergente en $[-m, m]$, su término general tiende a cero, luego existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_2$ se verifique que

$$(18, b) \quad \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) x^{n+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall x \in [-m, m],$$

Sea $m = \max \{n_1, n_2\}$. $\forall n > m$ será:

$$\begin{aligned} |f(x) - F(x)| &\leq \left| f(x) - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i \right| + \left| F(x) - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i \right| \\ &< \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las dos hipótesis a) y b), y (18 a) y (18 b), respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned} a) \Rightarrow \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) x^{n+1} \right| \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{|f^{(n+1)}(0)|} \\ &< \frac{\varepsilon |f^{(n+1)}(0)| |f^{(n+1)}(\theta x)|}{2M |f^{(n+1)}(0)|} < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \Rightarrow \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1} \right| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) x^{n+1} \right| \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{|f^{(n+1)}(0)|} < \frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

luego, en cualquier caso: $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$, de donde $f(x) = F(x)$, $\forall x \in J$.

APLICACIONES.—8. En toda la recta se verifica que

$$(19) \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n \right).$$

9. En $J = (-1, 1)$ se verifica que:

$$(20) \quad \ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)$$

10. En toda la recta se verifica:

$$(21) \quad \operatorname{sen} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

$$(22) \quad \cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right).$$

11. En el intervalo $J = (-1, 1)$ se verifica que

$$(23) \quad (1+x)^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + a x + \frac{a^{(2)}}{2!} x^2 + \dots + \frac{a^{(n)}}{n!} x^n \right).$$

12. En el intervalo $J = (-1, 1]$, cerrado por la derecha, se verifica:

$$(24) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right).$$

13. En el intervalo $J = (-1, 1)$ se verifica:

$$(25) \quad \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right).$$

DEMOSTRACIONES.—8. $r = \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| = \infty$. $\forall x \in [-m, m]$ es $e^x \leq e^m = M$, $\forall m$.

9. $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$. $D^{n+1} \log_e(1+x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Aplicando la hipótesis b): $\left| \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|1+x|^{n+1}} < M$, $\forall x > -\epsilon > -1$, $\epsilon > 0$, siendo $M = \frac{1}{(1-\epsilon)^{n+1}}$.

10. Es totalmente análogo a 8.

$$11. r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a^{(n)}}{n!}}{\frac{a^{(n+1)}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{a-n} \right| = 1. \text{ Si } x > 0, 2^a > (1+x)^a$$

$> (1+x)^{a-n-1}$. Si $0 < \varepsilon < 1+x \implies \varepsilon^{a-(n-1)} > (1+x)^{a-n-1}$, $\forall n \mid a-n-1 < 0$, luego aplicando b) resulta (23) para todo $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

12. $r=1$. La convergencia para $x=1$ es consecuencia de ser $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ una serie alternada cuyo término general, en valor absoluto, tiende a cero.

13. Análoga a la anterior.

14. CÁLCULO DE TABLAS DE LOGARITMOS.—Para calcular tablas de logaritmos se emplea la siguiente serie, que converge más rápidamente:

$$(26) \quad \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

y se pone $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{N}$, de donde $x = \frac{z}{2N+z}$, y

$$(27) \quad \ln(N+z) = \ln N + 2 \left(\frac{z}{2N+z} + \frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \dots \right)$$

Mediante (27) se calcula:

$$(28) \quad \ln 10 = 2,302\,585\,092\,994\,045\,684,$$

sabiendo que $e = 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360$. Mediante este número se calcula:

$$(29) \quad M = L e = (\ln 10)^{-1} = 0,434\,294\,481\,903\,251\,827.$$

Multiplicando (27) por M, se obtiene la siguiente fórmula para calcular logaritmos decimales:

$$(30) \quad L(N+z) = L(N) + 2M \left(\frac{z}{2N+z} + \frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \dots \right)$$

Tomando el primer término de (30):

$$L(N+z) = L(N) + \frac{2Mz}{2N+z} + E,$$

el error cometido puede acotarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E &= 2M \left(\frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \dots \right) < \frac{2Mz^3}{3(2N+z)^3} \left(1 + \frac{z^2}{(2N+z)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{2Mz^3}{3(2N+z)^3} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{(2N+z)^2}} = \frac{2Mz^3(2N+z)^2}{3(2N+z)^3[(2N)^2 + 4Nz]} < \frac{Mz^3}{(2N+z)^3} < \frac{z^3}{16N^3}. \end{aligned}$$

EJERCICIOS:

885. Calcular $\ln 10$ con un error inferior a una milésima.
 886. Calcular $L 11$ con un error inferior a una milésima.
 887. Calcular $\frac{\pi}{6}$ con un error inferior a una centésima.
 888. Desarrollar en serie $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ y $\operatorname{th} x$.
 889. Calcular con un error inferior a una décima $\sqrt[3]{2250}$.

6. Máximos y mínimos.

A. FUNCIONES DE UNA VARIABLE. DEFINICIÓN 1.—Si $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es una aplicación definida en un abierto A de $\mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ es *creciente* en $a \in A$, cuando existe un entorno $E_\epsilon(a)$ tal que, para todo $x \in E_\epsilon(a)$ se verifique que: $x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$ y $a < x \Rightarrow f(a) < f(x)$. Simbólicamente se puede expresar esta definición del siguiente modo:

$$(1) \quad f(x) \text{ es creciente en } a \Leftrightarrow \exists E_\epsilon(a) \mid \forall x, x' \in E_\epsilon(a) \mid x < a < x' \\ \Rightarrow f(x) < f(a) < f(x').$$

Análogamente:

$$(2) \quad f(x) \text{ es decreciente en } a \Leftrightarrow \exists E_\epsilon(a) \mid \forall x, x' \in E_\epsilon(a) \mid x < a < x' \\ \Rightarrow f(x) > f(a) > f(x').$$

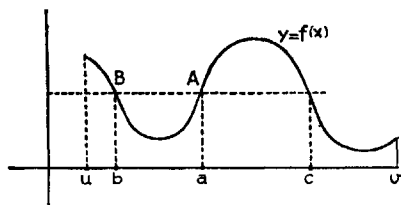


Fig. 105.

EJERCICIOS:

890. ¿Es la función $y = f(x)$ de la figura 105 creciente en a ? Determinar un entorno de a que cumpla las condiciones de (1). Análogamente para c .

891. Dada la función $y = -x^2 + 3x + 5$, averiguar si es creciente o decreciente en $x = -1$ y hallar el máximo entorno-intervalo de este punto en el que la función es creciente o decreciente.

Las dos definiciones (1) y (2) se pueden resumir en la siguiente:

$$(3) \quad f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{creciente} \\ \text{decreciente} \end{cases} \text{ en } a \Leftrightarrow \exists E_\epsilon(0) \mid \forall dx \in E_\epsilon(0), dx \neq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} [f(a+dx) - f(a)]/dx > 0 \\ [f(a+dx) - f(a)]/dx < 0 \end{cases}$$

1. Si $f(x)$ es de clase C^n en un entorno $E(a)$ y si la primera diferencial distinta de cero en a es $d^r f(a; dx)$, $r \leq n$, se verifica que:

$$(4) \quad f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{creciente} \\ \text{decreciente} \end{cases} \text{ en } a \Leftrightarrow r = 2k + 1 \quad \begin{cases} f^{(r)}(a) > 0, \\ f^{(r)}(a) < 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.—De las hipótesis se deduce que

$$(5) \quad [f(a + dx) - f(a)] dx = \frac{1}{r!} f^{(r)}(a + \theta dx) dx^{r+1}$$

y como $f^{(r)}(x)$ es continua en $E(a)$, se verifica que existe un entorno $E_\epsilon(o)$ de o tal que, para todo $dx \in E_\epsilon(o)$, se verifica que $\text{sig } f^{(r)}(a + dx) = \text{sig } f^{(r)}(a)$, luego de (5) se deduce:

$$(6) \quad \text{sig } [f(a + dx) - f(a)] dx = \text{sig } f^{(r)}(a), \quad r = 2k + 1, \quad dx \in E_\epsilon(o).$$

DEFINICIÓN 2.—Los puntos en los que una función no es creciente ni decreciente se llaman *puntos estacionarios*.

2. Si $f(x)$ es de clase C^n en un entorno $E(a)$ y si la primera diferencial distinta de cero en a es $d^r f(a; dx)$, $r \leq n$, se verifica que:

$$(7) \quad a \text{ es punto estacionario} \Leftrightarrow r = 2k.$$

DEFINICIÓN 3.—Se dice que la función $f(x)$ alcanza en a un $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$ relativo cuando existe un entorno $E_\epsilon(o)$ de o tal que, para todo $dx \in E_\epsilon(o)$, $dx \neq 0$, se verifica que $f(a + dx) - f(a) \begin{cases} < 0. \\ > 0. \end{cases}$

3. Si $f(x)$ es de clase C^n en un entorno de $E(a)$ y si la primera diferencial distinta de cero en a es $d^r f(a; dx)$, $r \leq n$, se verifica que:

$$(8) \quad f(x) \text{ alcanza un } \begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases} \text{ relativo en } a \Leftrightarrow r = 2k \quad \begin{cases} f^{(r)}(a) < 0, \\ f^{(r)}(a) > 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.—De (5) se deduce en el caso actual que

$$(9) \quad f(a + dx) - f(a) = \frac{1}{r!} f^{(r)}(a + \theta dx) dx^r,$$

luego, por ser $f^{(r)}(x)$ continua en un entorno de a , existe un entorno $E_*(0)$ tal que $\forall dx \in E_*(0)$ es $\text{sig } f^{(r)}(a + dx) = \text{sig } f^{(r)}(a)$, luego:

$$(10) \quad \text{sig } [f(a + dx) - f(a)] = \text{sig } [f^{(r)}(a), dx^r],$$

y para que este signo no dependa del signo de dx es n. y s. que $r = 2k$, en cuyo caso el signo de (10) será igual al signo de $f^{(r)}(a)$.

EJERCICIOS:

892. Averiguar si la función $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 3$ es creciente, decreciente, posee máximo o mínimo en los siguientes puntos: 1; 2; 2,5; 3.

893. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $y = 3x^4 - 4x^3 - 30x^2 - 36x + 1$.

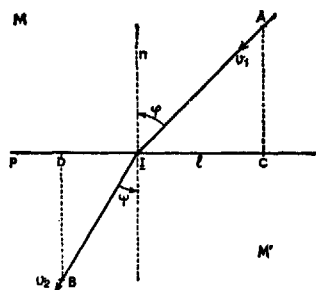


Fig. 106.

894. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = 10x^6 + 12x^5 - 75x^4 - 20x^3 + 240x^2 - 240x + 1$.

895. La luz monocromática se mueve en los medios homogéneos con movimiento uniforme. La velocidad de este movimiento depende de la densidad del medio. ¿Qué camino deberá seguir un rayo luminoso de luz monocromática que parte de un punto A de un medio homogéneo M y pasa por el punto B de otro medio homogéneo distinto M', siendo la superficie de separación de ambos un plano P, de modo que el tiempo invertido en pasar de A a B sea mínimo? (fig. 106). (Se supone que la velocidad en M es v_1 y en M' es v_2 .)

B. APLICACIONES $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, A ABIERTO DE V_n .—Sea $f(\mathbf{x})$ una aplicación de un abierto A de V_n en $\mathbb{R}$, de clase C^r en el entorno $E(\mathbf{a})$ de un vector $\mathbf{a}$ de V_n .

DEFINICIÓN 4.—La función $f(\mathbf{x})$ posee un $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$ relativo para $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ $\iff$ Existe un entorno $E_*(0)$ tal que, para todo $d\mathbf{x} \in E_*(0)$, se verifica que $f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \begin{cases} \leq 0, \\ \geq 0. \end{cases}$

Suponiendo $r \geq 2$, se puede aplicar el teorema de Taylor y se obtiene:

$$(11) \quad f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}; d\mathbf{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}).$$

Supondremos en lo que sigue que $d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) \neq 0$. Siendo $d^2 f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ una forma cuadrática, tomando $|d\mathbf{x}|$ suficientemente pequeño su valor absoluto se puede hacer inferior al valor absoluto de $df(\mathbf{a}; d\mathbf{x})$ (que es una forma lineal en $d\mathbf{x}$), luego existe un entorno $E'_\varepsilon(\mathbf{0})$ tal que, para todo $d\mathbf{x} \in E'_\varepsilon(\mathbf{0})$ se verifica que

$$\text{sig}[f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})] = \text{sig}(df(\mathbf{a}; d\mathbf{x})),$$

y como el signo de una forma lineal puede ser positivo o negativo según los valores que se den a las variables, a no ser que dicha forma sea la forma lineal cero, resulta:

Una condición necesaria para que $f(\mathbf{x})$ posea un máximo o un mínimo relativos para $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ es que

$$(12) \quad df(\mathbf{a}; d\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} dx_n = 0,$$

o bien:

$$(13) \quad \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \dots = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = 0.$$

Supongamos que se cumple la condición necesaria (12). La igualdad (10) se reduce a

$$(14) \quad f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}).$$

Siendo $d^2 f$ continua en un entorno de $\mathbf{a}$, se puede determinar un entorno: $E_\varepsilon(\mathbf{0})$ tal que, para todo $d\mathbf{x} \in E_\varepsilon(\mathbf{0})$ se verifique que

$$\text{sig}[d^2 f(\mathbf{a} + \theta d\mathbf{x}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x})] = \text{sig}[d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x})],$$

luego, suponiendo que $d\mathbf{x} \in E_\varepsilon(\mathbf{0})$, se verifica que

$$(15) \quad \text{sig}[f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})] = \text{sig}[d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x})].$$

Ahora bien:

$$(16) \quad d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} H_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} d\mathbf{x}',$$

$$d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n), \quad H_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Se obtiene, por tanto, el siguiente resultado:

4. Si $f(\mathbf{x})$ es de segunda clase en un entorno de $\mathbf{a}$ y si $d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) \neq 0$, una condición necesaria y suficiente para que $f(\mathbf{x})$ posea un $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$ relativo, en $\mathbf{a}$, es que se verifique (12) y que la forma cuadrática $d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ sea $\begin{cases} \text{definida o semidefinida negativa,} \\ \text{definida o semidefinida positiva.} \end{cases}$

Teniendo en cuenta el teorema 2 de 4, § 1, Cap. IV, resulta:

5. Si $f(\mathbf{x})$ es de segunda clase en un entorno de $\mathbf{a}$ y si $d^2 f(\mathbf{a}; d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) \neq 0$, una condición necesaria y suficiente para que $f(\mathbf{x})$ posea un $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$ relativo, en $\mathbf{a}$, es que se verifique (12) y que $\begin{cases} \text{signatura de } d\mathbf{x} H_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} d\mathbf{x}' = 0, \\ \text{signatura de } d\mathbf{x} H_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} d\mathbf{x}' \\ \quad = \text{rango } d\mathbf{x} H_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} d\mathbf{x}'. \end{cases}$

EJERCICIOS:

896. Averiguar si existe máximo o mínimo para $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ de la función $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1^2 x_2 + 3x_2^3 + 4x_2 x_3^2 - x_1 x_2 x_3 - 3x_1^2 + 3x_1 x_2 + x_1 x_3 - 2x_2^2 - x_3^2$.

897. Hallar, si existen, los máximos y mínimos de la siguiente función: $f(x) = x_1^2 + 3x_1 x_2 - x_1 x_3 + x_2^2 - 4x_2 x_3 + 5x_3^2 - 2x_1 + x_2 - x_3 + 4$.

§ 3. FUNCIONES IMPLICITAS E INVERSAS

1. **Diferencial parcial de una aplicación.**—Sean V_n , V_m y V_p tres espacios vectoriales euclídeos, A_1 un abierto de V_n , A_2 un abierto de V_m . $A = A_1 \times A_2$ es un abierto de $V_n \times V_m$. Sea

$$(1) \quad A \xrightarrow{f}$$

una aplicación diferenciable en A : $\mathbf{z} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in A_1$, $\mathbf{y} \in A_2$. Sea $\mathbf{a} \in A_1$, $\mathbf{b} \in A_2$.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *diferencial parcial respecto del vector $\mathbf{x}$ de la aplicación f en el vector $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$* , y se representa por $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})$, a un homomorfismo de V_n en V_p tal que

$$(2) \quad \lim_{d\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + d\mathbf{x}, \mathbf{b}) - f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} = 0.$$

Por ser homomorfismo se verifica:

$$(3) \quad \begin{cases} df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x} + d\mathbf{x}') = df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) + df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}') \\ df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda d\mathbf{x}) = \lambda df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}). \end{cases}$$

Sean $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, $B = \{\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_p^*\}$ bases de V_n , V_m y V_p , respectivamente. Sea $d\mathbf{x} = dx_1 \mathbf{u}_1 + \dots + dx_n \mathbf{u}_n$, $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) = dz_1 \mathbf{u}_1^* + \dots + dz_p \mathbf{u}_p^*$. Como en caso de las diferenciales totales, resulta que:

$$(4) \quad (dz_1, \dots, dz_p) = (dx_1, \dots, dx_n) \underset{\mathbf{y}=\mathbf{b}}{J_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}}, \quad J_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \underset{\mathbf{y}=\mathbf{b}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}, \mathbf{y}=\mathbf{b}}$$

EJERCICIOS:

898. Calcular la diferencial parcial respecto del vector $\mathbf{x}$ en el vector $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -1)$, de la siguiente aplicación:

$$\begin{cases} z_1 = 2x_1^2 + 3x_1y_1 - 2x_2y_1 + y_2^2 \\ z_2 = x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + 2y_1 \end{cases}$$

899. Calcular la diferencial parcial respecto del vector $\mathbf{y}$ de la aplicación del ejercicio anterior, en el vector $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Idem la diferencial total en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y hallar la relación entre éstas y la del ejercicio anterior.

1. Entre las diferenciales parciales y la diferencial total se verifica la siguiente relación:

$$(5) \quad df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) + df_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{y}).$$

DEMOSTRACIÓN.— $df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, \mathbf{0}) + df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{0}, d\mathbf{y}) = df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) + df_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{y})$, ya que, en virtud de la definición es $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, \mathbf{0})$.

Las diferenciales y las diferenciales parciales son homomorfismos, luego se puede hablar de norma de una diferencial o de una diferencial parcial:

$$(6) \quad \|df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, d\mathbf{y})\| = \text{ext. sup.} \frac{|df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, d\mathbf{y})|}{|d\mathbf{x}, d\mathbf{y}|},$$

$$\|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})\| = \text{ext. sup.} \frac{|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})|}{|d\mathbf{x}|},$$

y teniendo en cuenta (5):

$$(7) \quad \|df(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}, d\mathbf{y})\| \leq \|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})\| + \|df_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{y})\|.$$

EJERCICIO:

900. Calcular la norma de $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}; d\mathbf{x})$, siendo f :
$$\begin{cases} z_1 = x_1^2 + x_2 - 3y, \\ z_2 = x_1 - 3x_2 + y^2. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 2.—La diferencial $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d\mathbf{x})$ se llama *continua* en el vector $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ cuando dado un número positivo arbitrario ϵ existen otros dos, δ_1, δ_2 , tales que, para todo par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ que verifican la condición $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta_1, |\mathbf{y} - \mathbf{b}| < \delta_2$, se verifique que

$$(8) \quad \|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d\mathbf{x}) - df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})\| < \epsilon.$$

EJERCICIOS:

901. Demostrar que $df_{\mathbf{x}}$ es continua en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ para la aplicación del ejercicio anterior.

902. Idem para la aplicación: $f \begin{cases} z_1 = 3x_1 - x_2^2 + y_1 - y_2^2, \\ z_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2y_1 + 5y_2. \end{cases}$

DEFINICIÓN 3.—Si $n = p$, puede suceder que el homomorfismo $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})$ sea isomorfismo, en cuyo caso se dice que la diferencial es *reversible* en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

$$(9) \quad df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) \text{ es reversible en } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \Leftrightarrow \left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}, \mathbf{y}=\mathbf{b}} \neq 0.$$

EJERCICIOS:

903. Determinar todos los vectores en que no es reversible la diferencial $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x})$ de la aplicación f del ejercicio 902.

904. Idem para la aplicación: $z_1 = x_1 x_2 y_1 y_2, z_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2.$

2. Teorema de existencia de funciones implícitas.

1. TEOREMA DE EXISTENCIA. HIPÓTESIS.—Sean A y B abiertos de V_n y V_m , respectivamente, f una aplicación continua de $A \times B$ en V_p , siendo V_n , V_m y V_p espacios vectoriales euclídeos de dimensiones n , m y p , respectivamente. 1.º) Existe df_x y es continua en un entorno de (a, b) , $a \in A$, $b \in B$. 2.º) $df_x(a, b; dx)$ es reversible en (a, b) . 3.º) Existe $df(a, b; dx, dy)$.

TESIS.—1.º) Si $c = f(a, b)$, existen los entornos-intervalo $E_{e_1}(a)$, $E_{e_2}(b)$, $E_{e_3}(c)$, tales que, para todo $y \in E_{e_2}(b)$ y para todo $z \in E_{e_3}(c)$, existe un vector $x \in E_{e_1}(a)$, y uno sólo, tal que $z = f(x, y)$. 2.º) La aplicación: $(y, z) \rightarrow x = \varphi(y, z)$, de $E_{e_2}(b) \times E_{e_3}(c)$ en $E_{e_1}(a)$ es una aplicación continua en $E_{e_2}(b) \times E_{e_3}(c)$. 3.º) La aplicación φ es diferenciable en (b, c) y su diferencial se obtiene resolviendo respecto de dx la ecuación:

$$(1) \quad dz = df_x(a, b; dx) + df_y(a, b; dy).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $df_x(a, b; dx) = dx \cdot D$, siendo D una matriz numérica reversible. Consideremos la aplicación

$$(2) \quad g(x, y) = f(x, y) D^{-1} - x,$$

siendo D^{-1} la matriz inversa de D . Diferenciando (2) respecto de x , se obtiene:

$$(3) \quad dg_x(x, y) = df_x(x, y) D^{-1} - dx = (df_x(x, y) - dx D) D^{-1},$$

de donde

$$(4) \quad dg_x(a, b) = 0.$$

De la continuidad de df_x se deduce, en virtud de (3), la continuidad de $dg_x(x, y)$. De esta continuidad y de (4) se sigue que, dado un número arbitrario ϵ tal que $0 < \epsilon \sqrt{n} < 1$, se pueden hallar otros dos, ϵ_1 y δ' , tales que, para todo par de vectores $x \in V_m$, $y \in V_n$, $|x - a| < \delta_1$, $|y - b| < \delta'$, se verifique:

$$(5) \quad \|dg_x(x, y)\| < \epsilon.$$

Consideremos la aplicación $[z - f(x_0, y)] D^{-1}$, que es continua, por serlo f y se anula para $y = b$, $z = c$. Por consiguiente, existe un entorno $\mathcal{G}$ de (b, c) en $V_m \times V_p$ tal que, para todo vector $(y, z) \in \mathcal{G}$, se verifique:

$$(6) \quad |(z - f(a, y)) D^{-1}| < (1 - \epsilon \sqrt{n}) \epsilon_1.$$

Sean $\delta_2 < \delta'$ y δ_3 dos números positivos tales que $|\mathbf{y} - \mathbf{b}| < \delta_2$, $|\mathbf{z} - \mathbf{c}| < \delta_3 \implies (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{G}$. Consideremos los tres entornos: $E_{\epsilon_1}(\mathbf{a})$, $E_{\epsilon_2}(\mathbf{b})$ y $E_{\epsilon_3}(\mathbf{c})$, de radios ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 , respectivamente.

Sea $\mathbf{y} \in E_{\epsilon_2}(\mathbf{b})$, $\mathbf{z} \in E_{\epsilon_3}(\mathbf{c})$ y consideremos la sucesión de vectores:

$$(7) \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{z} D^{-1} - g(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}), \quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{x}_0 = \mathbf{a}.$$

De

$$(8) \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| = |g(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_{i-2}, \mathbf{y})|,$$

se deduce, siempre que $\mathbf{x}_{i-1}$ y $\mathbf{x}_{i-2}$ pertenezcan a $E_{\epsilon_1}(\mathbf{a})$, en virtud del teorema del valor medio y de (5), que

$$(9) \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| < \epsilon |\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{i-2}| \sqrt{n}$$

de donde

$$(10) \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| < \epsilon^{i-1} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| (\sqrt{n})^{i-1}$$

y

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0| &\leq |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| + \dots + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}| < [(e \sqrt{n})^{i-1} + \dots + (e \sqrt{n}) + 1] |\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}| \\ &= \frac{1 - (e \sqrt{n})^i}{1 - e \sqrt{n}} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}| < \frac{1}{1 - e \sqrt{n}} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}| \\ &= \frac{1}{1 - e \sqrt{n}} |\mathbf{z} D^{-1} - f(\mathbf{a}, \mathbf{y}) D^{-1} + \mathbf{a} - \mathbf{a}| \\ &= \frac{1}{1 - e \sqrt{n}} |\mathbf{z} D^{-1} - f(\mathbf{a}, \mathbf{y}) D^{-1}| = \frac{1}{1 - e \sqrt{n}} |(z - f(\mathbf{a}, \mathbf{y})) D^{-1}| < \epsilon_1. \end{aligned} \right.$$

de donde se deduce que, efectivamente, todos los vectores $\mathbf{x}_i$ definidos por (7) pertenecen a $E_{\epsilon_1}(\mathbf{a})$, lo que justifica la validez de (5) y de (9).

a) *La sucesión (7) es convergente.* En efecto, en virtud de (10), se obtiene:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_{q'}| &\leq |\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_{q-1}| + \dots + |\mathbf{x}_{q'+1} - \mathbf{x}_{q'}| < [(e \sqrt{n})^{q-1} + \dots + (e \sqrt{n})^{q'}] |\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}| \\ &< (e \sqrt{n})^{q'} \frac{1 - (e \sqrt{n})^{q-q'}}{1 - (e \sqrt{n})} \epsilon_1 < (e \sqrt{n})^{q'} \epsilon_1, \quad 0 < e \sqrt{n} < 1. \end{aligned}$$

b) *Existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.* Puesto que $\mathbf{x}_n$ es una sucesión convergente de un espacio vectorial euclídeo.

c) *Se verifica que $\mathbf{z} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.* En efecto, tomando límites en los dos miembros de (7), se obtiene:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} D^{-1} - g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z} D^{-1} - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D^{-1} + \mathbf{x},$$

de donde

$$[\mathbf{z} - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})] D^{-1} = 0,$$

y por ser D^{-1} reversible

$$\mathbf{z} - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Al vector $\mathbf{x}$ determinado por el par de vectores $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ de $E_{s_1}(\mathbf{b})$ y $E_{s_1}(\mathbf{c})$, respectivamente, lo representaremos por

$$(12) \quad \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

d) *La solución (12) es única cuando $\mathbf{x} \in E_{s_1}(\mathbf{a})$, $\mathbf{y} \in E_{s_2}(\mathbf{b})$ y $\mathbf{z} \in E_{s_1}(\mathbf{c})$.* En efecto, si existiera otra solución $\mathbf{x}' \in E_{s_1}(\mathbf{a})$:

$$\mathbf{z} = f(\mathbf{x}', \mathbf{y}),$$

sería

$$g(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) D^{-1} - \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D^{-1} - \mathbf{x}' = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{x} - \mathbf{x}',$$

de donde

$$|g(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

y por el teorema del valor medio, en virtud de (5),

$$\varepsilon \sqrt{n} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad (1 - \varepsilon \sqrt{n}) |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 0,$$

y como $\varepsilon \sqrt{n} < 1$, será $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 0$, luego $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = 0$.

e) φ es una aplicación continua en $E_{s_2}(\mathbf{b}) \times E_{s_2}(\mathbf{c})$. 1.º $\lim_{(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \rightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{c})} \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}$. En efecto, de (11) se deduce que

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{a}| < \frac{1}{1 - \varepsilon \sqrt{n}} |(\mathbf{z} - f(\mathbf{a}, \mathbf{y})) D^{-1}|.$$

Siendo f una aplicación continua en $A \times B$, también lo es $[\mathbf{z} - f(\mathbf{a}, \mathbf{y})] D^{-1}$, luego, dado un número positivo arbitrario, ρ , existen los números positivos η_1 y η_2 tales que, para todo $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ tal que $|\mathbf{y} - \mathbf{b}| < \eta_1$, $|\mathbf{z} - \mathbf{c}| < \eta_2$, se

se verifique que $\| [z - f(a, y) D^{-1}] \| < \rho (1 - \varepsilon \sqrt{n})$, luego $\| x_i - a \| < \rho$ y como $\varphi(y, z) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, resulta que $\lim_{(y, z) \rightarrow (b, c)} \varphi(y, z) = a = \varphi(b, c)$.

2.º Como df_x es una aplicación continua en un entorno de (a, b) , existirá un entorno $E(a, b)$ en el que df_x seguirá siendo reversible y en cada uno de los puntos de este entorno se podrá repetir el razonamiento realizado anteriormente respecto de (a, b) .

f) φ es diferenciable en (b, c) . Por ser f diferenciable en (a, b) , se verifica que

$$(13) \quad dz = df_x(a, b; dx) + df_y(a, b; dy).$$

Poniendo

$$(14) \quad df_x(a, b; dx) = dx D_x, \quad df_y(a, b; dy) = dy D_y$$

en donde D_x y D_y son matrices numéricas, y D_x es, por hipótesis, reversible, es decir,

$$(15) \quad D_x D_x^{-1} = I,$$

siendo I la matriz unidad, será:

$$(16) \quad dz = dx D_x + dy D_y, \quad dx^* = dx D_x, \quad dy^* = dy D_y.$$

Recordando la definición de norma de una aplicación lineal se obtiene, poniendo

$$(17) \quad \| df_x(a, b; dx)^{-1} \| = m, \quad \| df_x(a, b; dy) \| = n, \quad \| df(a, b; dx, dy) \| = p$$

que

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{ext. inf } \frac{|dx D_x|}{|dx|} &= \text{ext. inf } \frac{1}{\frac{|dx|}{|dx D_x|}} = \text{ext. inf } \frac{1}{\frac{|dx^* D_x^{-1}|}{|dx^*|}} \\ &= \frac{1}{\text{ext. sup } \frac{|dx^* D_x^{-1}|}{|dx^*|}} = \frac{1}{m}. \end{aligned} \right.$$

Sean dx y dy vectores arbitrarios de V_n y V_m , respectivamente, y pongamos

$$(19) \quad dz = f(a + dx, b + dy) - f(a, b).$$

De (16) y (19) se deduce

$$\lim_{(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}) \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{z} - d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}}{|d\mathbf{x}, d\mathbf{y}|} = 0,$$

de donde, dado un número positivo arbitrario ε , tal que $1 - m\varepsilon > 0$, se deduce que se puede hallar otro número, δ , tal que siempre que sea $|d\mathbf{x}| < \delta$, $|d\mathbf{y}| < \delta$ (y por tanto $|d\mathbf{x}, d\mathbf{y}| \leq |d\mathbf{x}| + |d\mathbf{y}| < 2\delta$), se verifique que

$$\frac{|d\mathbf{z} - d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}|}{|d\mathbf{x}, d\mathbf{y}|} < \varepsilon,$$

de donde

$$(20) \quad |d\mathbf{z} - d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}| < \varepsilon |d\mathbf{x}, d\mathbf{y}| \leq \varepsilon |d\mathbf{x}| + \varepsilon |d\mathbf{y}|.$$

De $\mathbf{c} = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y de (12) y (14) se deduce que

$$(21) \quad \mathbf{a} + d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{b} + d\mathbf{y}, \mathbf{c} + d\mathbf{z}).$$

De (21), y por la continuidad de φ en $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, se deduce que se puede hallar un número positivo δ' tal que

$$(22) \quad 0 < \delta' < \delta; \forall |d\mathbf{y}| < \delta', |d\mathbf{z}| < \delta' \Rightarrow |d\mathbf{x}| < \delta.$$

Por consiguiente, si $d\mathbf{y}$ y $d\mathbf{z}$ son dos vectores cualesquiera que verifiquen $|d\mathbf{y}| < \delta'$, $|d\mathbf{z}| < \delta'$, se verificará (20).

Teniendo en cuenta (17) y (18), se obtiene:

$$(23) \quad \begin{cases} |d\mathbf{z} - d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}| \geq |-d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}}| - |d\mathbf{z}| - |d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}| \\ \geq \frac{1}{m} |d\mathbf{x}| - |d\mathbf{z}| - n |d\mathbf{y}|. \end{cases}$$

De (20) y (23) se deduce:

$$(24) \quad |d\mathbf{x}| < \frac{m}{1 - m\varepsilon} |d\mathbf{z}| + \frac{m(n + \varepsilon)}{1 - m\varepsilon} |d\mathbf{y}|$$

en donde ε es un número arbitrario que se ha elegido de modo que $1 - m\varepsilon > 0$.

Ahora bien, en virtud de (20), se verifica que

$$(25) \quad \begin{cases} |d\mathbf{x} - d\mathbf{z} D_{\mathbf{x}}^{-1} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}} D_{\mathbf{x}}^{-1}| = |(d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - d\mathbf{z} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}) D_{\mathbf{x}}^{-1}| \\ \leq m |d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - d\mathbf{z} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}}| = m |d\mathbf{z} - d\mathbf{x} D_{\mathbf{x}} - (-d\mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}| \leq \\ \leq m\varepsilon |d\mathbf{x}| + m\varepsilon |-d\mathbf{y}| = m\varepsilon |d\mathbf{x}| + m\varepsilon |d\mathbf{y}|. \end{cases}$$

De (24) y (25) se deduce:

$$(26) \quad |d\mathbf{x} - d\mathbf{z} D_{\mathbf{x}}^{-1} - d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}} D_{\mathbf{x}}^{-1}| \leq m\varepsilon \frac{mn+1}{1-m\varepsilon} |d\mathbf{y}| + m\varepsilon \frac{m}{1-m\varepsilon} |d\mathbf{z}|$$

De (26), en virtud de (21), se deduce:

$$(27) \quad \frac{|\varphi(\mathbf{b} + d\mathbf{y}, \mathbf{c} + d\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - [d\mathbf{z} D_{\mathbf{x}}^{-1} + d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}} D_{\mathbf{x}}^{-1}]|}{|d\mathbf{y}, d\mathbf{z}|} < m\varepsilon \frac{mn+m+1}{1-m\varepsilon}.$$

Si η es un número positivo arbitrario, $\forall \varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{m}, \frac{\eta}{m(mn+m+1+\eta)} \right\}$ será el último miembro de (27) menor que η , luego:

$$(28) \quad \boxed{d\varphi(\mathbf{b}, \mathbf{c}; d\mathbf{y}, d\mathbf{z}) = d\mathbf{z} D_{\mathbf{x}}^{-1} + d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}} D_{\mathbf{x}}^{-1}}$$

con lo que queda totalmente probado el teorema.

EJERCICIOS:

905. Dada la aplicación

$$f: \begin{cases} z_1 = x_1^2 - 2x_1y_1 + x_2y_2, \\ z_2 = x_1y_2 + x_2y_1, \end{cases}$$

calcular $d\varphi$, siendo $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

906. Calcular el vector $\mathbf{x}$ correspondiente a los vectores $\mathbf{y} = (1, 1)$, $\mathbf{z} = (2, 3)$, en la aplicación φ , con una aproximación de una milésima.

907. Calcular la raíz de la ecuación: $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sh} x = 0$.

2. COROLARIO 1.—Dada la aplicación $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, si existe $df_{\mathbf{x}}$ y es continua en un entorno del punto $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, siendo reversible en el punto $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, existe una aplicación $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$, que es continua en un cierto entorno de $\mathbf{b}$, verificándose idénticamente en él que

$$f(\varphi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Además se verifica que

$$d\varphi(\mathbf{y}) = d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}} D_{\mathbf{x}}^{-1}$$

3. COROLARIO 2.—Dada la aplicación $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ es distinta de cero en el punto $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, siendo continua en un entorno

de él, existe una aplicación $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, continua en un entorno de $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, tal que, en dicho entorno, se verifique idénticamente:

$$f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

siendo en $(x_1^0, \dots, x_n^0)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

4. COROLARIO 3.—Dada la aplicación $\mathbf{z} = f(\mathbf{x})$, si existe df y es continua en un entorno $\mathbf{x}_0$, siendo reversible en él, existe una aplicación $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{z})$, llamada inversa de la anterior, tal que en un entorno de $\mathbf{z}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ se verifica idénticamente $\mathbf{z} = f(\varphi(\mathbf{z}))$. En el vector $\mathbf{z}_0$ se verifica

$$d\varphi = d\mathbf{z} D^{-1}, \quad d\mathbf{z} = d\mathbf{x} D.$$

5. COROLARIO 4. (TEORÍA GENERAL DE LA ELIMINACIÓN).—Si $\mathbf{z} = f(\mathbf{x})$ es una aplicación, con diferencial continua, de un espacio vectorial euclídeo V_n en otro V_m , verificándose que $\mathbf{0} = f(\mathbf{a})$, y si $z_i = z_i(x_1, \dots, x_n)$ son las ecuaciones de f , siendo rango $\frac{\partial(z_1, \dots, z_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = r$ en un entorno E de $\mathbf{a}$, se verifica que el sistema de ecuaciones

$$(29) \quad z_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

es equivalente en E a un sistema de la forma

$$(30) \quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(x_{r+1}, \dots, x_n), & i = 1, \dots, r \\ \Phi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = 0, & j = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

en donde las Φ_j no dependen de $x_{r+1}, \dots, x_n$.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que $\left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \right| \neq 0$ en E . Poniendo

$$\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_r), \quad \mathbf{x}'' = (x_{r+1}, \dots, x_n),$$

la aplicación $o = z_i(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, $i = 1, \dots, r$, posee diferencial, reversible en E , respecto de $\mathbf{x}'$, luego en virtud del teorema será $\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}'')$. Llevando estos valores de $(x_1, \dots, x_r)$ a las ecuaciones $z_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = r+1, \dots, n$, se obtiene

$$(31) \quad \Phi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = z_{r+j}(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

Ahora bien, diferenciando las identidades:

$$z_i(\varphi_1, \dots, \varphi_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} dz_i &= \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_r} d\varphi_r \\ &+ \frac{\partial z_i}{\partial x_{r+1}} dx_{r+1} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Pero, por ser el rango de $\frac{\partial(z_1, \dots, z_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = r$, resulta que

$$dz_{r+j} = \sum_{i=1}^r c_i dz_i,$$

luego diferenciando (31):

$$d\Phi = dz_{r+j} = \sum_{i=1}^r c_i dz_i = 0.$$

lo que prueba que las Φ_j no dependen de $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Las condiciones $\Phi_j = 0$, $j = r + 1, \dots, n$ son, por tanto, necesarias y suficientes para la equivalencia de los sistemas (29) y

$$(32) \quad x_i = \varphi_i(x_{r+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, r$$

en el entorno E de $\mathbf{a}$. Las funciones Φ_j reciben el nombre de *resultantes* del sistema (29) al eliminar $x_1, \dots, x_r$. Las ecuaciones $z_i = 0$, $i = 1, \dots, r$ se llaman *principales*, y las variables $x_1, \dots, x_r$, *variables principales*.

EJERCICIOS:

908. Hallar las ecuaciones principales y la resultante del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 x_3 - x_2^2 &= 0, \\ x_1^2 - x_2 &= 0, \\ x_1 x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

en un entorno del punto $(1, 1, 1)$.

921. Hallar los ejes de la cónica intersección de la cuádrica del ejercicio anterior con el plano

$$l(x) = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

[Solución: Se trata de hallar los máximos y mínimos de la función $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ con las dos ligaduras $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $l(x) = 0$].

922. Definir condiciones necesarias de extremo relativo de la función z de x, y definida mediante las ecuaciones paramétricas:

$$z = F(\lambda_1, \lambda_2), \quad x = f_1(\lambda_1, \lambda_2), \quad y = f_2(\lambda_1, \lambda_2).$$

923. Idem para la función z definida por

$$z = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad x_1 = f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \dots, x_r = f_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \varphi_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0, \dots, \varphi_{n-r}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0.$$

924. Calcular los puntos de la siguiente cónica cuyas distancias al plano $z = 0$ son máxima y mínima:

$$\left. \begin{aligned} f &= x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ g &= 4x + y - 2z = 0. \end{aligned} \right\}$$

925. Calcular los ejes de la cónica del ejercicio anterior.

4. Cambio de variables.—Sea $A \xrightarrow{f} V_m$ una aplicación del abierto A de V_n en V_m , que suponemos diferenciable en A . Sea $B \xrightarrow{g} A$ una biyección diferenciable del abierto B de V_n sobre el abierto A . La aplicación producto fg se llama *cambio directo de variables*:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \\ h \searrow & & \swarrow f \\ & V_m & \end{array} \quad \mathbf{x} = g(\mathbf{t}), \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{t}).$$

Por consiguiente:

$$(2) \quad d h(\mathbf{t}; d \mathbf{t}) = d f(g(\mathbf{t}); d \mathbf{x}) \circ d g(\mathbf{t}; d \mathbf{t})$$

son las fórmulas que permiten calcular la diferencial respecto de las nuevas variables $\mathbf{t}$. Si

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} d g(\mathbf{t}; d \mathbf{t}) &= d \mathbf{t} J, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}, \quad d \mathbf{t} = (d t_1, \dots, d t_n), \\ d f(\mathbf{x}; d \mathbf{x}) &= d \mathbf{x} J_1, \end{aligned} \right.$$

siendo

$$J_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = g(t),$$

esto es, la matriz que resulta al sustituir en $\frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ el vector $\mathbf{x}$ por el vector $g(t)$, la ecuación (2) se puede escribir en la siguiente forma:

$$(4) \quad \boxed{d\mathbf{y} = d\mathbf{t} J J_1(t)}$$

La biyección g puede venir definida por ecuaciones implícitas, en cuyo caso bastará aplicar el teorema de existencia de funciones implícitas. Supongamos que la biyección g viene definida implícitamente por las ecuaciones

$$(5) \quad F(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Del teorema de existencia de funciones implícitas se deduce que

$$dF_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) + dF_t(\mathbf{x}, t; dt) = 0,$$

de donde, si

$$dF_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t; d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} J_{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad dF_t(\mathbf{x}, t; dt) = dt J_t,$$

resulta:

$$d\mathbf{x} = -dt J_t J_{\mathbf{x}}^{-1},$$

y sustituyendo en (4), se obtiene la siguiente fórmula para el cambio de variables en este caso:

$$(6) \quad \boxed{d\mathbf{y} = -dt J_t J_{\mathbf{x}}^{-1} J_1(t)}$$

Si en lugar de venir definida en forma implícita la biyección g , viene definida en forma implícita la aplicación f , se procede de modo análogo. Sea, en efecto,

$$(7) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

la ecuación implícita de f . Si

$$d G_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d \mathbf{x}) = d \mathbf{x} J_{\mathbf{x}}^*, \quad d G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d \mathbf{y}) = d \mathbf{y} J_{\mathbf{y}}^*,$$

será:

$$d \mathbf{y} = - d \mathbf{x} J_{\mathbf{x}}^* J_{\mathbf{y}}^{*-1},$$

y en virtud de (4), será:

$$(8) \quad \boxed{d \mathbf{y} = - d t J (J_{\mathbf{x}}^* J_{\mathbf{y}}^{*-1})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}}$$

Finalmente, si tanto f como g vienen definidas en forma implícita por las ecuaciones (7) y (5), respectivamente, la fórmula del cambio de variables será:

$$(9) \quad \boxed{d \mathbf{y} = d t (J_t J_{\mathbf{x}}^{-1}) (J_{\mathbf{x}}^* J_{\mathbf{y}}^{*-1})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}}$$

Se conoce con el nombre de *cambio inverso de variables* al problema de calcular la diferencial de f mediante las diferenciales de g y de h , siendo g una biyección diferenciable. De (2) se deduce que:

$$(10) \quad d f(\mathbf{x}; d \mathbf{x}) = d h(\mathbf{t}; d \mathbf{t}) \circ d^{-1} g(\mathbf{t}; d \mathbf{t}).$$

En el caso de venir en forma explícita tanto f como g , la fórmula (10) se escribe:

$$(11) \quad \boxed{d \mathbf{y} = d \mathbf{x} J^{-1} J_2}, \quad \text{siendo} \quad d \mathbf{y} = d t J_2$$

Si g viene definida en forma implícita por las (5), se obtiene:

$$(12) \quad \boxed{d \mathbf{y} = - d \mathbf{x} J_{\mathbf{x}} J_t^{-1} J_2.}$$

Si h viene definida en forma implícita por las ecuaciones

$$(13) \quad H(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = 0,$$

y si

$$d H_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}, \mathbf{y}; d \mathbf{t}) = d t J_{\mathbf{t}}^* \quad d H_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}, \mathbf{y}; d \mathbf{y}) = d \mathbf{y} J_{\mathbf{y}}^{**}$$

será:

$$(14) \quad \boxed{d y = - d x J^{-1} J_t^{**} J_y^{*-1}}$$

Finalmente, si tanto g como h vienen definidas implícitamente, las fórmulas del cambio de variables serán:

$$(15) \quad \boxed{d y = d x J_x J_t^{-1} J_t^{**} J_y^{*-1} .}$$

Como resumen de todos los casos resulta que *cualquier problema de cambio de variables se reduce a un problema de eliminación lineal.*

EJERCICIOS:

926. Calcular la diferencial de la aplicación $t \rightarrow y$ definida implícitamente por

$$\begin{cases} x_1^2 t_1 + x_2 - 2 t_2 + t_2^3 + 1 = 0, \\ x_1 t_1 t_2 - x_2^2 t_1 + t_1 t_2 + t_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 x_2 + y_2 x_1 + y_3 = 0 \\ y_1 + x_1 x_2 - x_2 = 0 \\ y_2^2 - x_1 x_2 y_3 + 2 y_3 = 0. \end{cases}$$

927. Calcular la diferencial del ejercicio anterior para $t_1 = t_2 = 1$, $x_1 < 0$.

928. Dada la aplicación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, y la biyección definida por $\frac{ds}{dt} = \{\mathbf{x}(t)\}$, efectuar el cambio de variable $t \rightarrow s$.

CAPITULO SEPTIMO

CALCULO NUMERICO

En este capítulo se estudian algunos métodos elementales de cálculo numérico como aplicación del cálculo diferencial. El cálculo numérico de integrales se estudiará en el capítulo respectivo.

§ 1. RESOLUCION DE ECUACIONES

1. Ecuaciones algebraicas. Relaciones entre las raíces y los coeficientes de un polinomio.—Se llama *ecuación algebraica con una incógnita* a toda relación de la forma

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

que se obtiene igualando a cero un polinomio en una indeterminada o incógnita x . *Raíz, cero o solución* de una ecuación es todo número que sustituido en lugar de la incógnita transforma la ecuación en una igualdad numérica. Las ecuaciones algebraicas pueden ser con coeficientes enteros, racionales, reales o complejos. En lo que sigue, mientras no se advierta lo contrario, supondremos que los coeficientes son números reales. El Algebra clásica descansa en el siguiente:

1. TEOREMA FUNDAMENTAL.—*Toda función algebraica, con coeficientes complejos, posee una raíz dentro del cuerpo de los números complejos.*

De este teorema y del teorema de la divisibilidad de un polinomio por el binomio $x - a$, se deduce:

2. COROLARIO.—*Una ecuación algebraica de grado n , con coeficientes complejos, posee exactamente n raíces dentro del cuerpo de los números complejos. Estas raíces pueden, parcial o totalmente, ser iguales entre sí.*

Si una ecuación (1) posee α raíces iguales a a , siendo todas las restantes raíces distintas de a , se dice que a es una *raíz múltiple de orden α* de (1).

Si las raíces de (1) son $r_1, \dots, r_s$, con multiplicidades $\rho_1, \dots, \rho_s$, respectivamente, $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s = n$, se verifica que

$$(2) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 (x - r_1)^{\rho_1} \dots (x - r_s)^{\rho_s}$$

Al segundo miembro de (2) se le llama descomposición factorial del polinomio del primer miembro. (Obsérvese que, aunque el polinomio del primer miembro tenga sus coeficientes reales, los binomios del segundo pueden tenerlos complejos, por ejemplo: $x^2 + 1 \equiv (x + i)(x - i)$.)

Efectuando el producto del segundo miembro de (2) e identificando los coeficientes con los del polinomio del primer miembro, se obtiene

$$(3) \quad \sum r_{i_1} \dots r_{i_t} = (-1)^t \frac{a_t}{a_0}$$

en donde la suma del primer miembro está extendida a todas las combinaciones t -arias de las raíces $(r_1, \dots, r_1; r_2, \dots, r_2; \dots; r_s, \dots, r_s)$ (en donde se considera cada raíz tantas veces como indica su multiplicidad). Para mayor claridad, supondremos ahora que todas las raíces de (1) sean simples, es decir,

$$(4) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n).$$

Una función $\Phi(r_1, \dots, r_n)$ se llama simétrica cuando $\Phi(r_1, \dots, r_n) = \Phi(r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(n)})$, siendo σ una permutación arbitraria de $(1, \dots, n)$. Como al efectuar una permutación cualquiera entre raíces de (4) no se altera el segundo miembro, lo mismo sucede al primero, luego *los coeficientes de una ecuación son funciones simétricas de las raíces*. Estas funciones simétricas (3) se llaman *funciones simétricas fundamentales*.

Otra función simétrica muy importante de las raíces de una ecuación algebraica (1) es la siguiente, llamada *discriminante* de la ecuación:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} D = a_0^{2(n-1)} & (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 \dots (r_1 - r_n)^2 \\ & \times (r_2 - r_3)^2 \dots (r_2 - r_n)^2 \\ & \dots \dots \dots \\ & \times (r_{n-1} - r_n)^2. \end{aligned} \right.$$

Evidentemente, al efectuar cualquier permutación entre las $r_1, \dots, r_n$ se produce únicamente una alteración en el orden de los factores del segundo miembro. De la expresión (5) se deduce que *la anulación del discriminante de una*

ecuación es condición necesaria y suficiente para que la ecuación posea una raíz múltiple.

EJERCICIO:

929. Calcular los discriminantes de las ecuaciones de segundo y tercer grados. [Solución: $D = a_1^2 - 4 a_0 a_2$, $D = a_1^2 a_2^2 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 - 27 a_0^2 a_3^2$ respectivamente.]

2. Resultantes.—Dadas dos ecuaciones algebraicas:

$$(6) \quad \begin{cases} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0, \end{cases}$$

se llama *resultante* a toda relación $R(a, b)$ entre los coeficientes de ambas ecuaciones, cuya anulación sea necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones tengan una raíz común.

Para hallar una condición necesaria supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ tengan una raíz común r_1 . Si (4) es la descomposición factorial de $f(x)$ y

$$(7) \quad g(x) = b_0 (x - r'_1) \dots (x - r'_m)$$

es la descomposición factorial de $g(x)$ y $r_1 = r'_1$, los polinomios $h(x) = a_0 (x - r_2) \dots (x - r_n)$ y $k(x) = b_0 (x - r'_2) \dots (x - r'_m)$ serán de grados $n-1$ y $m-1$, respectivamente, y se verificará, idénticamente:

$$(8) \quad f(x) k(x) \equiv g(x) h(x).$$

Hemos alcanzado el siguiente resultado: para que $f(x)$ y $g(x)$ tengan una raíz común *es necesario* que existan dos polinomios, $h(x)$ y $k(x)$, de grados $n-1$ y $m-1$, respectivamente, tales que se verifique la identidad (8).

Vamos a ver que esta condición es suficiente. En efecto, supongamos que

$$h(x) \equiv c_0 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} \equiv c_0 (x - s_1) \dots (x - s_{n-1})$$

y

$$k(x) \equiv d_0 x^{m-1} + \dots + d_{m-1} \equiv d_0 (x - t_1) \dots (x - t_{m-1}),$$

sean dos polinomios de grados $n-1$ y $m-1$, respectivamente, que verifiquen la identidad (8). El factor $(x - r_1)$ divide al primer miembro de (8), luego debe dividir al segundo. Si $x - r_1$ es igual a uno de los factores de

$g(x)$ habremos terminado la demostración. En otro caso lo será de $h(x)$, por ejemplo $x - r_1 \equiv x - s_1$. En este caso consideraríamos el factor $x - r_2$ y así seguiríamos. Si llegamos a un factor $x - r_i$ que lo sea también de $g(x)$, habremos acabado la demostración; en caso contrario, todos los factores de $f(x)$ tendrían que serlo de $h(x)$, y como este polinomio sólo tiene $n-1$ factores, uno por lo menos de los factores de $f(x)$ no puede serlo de $h(x)$; tal factor lo será, por tanto, de $g(x)$. Por consiguiente: *la condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ y $g(x)$ tengan una raíz común es que existan los polinomios $h(x)$ y $k(x)$, de grados $n-1$ y $m-1$, respectivamente, tales que se verifique la identidad (8).* Efectuando el producto de los polinomios de ambos miembros de (8), e identificando los coeficientes de los términos semejantes, se obtiene:

$$(9) \quad \begin{cases} a_0 d_0 & - b_0 c_0 & = 0 \\ a_1 d_0 + a_0 d_1 & - b_1 c_0 - b_0 c_1 & = 0 \\ a_2 d_0 + a_1 d_1 + a_0 d_2 & - b_2 c_0 - b_1 c_1 - b_0 c_2 & = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n d_0 + a_{n-1} d_1 + \dots + a_{n-m+1} d_{m-1} & - b_m c_0 - b_{m-1} c_1 - b_{m-2} c_2 \dots - b_0 c_{n-1} & = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ & a_n d_{m-1} & - b_m c_{n-1} = 0 \end{cases}$$

La existencia de los polinomios $h(x)$ y $k(x)$ que verifiquen (8) es, por tanto, equivalente a la existencia de solución para el sistema (9), en el que se consideran como incógnitas las d_i y las c_i . Como el número de incógnitas, igual al de ecuaciones, es $m+n$, la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución en (9) es que

$$(10) \quad R(a; b) \equiv \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & \vdots & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_n & \vdots & \dots & a_0 & \vdots & \vdots & \dots & b_0 \\ 0 & a_n & \dots & \vdots & b_m & b_{m-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 & b_m & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_m \end{vmatrix} = 0.$$

La anulación del determinante (10) es, por consiguiente, una condición necesaria y suficiente para que los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ tengan una raíz común. Dicho determinante (10) es, pues, la **resultante** de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$.

Derivando la identidad (4), se obtiene que la condición necesaria y sufi-

ciente para que $f(x)$ posea una raíz múltiple es que $f(x)$ y $f'(x)$ posean una raíz común. Por consiguiente, *el discriminante de una ecuación es igual a la resultante de dicha ecuación y de su ecuación derivada*. Esto da otro método de cálculo del discriminante.

EJERCICIO:

930. Comprobar que el discriminante de las ecuaciones de segundo y tercer grados calculados mediante la resultante coinciden con los calculados mediante las funciones simétricas fundamentales.

3. Eliminación.—Sean las ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$(11) \quad \begin{cases} f(x, y) \equiv a_0(x) y^n + a_1(x) y^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0, \\ g(x, y) \equiv b_0(x) y^m + b_1(x) y^{m-1} + \dots + b_m(x) = 0. \end{cases}$$

Para resolver el sistema (11) se comienza por hallar todos los valores de una de las variables, por ejemplo de x , para los que (11) posea solución en y . Según acabamos de ver, para que (11), considerando como única incógnita la y , tenga una solución, es necesario y suficiente que

$$(12) \quad R(a(x); b(x)) = 0.$$

Ahora bien, en el caso actual, como los coeficientes de las y en (11) son a su vez polinomios en x , (12) es una ecuación en x que proporciona todos los valores de x que, sustituidos en (11), hacen compatible al sistema, considerado como sistema en y . La resultante (12) se dice que es la ecuación que resulta de eliminar y entre las dos ecuaciones (11), por lo que también recibe el nombre de *eliminante*. En general, dadas las r ecuaciones:

$$(13) \quad f_1(x, y) = 0, \dots, f_r(x, y) = 0,$$

se llama *eliminar la incógnita y* entre todas ellas, a la operación que consiste en pasar del sistema (13) al sistema

$$(14) \quad R_{12}(x) = 0, \quad R_{13}(x) = 0, \dots, R_{r-1,r}(x) = 0,$$

en donde $R_{ij}(x)$ es la resultante correspondiente a f_i y f_j . Obsérvese que el número de ecuaciones en (14) es $\binom{r}{2}$ y que, en general, no puede prescindirse de ninguna de ellas, pues al hacerlo se pueden introducir soluciones extrañas.

EJERCICIO:

931. La ecuación del cono que desde el punto (a, b, c) proyecta a la cúbica alabeada $x = t, y = t^2, z = t^3$, se obtiene eliminando t entre las tres ecuaciones:

$$\frac{x-a}{t-a} = \frac{y-b}{t^2-b} = \frac{z-c}{t^3-c}.$$

Hallar la ecuación de este cono.

En vez de dos incógnitas, en (13) puede haber n ; el proceso de la eliminación de una incógnita, como es natural, no depende esencialmente del número de ellas.

4. Raíces racionales de una ecuación.—Consideremos el caso en que los coeficientes de (1) sean racionales. Multiplicando la ecuación por el mínimo común denominador de todos sus coeficientes se obtiene otra ecuación equivalente a ella cuyos coeficientes son enteros. Podemos, por consiguiente, suponer que se ha realizado ya esta preparación previa y que en (1) los coeficientes son enteros. Efectuando el cambio de variable $a_0 x = y$ y multiplicando por a_0^{n-1} los dos miembros de (1), se obtiene:

$$(15) \quad y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 a_0 y^{n-2} + \dots + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Toda solución racional de (15) debe ser entera, pues si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de (15) siendo p y q primos entre sí, multiplicando por q^n todo divisor primo de q tendría que serlo también de p , contradicción. Por consiguiente, si r es una raíz racional entera de (15) deberá dividir a $a_0^{n-1} a_n$. Como el número de divisores de $a_0^{n-1} a_n$ es finito, mediante un número finito de operaciones se pueden separar las raíces racionales enteras de (15). Ahora bien, toda raíz racional de (1) se transforma en una raíz racional entera de (15), luego halladas todas las raíces racionales enteras de (15) se obtienen todas las racionales de (1) sin más que dividir aquéllas por a_0 .

EJERCICIO:

932. Separar las raíces racionales de la ecuación: $60x^5 - 37x^4 - 158x^3 + 98x^2 + 76x - 48 = 0$.

5. Separación de las raíces irracionales.—Vamos a ocuparnos ahora del problema de calcular, con una aproximación dada, las raíces reales de una ecuación algebraica. Para ello se comienza por buscar una ecuación cuyas raíces sean las mismas de la ecuación dada, pero que sean todas ellas simples. Como las raíces múltiples de una ecuación son las que tiene comu-

Los polinomios $f(x)$, $f_1(x)$ y los $f_2(x), \dots, f_n(x)$ obtenidos en (17) forman una sucesión de Sturm, como se comprueba fácilmente. (Obsérvese que por tener $f(x)$ todas sus raíces simples, f_n es una constante.)

El teorema siguiente no resuelve completamente el problema, pero en muchos casos es suficiente y de más fácil aplicación que el de Sturm.

TEOREMA DE BUDAN-FOURIER.—*El número de raíces de $f(x)$ pertenecientes a I es igual a $v'(x) - v'(\beta)$, o es inferior a este número en un número par, siendo $v'(x)$ el número de variaciones de la sucesión*

$$(18) \quad f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

para $x = \alpha$, y , análogamente, $v'(\beta)$. En efecto, para que se produzca un cambio en los signos de la sucesión (18), cuando x recorre el intervalo I , es necesario que uno de los polinomios (18) se anule en un punto ξ de este intervalo. Si $f^{(v)}(\xi) = 0$, el par $(f^{(v)}(\xi - \epsilon), f^{(v+1)}(\xi - \epsilon))$ forma siempre variación y $(f^{(v)}(\xi + \epsilon), f^{(v+1)}(\xi + \epsilon))$ forma siempre permanencia, luego se pierde una variación al pasar por ξ . Si $\text{sig.}(f^{(v-1)}(\xi)) = \text{sig.}(f^{(v+1)}(\xi))$ se pierde también una variación al pasar de $(f^{(v-1)}(\xi - \epsilon), f^{(v)}(\xi - \epsilon))$ a $(f^{(v-1)}(\xi + \epsilon), f^{(v)}(\xi + \epsilon))$; mientras que si $\text{sig.}(f^{(v-1)}(\xi)) \neq \text{sig.}(f^{(v+1)}(\xi))$ se gana una variación en este paso. Es decir, al pasar por ξ se pierden dos variaciones, cuando $\text{sig.}(f^{(v-1)}(\xi)) = \text{sig.}(f^{(v+1)}(\xi))$ o no hay alteración en el número de variaciones cuando estos signos son distintos.

Un corolario del teorema de Budan-Fourier, cuando se toma $I = (0, +\infty)$, es el siguiente:

TEOREMA DE DESCARTES.—*El número de raíces positivas de la ecuación (1) es igual, o inferior en un número par, al número de variaciones de la sucesión formada por los coeficientes de la ecuación.*

Sea $F(x)$ el polinomio que se obtiene cambiando x por $-x$ en $f(x)$. Las raíces positivas de $F(x)$, cambiadas de signo, son las raíces negativas de $f(x)$. Esto permite enunciar el teorema de Descartes para las raíces negativas. Además, el número de variaciones en la sucesión de coeficientes de $f(x)$, que representaremos por v , es igual al número de permanencias en la sucesión de los coeficientes de $F(x)$, que representaremos por p^* . Llamando π y v a los números de raíces positivas y negativas, respectivamente, de $f(x)$, y v^* al número de variaciones de la sucesión de los coeficientes de $F(x)$, será $\pi = v - 2k$, $v = v^* - 2k'$.

Ahora bien, el número de permanencias, más el de variaciones en los signos de una sucesión de números, es igual al número de términos de la sucesión disminuido en una unidad. Por consiguiente, $p^* + v^* = n$, siendo

n el grado de (1); luego teniendo en cuenta que $v = p^*$ y sumando las igualdades anteriores, se obtiene $\pi + v = v + v^* - 2(k + k') = n - 2(k + k')$. Si $f(x)$ poseyese todas sus raíces reales, sería $\pi + v = n$, y llevando este valor a la ecuación anterior, resultaría $k + k' = 0$, pero como k y k' son números no negativos, $k = k' = 0$. Por consiguiente:

TEOREMA 1.— *Si $f(x)$ posee todas las raíces reales, el número de sus raíces positivas es igual al número de variaciones de la sucesión de sus coeficientes.*

TEOREMA 2.— *Si $f(x)$ posee todas sus raíces reales, la diferencia entre el número de raíces positivas y el número de raíces negativas es igual a la diferencia entre el número de permanencias y el número de variaciones en los signos de la sucesión que se obtiene cambiando alternativamente el signo a la sucesión formada por los coeficientes de $f(x)$.*

Los teoremas 1 y 2 se han utilizado ((8), 3, § 1, cap. IV) para el cálculo de la signatura de una forma cuadrática.

6. Cálculo de las raíces reales de una ecuación.—Para efectuar el cálculo numérico de las raíces de una ecuación algebraica (1), se comienza, como ya se ha dicho, por dividir la ecuación por el máximo común divisor de la ecuación y su derivada, con lo que se obtiene una ecuación con todas sus raíces simples. Se calculan a continuación las raíces racionales (4) y se divide por los binomios correspondientes a cada una de éstas, con lo que se obtiene una ecuación cuyas raíces son todas irracionales o imaginarias. Si esta ecuación es de grado superior al cuarto, y aun en los casos que sea de tercer o cuarto grados, se procede a separar las raíces reales, es decir, determinar unos intervalos $I_1, I_2, \dots$, tales que en el interior de cada uno de ellos exista una raíz y sólo una. Para ello se aplica el teorema más conveniente de los estudiados en 5. Una vez separadas las raíces reales, vamos a estudiar los principales métodos para calcularlas con una aproximación dada. Supongamos, por tanto, que se ha separado la raíz ξ de la ecuación (1); $f(x) = 0$, mediante el intervalo $I = (\alpha, \beta)$, es decir, $f(\xi) = 0$, $\alpha < \xi < \beta$. Como los métodos de interpolación y de Newton que vamos a ver son válidos para ecuaciones trascendentes, prescindiremos de la hipótesis de ser $f(x)$ un polinomio.

MÉTODO DE INTERPOLACIÓN O REGULA FALSI.—Consideremos la curva $y = f(x)$ y la cuerda c determinada por los puntos $A = (\alpha, f(\alpha))$, $B = (\beta, f(\beta))$. Como $f(x)$ es una función continua que posee una única raíz en I , los signos de $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ serán distintos, luego la cuerda AB cortará al eje x en un punto x^1 del intervalo α, β . Este punto x^1 , juntamente con aquel extre-

mo de I en el que $f(x)$ toma signo distinto a $f(\alpha^1)$, proporciona un intervalo I_1 más pequeño que I , que contiene a ξ . De este modo se puede ir reduciendo de vez en vez el intervalo que contiene a ξ hasta obtener la aproximación deseada. El punto α^1 es

$$(19) \quad \alpha^1 = \alpha - f(\alpha) \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

MÉTODO DE NEWTON.—Cuando el intervalo I es pequeño, se puede sustituir $f(x)$ por su desarrollo de Taylor en las proximidades de ξ . Poniendo $\xi = \alpha + h$, será:

$$(20) \quad f(\xi) = f(\alpha + h) = f(\alpha) + h f'(\alpha) + \frac{1}{2} h^2 f''(\alpha) + \dots$$

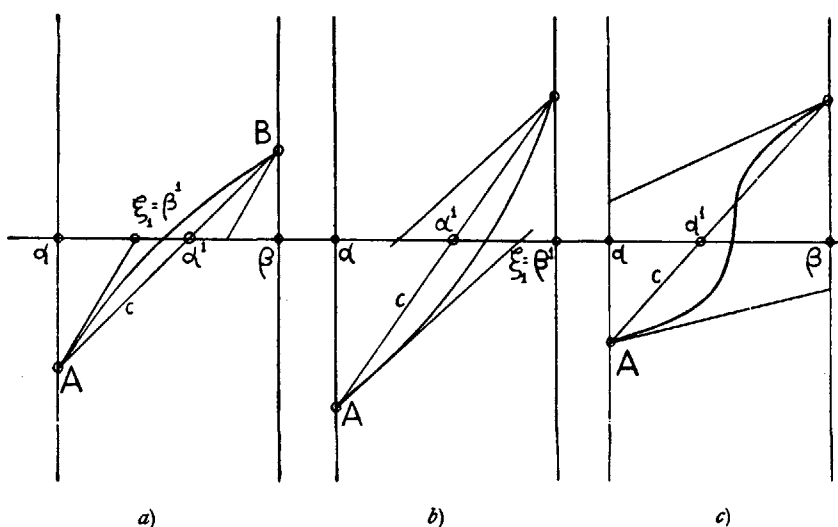


Fig. 107,

Siendo h pequeño, en una primera aproximación se pueden tomar sólo los dos primeros términos de (20), y teniendo en cuenta que $f(\xi) = 0$, será:

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \xi_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

El valor ξ_1 no será igual a ξ , por haber prescindido de todos los términos que siguen al segundo, pero en muchos casos constituirá una aproximación de ξ . En efecto, el punto ξ_1 es el de intersección de la tangente en $A = (\alpha, f(\alpha))$ con el eje x , y en los casos de la figura 107, a) y b), se obtiene una mejor aproximación. No así en el caso c).

Un criterio para saber cuándo conviene aplicar el método es el siguiente: Si $f'(x)$ y $f''(x)$ tienen signo constante en el intervalo I , y si $\text{sig.}(f''(\beta)) = \text{sig.}(f(\beta))$, el intervalo $I^1(x^1, \beta^1)$, siendo

$$(21) \quad \alpha^1 = \alpha - \frac{f(\alpha)(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}, \quad \beta^1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

está contenido en el intervalo I . (Obsérvese que el punto α^1 es el de intersección de la cuerda AB con el eje x .)

EJERCICIO:

933. Calcular con cuatro cifras exactas la raíz de $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$ comprendida entre $\alpha = 2,3$ y $\beta = 2,4$.

§ 2. CALCULO NUMERICO

El cálculo numérico trata del siguiente problema: Definida una función por cualquiera de los procedimientos empleados en el Análisis Matemático, calcular el valor de la función correspondiente a un valor dado de la variable independiente con una aproximación dada.

Los métodos para tal cálculo dependen de la forma de definir la función (mediante su expresión analítica, por una serie o una sucesión, mediante una integral o mediante una ecuación diferencial, etc...), dependen también de la naturaleza de la misma (función inversa de una dada, función implícita, etcétera). A continuación estudiaremos algunos de los métodos más elementales correspondientes a funciones definidas mediante los procesos estudiados en los capítulos anteriores.

1. Interpolación.—El problema de la interpolación puede enunciarse así: Conocidos los valores y_i de la función, $y = f(x)$ de una variable real y de clase C^n , correspondientes a los valores $x_i < x_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$, de la variable independiente, calcular el valor y' de la función para $x = x'$, $x_0 < x' < x_n$ con una aproximación dada. El cálculo de y' debe hacerse, por consiguiente, empleando únicamente los números x_i e y_i , es decir, sin recurrir a la expresión matemática de la función, que puede ser desconocida.

1. MÉTODO DE AITKEN.—Si el punto x' se encuentra entre x_0 y x_1 , una primera aproximación se obtiene interpolando por partes proporcionales, es de-

cir, sustituyendo el arco de curva entre los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ por la cuerda $P_0 P_1$:

$$(1) \quad y_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

En general, si $x_{i-1} < x' < x_i$, la fórmula de interpolación por partes proporcionales será:

$$(2) \quad y_{i-1,i}(x) = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \begin{vmatrix} x - x_{i-1} & y_{i-1} \\ x - x_i & y_i \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ahora bien, en muchas ocasiones la fórmula (2) no proporciona la aproximación necesaria. En tal caso, si x pertenece al segmento x_{i-1}, x_{i+1} se puede sustituir el arco de curva $P_{i-1} P_{i+1}$ por un arco de parábola de segundo orden de eje paralelo al y que pase por P_{i-1}, P_i, P_{i+1} . Como la recta $y = y_{i-1,i}(x)$ pasa por P_{i-1}, P_i y la recta $y_{i,i+1}(x)$ pasa por P_i, P_{i+1} , resulta que la parábola de segundo orden

$$y_{i-1,i,i+1}(x) = \frac{(x - x_{i-1}) y_{i,i+1} - (x - x_{i+1}) y_{i-1,i}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

pasa por los tres puntos P_{i-1}, P_i, P_{i+1} . Esta ecuación se puede escribir en forma determinante así:

$$(3) \quad y_{i-1,i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \begin{vmatrix} x - x_{i-1} & y_{i-1,i} \\ x - x_{i+1} & y_{i,i+1} \end{vmatrix}.$$

Las parábolas (3) proporcionan, generalmente, una mayor aproximación que las rectas (2). Cuando esta aproximación no es todavía suficiente se emplean parábolas cúbicas que pasen por $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$. En general, si se han calculado las parábolas de orden r : $y_{i,i+1,\dots,i+r}$, se calculan las de orden $r+1$ mediante la fórmula:

$$(4) \quad y_{i,i+1,\dots,i+r+1} = \frac{1}{x_{i+r+1} - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & y_{i,\dots,i+r} \\ x - x_{i+r+1} & y_{i+1,\dots,i+r+1} \end{vmatrix}$$

La ventaja de este método consiste en que se va obteniendo la aproximación mediante aproximaciones sucesivas y que todos los cálculos efectuados se aprovechan para obtener una mejor aproximación, lo que permite proseguirlos hasta obtener la deseada.

EJERCICIO:

934. a) Calcular $\text{sen}(4,238)$ con cinco cifras decimales exactas sabiendo que $\text{sen}(4) = -0,75680250$, $\text{sen}(4,1) = -0,81827711$, $\text{sen}(4,2) = -0,87157577$, $\text{sen}(4,3) = -0,91616594$, $\text{sen}(4,4) = -0,95160207$, $\text{sen}(4,5) = -0,97753012$. b) $\exp(0,20) = 1,2214027581$, $\exp(0,21) = 1,2336780599$, $\exp(0,22) = 1,2460767305$, $\exp(0,23) = 1,2586000099$, $\exp(0,24) = 1,2712491503$. Calcular $\exp(0,226)$. c) $\cos(1,0) = 0,5403023058$, $\cos(1,1) = 0,4535961214$, $\cos(1,2) = 0,3623577544$, $\cos(1,3) = 0,2674988286$, $\cos(1,4) = 0,1699671429$. Calcular $\cos(1,189)$. d) $\text{arc tg}(0,05) = 0,04995$, $\text{arc tg}(0,1) = 0,09966$, $\text{arc tg}(0,15) = 0,14888$, $\text{arc tg}(0,2) = 0,19739$. Calcular $\text{arc tg}(0,123)$. e) $\text{sh}(0,5) = 0,52109$, $\text{sh}(0,6) = 0,63665$, $\text{sh}(0,7) = 0,75858$, $\text{sh}(0,8) = 0,88810$. Calcular $\text{sh}(0,66)$. f) $\text{arg th}(0,1) = 0,100335347$, $\text{arg th}(0,2) = 0,202732554$, $\text{arg th } 0,3 = 0,309519604$, $\text{arg th } 0,4 = 0,423648930$, $\text{arg th } 0,5 = 0,549306144$, $\text{arg th } 0,6 = 0,683147180$, $\text{arg th } 0,7 = 0,867300527$. Calcular $\text{arg th}(0,33)$ y $\text{arg th}(0,47)$. h) Si $(0,5) = 0,49310$, Si $(0,6) = 0,58812$, Si $(0,7) = 0,68122$. Calcular Si $(0,63)$. i) $E_2(1) = 0,14849$, $E_2(1,1) = 0,12828$, $E_2(1,2) = 0,11110$, $E_2(1,3) = 0,09644$. Calcular $E_2(1,12)$. j) $E_2(1) = 0,14849$, $E_3(1) = 0,10969$, $E_{10}(1) = 0,03639$, $E_{20}(1) = 0,01834$. Calcular $E_4(1)$. k) $\Gamma(1,5) = 0,88622$, $\Gamma(1,6) = 0,89351$, $\Gamma(1,7) = 0,90863$, $\Gamma(1,8) = 0,93138$, $\Gamma(1,9) = 0,96176$, $\Gamma(2) = 1$. Calcular $\Gamma(1,765)$. l) $\Phi(1) = 0,41510$, $\Phi(1,1) = 0,33647$, $\Phi(1,2) = 0,26734$, $\Phi(1,3) = 0,20820$. Calcular $\Phi(1,16)$. m) $C(0,3) = 0,14137$, $C(0,4) = 0,25132$, $C(0,5) = 0,39269$. Calcular $C(0,44)$. n) Hallar el polinomio interpolador de segundo grado de $0,7$; $0,23500$ ($0,8$; $0,46000$) ($0,9$; $0,715$). p) Hallar el polinomio interpolador de tercer grado de $0,6$; $-0,36$ ($0,7$; $-0,1925$) ($0,8$; $0,08$) ($0,9$; $0,4725$).

2. MÉTODO DE LAGRANGE.—Dados $n+1$ puntos: $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n$, existe un polinomio de grado n , $P_n(x)$, tal que la parábola de orden n : $y = P_n(x)$ pasa por todos ellos. Lagrange dio para este polinomio la siguiente expresión:

$$(5) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i^{(n)}(x), \quad L_i^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

Se comprueba inmediatamente que, efectivamente, la parábola $y = P_n(x)$ pasa por los $n+1$ puntos P_i , $i = 0, \dots, n$. Llamando $Q(x)$ al polinomio $Q(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$, que tiene como raíces $x_0, \dots, x_n$, se puede escribir $L_i^{(n)}(x) = \frac{Q(x)}{(x-x_i)Q'(x_i)}$ con lo que resulta la siguiente expresión de la fórmula de Lagrange:

$$(6) \quad P_n(x) = Q(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x-x_i)Q'(x_i)}$$

La propiedad más importante de la fórmula de Lagrange es la de ser invariante respecto de las transformaciones lineales $x = ht + a$; es decir, que

si $x_i = h t_i + a$, se verifica que $L_i^{(n)}(x) = L_i^{(n)}(t)$. De aquí resulta que si los puntos x_i son equidistantes, es decir, si $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \dots, n+1$, efectuando la transformación lineal $x = h t + x_0$, la fórmula (6) se puede escribir del siguiente modo:

$$(7) \quad P_n(t) = t^{(n+1)} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{(t-i) i! (n-i)!} = \frac{t^{(n+1)}}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{\binom{n}{i} y_i}{t-i},$$

expresión que permite tabular los coeficientes de la fórmula de Lagrange.

Las funciones tabuladas, o experimentales, se pueden considerar que son funciones enteras de variables enteras. Una introducción al estudio sistemático de estas funciones, es el siguiente:

3. FUNCIONES ENTERAS DE VARIABLE ENTERA. DIFERENCIAS.—Sea $y = f(x)$ una función entera de variable entera cuyo campo de variabilidad de la variable independiente sea todo el anillo de los números enteros. Si x_1 es un valor de la variable independiente, es decir, un número entero, se llama diferencia de $y = f(x)$ para $x = x_1$, y se representa por Δy_1 , o bien por $\Delta f(x_1)$, a la expresión

$$(8) \quad \Delta y_1 = \Delta f(x_1) = f(x_1 + 1) - f(x_1),$$

o bien, en general:

$$(9) \quad \Delta y = \Delta f(x) = f(x + 1) - f(x).$$

Esta operación posee un conjunto de propiedades fundamentales, que vamos a estudiar brevemente a continuación. Sea c un número entero cualquiera y sean $f, g, h, \dots$ funciones enteras de variable entera definidas sobre todo el anillo de los números enteros.

$$\text{I. } \Delta c f(x) = c \Delta f(x).$$

$$\text{II. } \Delta (f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x),$$

estas dos propiedades, cuya demostración dejamos a cuidado del lector, se resumen diciendo que Δ es un operador lineal.

$$\begin{aligned} \text{III. } \Delta (f(x) g(x)) &= f(x+1) \Delta g(x) + g(x) \Delta f(x) \\ &= f(x) \Delta g(x) + g(x+1) \Delta f(x). \end{aligned}$$

En efecto:

$$\Delta (f(x) g(x)) = [f(x+1) g(x+1) - f(x+1) g(x)] + [f(x+1) g(x) - f(x) g(x)]$$

y también

$$\Delta (f(x) g(x)) = [f(x+1) g(x+1) - f(x) g(x+1)] + [f(x) g(x+1) - f(x) g(x)],$$

y de estas dos expresiones resulta inmediatamente III.

$$\text{IV. } \Delta \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)}{g(x+1) g(x)}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{[f(x+1) g(x) - f(x) g(x)] + [f(x) g(x) - g(x+1) f(x)]}{g(x+1) g(x)} \\ &= \frac{g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)}{g(x+1) g(x)}. \end{aligned}$$

Entre las funciones enteras de variable entera más sencillas y más importantes se encuentran las *factoriales generalizadas*; éstas son las que se presentan al calcular el número de variaciones r -arias de orden n y las expresaremos en lo que sigue con la notación

$$x^{(n)} = x(x-1) \dots (x-n+1).$$

El principal interés de estas funciones es la facilidad que ofrecen para el cálculo de diferencias cuando se opera con ellas, ya que se verifica la siguiente propiedad:

$$\text{V. } \Delta x^{(n)} = n x^{(n-1)}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \Delta x^{(n)} &= (x+1)x \dots (x-n+2) - x(x-1) \dots (x-n+1) \\ &= x(x-1) \dots (x-n+2)(x+1-x+n-1) = n x^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Esta propiedad muestra la conveniencia de expresar los polinomios mediante factoriales generalizadas, cuando se trata de calcular sus diferencias. Para ello es conveniente usar las siguientes identidades.

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = x^{(2)} + x, \\ x^3 = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x, \\ x^4 = x^{(4)} + 6x^{(3)} + 7x^{(2)} + x, \\ x^5 = x^{(5)} + 10x^{(4)} + 25x^{(3)} + 15x^{(2)} + x, \\ x^6 = x^{(6)} + 15x^{(5)} + 65x^{(4)} + 90x^{(3)} + 31x^{(2)} + x. \end{array} \right.$$

O bien, estas otras:

$$(11) \quad \begin{cases} x^{(2)} = x^2 - x, \\ x^{(3)} = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^{(4)} = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x, \\ x^{(5)} = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, \\ x^{(6)} = x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x, \\ x^{(7)} = x^7 - 21x^6 + 175x^5 - 735x^4 + 1624x^3 - 1764x^2 + 720x. \end{cases}$$

EJERCICIOS:

935. Expresar x^7 mediante las factoriales generalizadas.

936. Comprobar que $\Delta(2x^4 - x^3 + 5x^2 + 7x + 2) = 8x^{(3)} + 33x^{(2)} + 32x + 13$.

VI. $\Delta a^x = (a - 1)a^x$; en particular, $\Delta 2^x = 2^x$.

Una función $\omega(x)$ se dice que es periódica cuando existe un número t , distinto de *cero*, tal que para todo valor de x se verifica

$$(12) \quad \omega(x + t) = \omega(x).$$

El valor positivo más pequeño de t que cumple con (12) se llama período.

VII. Si $\omega(x)$ es una función periódica arbitraria (no de variable entera) de período 1, se verifica que $\Delta \omega(x) = 0$.

Supuestas definidas las diferencias de orden $(n-1)$, que se representan por $\Delta^{n-1}f(x)$, se definen las de orden n mediante la siguiente fórmula:

$$(13) \quad \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x).$$

Diferencias de primer orden, $\Delta^1 f(x)$, son las diferencias $\Delta f(x)$.

De esta definición se deduce:

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - f(x+1) - [f(x+1) - f(x)] \\ \quad = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \\ \Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \end{cases}$$

En general, resulta:

$$(15) \quad \Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x+n-i).$$

De (9) se deduce que $f(x+1) = \Delta f(x) + f(x)$. Llevando este valor a la primera (14), se obtiene

$$f(x+2) = \Delta^2 f(x) + 2 \Delta f(x) + f(x);$$

sustituyendo este valor en la segunda (14), resulta:

$$f(x+3) = \Delta^3 f(x) + 3 \Delta^2 f(x) + 3 \Delta f(x) + f(x).$$

Así siguiendo, se obtiene, en general:

$$(16) \quad f(x+n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i f(x),$$

en donde se conviene en poner $\Delta^0 f(x) = f(x)$. La fórmula (16) se puede escribir en forma simbólica así:

$$(17) \quad f(x+n) = (1 + \Delta)^n f(x),$$

en donde $(1 + \Delta)^n$ debe interpretarse como un operador.

La fórmula (16) constituye la llamada *fórmula de interpolación de Newton*. Se suele escribir poniendo en ella $x = 0$ y $n = x$, con lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$(18) \quad f(x) = \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} \Delta^i f(0).$$

La fórmula de interpolación de Newton permite caracterizar a los polinomios. En efecto, vamos a demostrar el siguiente:

TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente para que una función entera de variable entera sea un polinomio es que todas sus diferencias de orden n sean nulas.*

DEMOSTRACIÓN.—*Condición necesaria.* Sea $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ un polinomio con coeficientes enteros. Las fórmulas (10) permiten escribirlo mediante factoriales generalizadas del siguiente modo:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = b_0 + b_1 x^{(1)} + b_2 x^{(2)} + \dots + b_m x^{(m)}$$

y teniendo en cuenta la propiedad V, se obtiene:

$$\Delta y = b_1 + 2 b_2 x^{(1)} + \dots + m b_m x^{(m-1)}.$$

Supuesto demostrado que

$$(19) \quad \Delta^i y = i! b_i + (i+1)^{(i)} b_{i+1} x^{(1)} + \dots + m^{(i)} b_m x^{(m-i)}$$

y aplicando el operador diferencia a ambos miembros, se obtiene:

$$\Delta^{i+1} y = (i+1)! b_{i+1} + (i+2)^{(i+1)} b_{i+2} x^{(1)} + \dots + m^{(i+1)} b_m x^{(m-i-1)},$$

por consiguiente, (19) vale para todo i , luego para $i = m$ se obtiene

$$\Delta^m y = m! b_m$$

y para $i = m + 1$

$$\Delta^{m+1} y = 0,$$

luego para $n = m + 1$ se verifica el teorema.

Condición suficiente.—Sea $y = f(x)$ una función entera de variable entera tal que para n se verifique:

$$(20) \quad \Delta^n f(x) = 0, \quad \text{para todo } x.$$

La fórmula (18) da

$$f(x) = f(0) + \Delta f(0) \cdot x + \frac{1}{2} \Delta^2 f(0) x^{(2)} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \Delta^{n-1} f(0) x^{(n-1)},$$

para todo x , lo que prueba que $f(x)$ es un polinomio de grado $m = n - 1$.

Q. E. D.

Este teorema resuelve la cuestión de hallar un polinomio igual a una función entera dada. Ahora bien, para la mayor parte de las funciones tabuladas se verifica que las diferencias, aun cuando no se hagan nulas todas ellas a partir de un orden dado, sí se hacen menores que un cierto número d , siempre que $0 < x < N$ y para todos los órdenes iguales o mayores que n . Para todos estos valores de x se verifica, en virtud de (18):

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| f(x) - \left[f(0) + \Delta f(0) \cdot x + \frac{1}{2} \Delta^2 f(0) x^{(2)} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \Delta^{n-1} f(0) x^{(n-1)} \right] \right| \\ &= \left| \frac{1}{n!} \Delta^n f(0) x^{(n)} + \dots + \frac{1}{x!} \Delta^x f(0) \cdot x! \right| < d \left| \frac{1}{n!} x^{(n)} + \dots + 1 \right| \\ &< (x-n) \binom{x}{n} d = (x-n) \binom{x}{x-n} d, \end{aligned} \right.$$

que da una acotación del error cometido al sustituir la función entera dada, $f(x)$, por el polinomio:

$$(22) \quad P(x) = f(0) + \Delta f(0) + \frac{1}{2} \Delta^2 f(0) x^{(2)} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \Delta^{n-1} f(0) x^{(n-1)}$$

Si, por ejemplo, $d = 10$, $n = 5$ y $x = 6$, el error al sustituir $f(x)$ por $P(x)$ es inferior a 60. Si el valor de $f(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ es del orden de 10^6 , el error relativo será del orden de $60 : 10^6 < 10^{-4}$.

El polinomio $P(x)$, que no coincide con la función entera $f(x)$, pero se le aproxima para valores de x de un cierto conjunto: $0 < x < N$, se llama *polinomio interpolador de $f(x)$* para $0 < x < N$.

4. FÓRMULAS DE NEWTON, GAUSS, STIRLING Y EVERET.—Hemos hallado la fórmula de Newton (22) cuando la amplitud de los intervalos $x_{i+1} - x_i$ era igual a 1. En el caso en que sea $x_{i+1} - x_i = h$, basta efectuar la transformación lineal $x = ht + x_0$, con lo que se puede aplicar la misma fórmula:

$$(23) \quad y(x) = y_0 + t \Delta y_0 + \binom{t}{2} \Delta^2 y_0 + \dots + \binom{t}{n} \Delta^n y_0,$$

siendo $x = ht + x_0$. De esta fórmula se obtiene fácilmente la siguiente, debida a Gauss:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} y(x) &= y_0 + t \Delta y_0 + \binom{t}{2} \Delta^2 y_{-1} + \binom{t+1}{3} \Delta^3 y_{-1} \\ &\quad + \binom{t+1}{4} \Delta^4 y_{-2} + \binom{t+2}{5} \Delta^5 y_{-2} + \dots \end{aligned} \right.$$

así como la de Stirling:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} y(x) &= y_0 + \mu \delta y_0 t + \delta^2 y_0 \frac{t^2}{2!} + \mu \delta^3 y_0 \frac{t(t^2-1)}{3!} + \delta^4 y_0 \frac{t^2(t^2-1)}{4!} \\ &\quad + \mu \delta^5 y_0 \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{5!} + \dots \end{aligned} \right.$$

en donde los operadores δ y μ se definen por

$$\delta y_0 = \frac{1}{2} \left(y_{\frac{1}{2}} - y_{-\frac{1}{2}} \right), \quad \mu y_0 = \frac{1}{2} \left(y_{\frac{1}{2}} + y_{-\frac{1}{2}} \right).$$

La fórmula de Everet es:

$$(26) \quad y(x) = t^* y_0 + \binom{t^*+1}{3} \delta^2 y_0 + \binom{t^*+2}{5} \delta^4 y_0 + \binom{t^*+3}{7} \delta^6 y_0 + \dots \\ + t y_1 + \binom{t+1}{3} \delta^2 y_1 + \binom{t+2}{5} \delta^4 y_1 + \binom{t+3}{7} \delta^6 y_1 + \dots,$$

siendo $t + t^* = 1$.

5. ACOTACIÓN DEL ERROR.—Sea $P_n(x)$ un polinomio de interpolación, obtenido por cualquiera de los métodos anteriores, correspondiente a la función $y = f(x)$; es decir, se verifica que $f(x_i) = P_n(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Se trata de calcular una cota del error $f(x') - P_n(x')$, siendo x' un punto del intervalo I cuyos extremos son el menor y el mayor de los x_i , $i = 0, \dots, n$. El proceso es completamente análogo al empleado para calcular el término complementario de la fórmula de Taylor (2, § 2, cap. VI). Pongamos:

$$(27) \quad F(x) = f(x) - P_n(x) - \rho(x - x_0) \dots (x - x_n),$$

en donde se calcula ρ por la condición

$$(28) \quad f(x') - P_n(x') - \rho(x' - x_0)(x' - x_1) \dots (x' - x_n) = 0,$$

para el punto x' de I . Por anularse $F(x)$ en los $n+2$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n, x'$, en virtud del teorema de Rolle, $F'(x)$ se anula en $n+1$ puntos de I ; $F''(x)$ se anula en n puntos de I , etc., $F^{(n+1)}(x)$ se anula en un punto ξ de I . Ahora bien, $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)! \rho$, de donde resulta que

$$\rho = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in I.$$

Llevando este valor a (28), se obtiene:

$$(29) \quad f(x') = P_n(x') + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x' - x_0)(x' - x_1) \dots (x' - x_n),$$

que es la fórmula buscada. El último término de (29) se llama término complementario y permite calcular una cota del error $f(x') - P_n(x')$ siempre que se conozca una cota de $f^{(n+1)}(x)$ en I .

DERIVACIÓN NUMÉRICA.—Si de una función $f(x)$, tabulada, se quiere conocer el valor de la derivada en un cierto punto x , puede procederse del siguiente modo: Sea $P_n(x)$ un polinomio de interpolación correspondiente a

$f(x)$; es decir, $f(x_i) = P_n(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Derivando en (29) (haciendo previamente $x' = x$), se obtiene:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} f'(x) &= P'_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \frac{d(x-x_0) \dots (x-x_n)}{dx} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n) \frac{d f^{(n+1)}(\xi)}{dx} \end{aligned} \right.$$

Ahora bien, ξ depende de x , pero es desconocida la forma de tal dependencia, por lo que no puede calcularse el último término de (30). Sin embargo, si x coincide con uno de los puntos x_i , $i = 0, \dots, n$, la fórmula (30) se reduce a

$$(31) \quad f'(x_i) = P'_n(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x_i - x_0) (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Fórmula que permite calcular una cota del error que se comete al tomar como valor de $f'(x_i)$ el valor $P'_n(x_i)$, siempre que se conozca una cota de $f^{(n+1)}(\xi)$. Si se emplea el polinomio de Lagrange (6), se obtiene:

$$P'_n(x_i) = Q'(x_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{y_j}{(x_i - x_j) Q'(x_j)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{y_j}{x_i - x_j}.$$

Esta fórmula se encuentra tabulada para los valores más usuales de n .

2. Funciones implícitas.—Sea la función implícita $f(x, y) = 0$, en donde f es una aplicación de clase C^{n+1} . Se trata de calcular aproximadamente el valor de x correspondiente a un valor b de la variable y , en la hipótesis de existir un intervalo I en el que $f(x, b) = 0$ posea una única raíz simple. El proceso de recurrencia empleado en la demostración del teorema fundamental de las funciones implícitas es un método constructivo, esto es, sirve para calcular x con tanta aproximación como se desee. En efecto, poniendo

$$(1) \quad \varphi(x) = f(x, b) + x, \quad f(x, b) = \varphi(x) - x,$$

consideremos (l. c.) la sucesión definida por

$$(2) \quad x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Según se ha visto (l. c.), la sucesión x_n es convergente siempre que $|\varphi'(x)| \leq k < 1$ en I . Ahora bien, esto siempre se puede conseguir, pues

si x_0 es un punto cualquiera de I en el que $\frac{\partial f(x_0, b)}{\partial x} \neq 0$, bastará sustituir (1) por

$$(3) \quad \varphi(x) = \frac{f(x, b)}{-f_x(x_0, b)} + x$$

con lo que será $\varphi'(x_0) = 0$, y por ser $\varphi(x)$ continua, se puede elegir un entorno J de x_0 en el que $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, siendo k un número positivo arbitrario. Bastará tomar como intervalo I el intervalo $I \cap J$. Supondremos que esta transformación previa se ha efectuado, caso de ser necesaria, con lo que se obtiene (l. c.) que la sucesión (2) es convergente y que su límite pertenece a I . Si

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

se verificará $a = \varphi(a)$, y sustituyendo en (3), $f(a, b) = 0$.

EJERCICIOS:

937. Resolver la ecuación $1,2x = \operatorname{tg} x$.

938. Calcular con un error inferior a una diezmilésima la raíz de la ecuación $\operatorname{sen} x \cdot e^x = 1,2$. Tómese como valor aproximado $x_0 = 0,66$.

939. Hallar la raíz de la ecuación

$$x^5 - x^2 + x - 10 = 0$$

comprendida entre 0 y 2.

MÉTODO DE LA FUNCIÓN INVERSA DE SCHRÖDER.—Sea $y = f(x)$ una función analítica, o de clase suficientemente elevada, en un entorno E de una raíz simple ξ de la ecuación $f(x) = 0$. Se trata de calcular ξ . Sea $x = \varphi(y)$ la función inversa de f en E . Evidentemente que $\xi = \varphi(0)$, luego por el teorema de Taylor, será:

$$(4) \quad \xi = \varphi(0) = \varphi(y - y) = \varphi(y) - y \varphi'(y) + \frac{1}{2} y^2 \varphi''(y) - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} y^n \varphi^{(n)}(y) + \dots$$

Si $y = f(x)$, sustituyendo en (4), se obtiene:

$$(5) \quad \xi = x - \frac{1}{f'(x)} f(x) - \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'^3(x)} f^2(x) - \frac{1}{3!} \frac{-f' f''' + 3 f''^2}{f'^5(x)} f^3(x) - \dots,$$

que permite calcular ξ con tanta aproximación como se desee.

Obsérvese que el método de iteración anterior (3) es un caso particular de éste, cuando en (5) se toman únicamente dos términos:

Si en (5) se llama $g_m(x)$ a la suma de los $m + 1$ primeros términos, se obtiene otra aproximación por recurrencia poniendo:

$$x_{i+1} = g_m(x_i), \quad x_0 = x \in E.$$

La sucesión x_i así obtenida converge hacia ξ siempre que se tome E de radio suficientemente pequeño.

EJERCICIOS:

940. a) Calcular la raíz comprendida entre 1 y 2 de la ecuación $x^5 - x^2 + x - 10 = 0$.
b) Calcular la raíz de $e^x = 10$ comprendida entre 2 y 2,5.

941. Calcular la raíz de $10^x - 2 \cos x = 0$ comprendida entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

942. Calcular la raíz, próxima a $\frac{\pi}{3}$, de la ecuación $x - 2 \cos x = 0$.

SISTEMAS DE ECUACIONES.—Sea el sistema de ecuaciones:

$$(6) \quad f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Se trata de hallar las soluciones del sistema. Se comienza por hallar un punto aproximado a una solución. Esto puede conseguirse por resolución gráfica o por tanteos. Sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ el valor aproximado de la solución. Si f y g son analíticas en un entorno de la solución que estamos estudiando, que comprenda al punto $\mathbf{x}_0$, llamando (ξ, η) a la solución que se busca, y $\xi - x_0 = \delta x$, $\eta - y_0 = \delta y$, a los errores de la aproximación, el teorema del valor medio da

$$\begin{aligned} 0 &= f(\xi, \eta) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0 + \theta_1 \delta x, y_0 + \theta_2 \delta y) \delta x + f_y(x_0 + \theta_3 \delta x, y_0 + \theta_4 \delta y) \delta y \\ 0 &= g(\xi, \eta) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0 + \theta'_1 \delta x, y_0 + \theta'_2 \delta y) \delta x + g_y(x_0 + \theta'_3 \delta x, y_0 + \theta'_4 \delta y) \delta y \end{aligned}$$

que, aproximadamente, equivalen a las siguientes:

$$(7) \quad \begin{cases} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \delta x + f_y(x_0, y_0) \delta y = 0, \\ g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0) \delta x + g_y(x_0, y_0) \delta y = 0, \end{cases}$$

que permiten calcular aproximadamente δx y δy , siempre que $\left| \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_0 \neq 0$. Repitiendo el proceso con el punto aproximado $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$, siendo $(\delta x, \delta y)$ la solución de (7), y así siguiendo, se obtienen, en general, puntos cada vez más aproximados a la solución.

EJERCICIOS:

943. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x^3 - 3xy^2 &= 4 \\ 3x^2y + y^3 &= 25.\end{aligned}$$

944. Idem

$$\begin{aligned}x^{10} + y^{10} &= 1024 \\ e^x - e^y &= 1.\end{aligned}$$

MÉTODO DE RECURRENCIA.—Como en el caso de funciones con una única variable, se puede transformar el sistema (6) en el siguiente sistema equivalente:

$$(8) \quad \begin{cases} x = \varphi(x, y), & \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < k < 1, \\ y = \psi(x, y), & \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| < k < 1. \end{cases}$$

Entonces, si (x_0, y_0) es un punto suficientemente próximo a una solución de (8), se verifica que

$$x_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = \psi(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

es una sucesión de puntos que converge hacia la solución (ξ, η) del sistema.

EJERCICIOS:

945. Resolver el sistema

$$2x = \sin \frac{x+y}{2}, \quad 2y = \cos \frac{x-y}{2}$$

946. Idem

$$\begin{aligned}2 \cos x \cos y &= 1 \\ \sin y &= 2 \sin x.\end{aligned}$$

947. Hallar las raíces complejas de la ecuación $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 23x - 180 = 0$.

3. Ajuste de funciones.—Un problema que se presenta con frecuencia en la matemática aplicada es el siguiente:

De una función experimental, o bien de una función matemática complicada, $y = f(x)$, se conocen los pares de valores correspondientes $(x_0, y_0), \dots$,

(x_n, y_n) , que son el resultado de ciertas medidas, en el primer caso, o de un cálculo aproximado en el segundo. Interesa calcular los coeficientes, o parámetros, de una función perteneciente a una familia dada de funciones: $\varphi(x; \lambda_0, \dots, \lambda_m)$, de modo que la aproximación de la función φ al conjunto de los $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ sea la mejor posible. La determinación de la familia de funciones $\varphi(x; \lambda_0, \dots, \lambda_m)$ depende de la naturaleza de los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, pero, generalmente, se trata de familias de funciones de expresiones analíticas sencillas. La cuestión que es necesario aclarar, en primer lugar, es la de qué se entiende por la «mejor» aproximación posible de una función a un conjunto de puntos.

El problema planteado tiene bastante analogía con el de la interpolación, mientras no se precise qué se entiende por mejor aproximación. Porque si $m = n$ y convenimos en que la mejor aproximación es que $\varphi(x_i; \lambda_0, \dots, \lambda_m) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, nos encontramos con el problema de la interpolación, del que nos hemos ocupado anteriormente. Sin embargo, ahora sucede que $m < n$, por lo que el sistema anterior no tiene solución. En tal caso parece natural admitir la siguiente:

DEFINICIÓN.—Diremos que la función $\varphi(x; \lambda_0^0, \dots, \lambda_m^0)$ se aproxima lo más posible al conjunto de puntos (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, $m < n$, cuando se verifica que la función

$$(1) \quad F(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=0}^n [y_i - \varphi(x_i; \lambda_0, \dots, \lambda_m)]^2$$

posee un mínimo para $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = (\lambda_0^0, \dots, \lambda_m^0)$.

Cuando se admite esta definición se dice que se ajusta la función $\varphi(x; \lambda_0, \dots, \lambda_m)$ a los puntos (x_i, y_i) por el método de los mínimos cuadrados

AJUSTE POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS.—El problema ha quedado reducido a un problema de mínimos, que hemos estudiado en (B, 5, § 2, cap. VI). Para la existencia de mínimo en el punto $(\lambda_0^0, \dots, \lambda_m^0)$, es necesario que se anulen las derivadas parciales de (1) en él:

$$(2) \quad \sum_{i=0}^n [y_i - \varphi(x_i; \lambda_0, \dots, \lambda_m)] \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 0, \dots, m.$$

(2) es un sistema de $m + 1$ ecuaciones con $m + 1$ incógnitas, que, en general, posee solución.

EMPLEO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS COMO FUNCIONES DE AJUSTE.—Consideremos el caso particular en que $\varphi(x; \lambda_0, \dots, \lambda_m)$ sea la siguiente familia de polinomios:

$$(3) \quad \varphi(x; \lambda_0, \dots, \lambda_m) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_m x^m.$$

Las condiciones (2) se reducen ahora a las siguientes:

$$(4) \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=0}^n [y_i - \lambda_0 - \lambda_1 x_i - \dots - \lambda_m x_i^m] x_i^j = 0, \quad j = 0, \dots, m.$$

Como las incógnitas son las (λ_i) , conviene escribir (4) del siguiente modo:

$$(5) \quad [x^j] \lambda_0 + [x^{j+1}] \lambda_1 + \dots + [x^{j+m}] \lambda_m = [y x^j], \quad j = 0, \dots, m,$$

en donde:

$$(6) \quad [x^j] = x_0^j + x_1^j + \dots + x_n^j, \quad [y x^j] = y_0 x_0^j + \dots + y_n x_n^j.$$

TEOREMA 1.—El sistema (5) posee siempre solución única, y dicha solución proporciona el mínimo de (1).

DEMOSTRACIÓN.—El determinante de la matriz de los coeficientes de (5) es

$$(7) \quad \Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} [x^0] & [x^1] & \dots & [x^m] \\ [x^1] & [x^2] & \dots & [x^{m+1}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^m] & [x^{m+1}] & \dots & [x^{2m}] \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^m & x_1^m & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \right|$$

Como las x_i son distintas entre sí, los menores de orden $m+1$ de la primera matriz del último miembro de (7) son determinantes de Vandermonde distintos de cero; luego los $m+1$ vectores $(x_0^i, \dots, x_n^i)$, $i = 0, \dots, m$, son linealmente independientes y como $m < n$, se pueden hallar $n-m$ vectores $\mathbf{v}_i = (v_{i0}, \dots, v_{in})$, $i = 1, \dots, n-m$, tales que se verifiquen las siguientes relaciones:

$$(x_0^i, \dots, x_n^i) \cdot (v_{j0}, \dots, v_{jn}) = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n-m,$$

$$(v_{j0}, \dots, v_{jn}) \cdot (v_{i0}, \dots, v_{in}) = \delta_{ji},$$

siendo δ_{jt} las δ de Kronecker. Entonces se verifica que

$$(8) \quad \Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} [x^0] & [x^1] & \dots & [x^m] & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^m] & [x^{m+1}] & \dots & [x^{2m}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^m & x_1^m & \dots & x_n^m \\ v_{10} & v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-m,0} & v_{n-m,1} & \dots & v_{n-m,n} \end{vmatrix} > 0.$$

ya que los vectores $(x_0^i, \dots, x_n^i)$, $(v_{j0}, \dots, v_{jn})$, $i = 0, \dots, m$; $j = 1, \dots, n-m$, son linealmente independientes, por lo que el último determinante de (8) es distinto de cero y su cuadrado un número positivo. Con esto queda probado que el sistema (5) posee solución única.

Para demostrar que esta solución proporciona un mínimo de (1), basta demostrar que la forma cuadrática

$$(9) \quad d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_0^2}, \dots, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_0 \partial \lambda_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_m \partial \lambda_0}, \dots, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_m^2} \end{pmatrix} d\mathbf{x},$$

es de rango $= m+1$, de signatura lineal igual a $m+1$ y que para cualquier vector $d\mathbf{x}$ toma valor positivo, es decir, que es una forma cuadrática definida positiva.

Ahora bien, de (4) se deduce que

$$(10) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \sum_{i=0}^n x_i^{j+k} = [x^{j+k}],$$

con lo que la matriz de (9) es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_0^2}, \dots, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_0 \partial \lambda_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_m \partial \lambda_0}, \dots, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_m^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x^0] & \dots & [x^m] \\ \dots & \dots & \dots \\ [x^m] & \dots & [x^{2m}] \end{pmatrix},$$

es decir, la misma matriz del determinante Δ_{m+1} . Por consiguiente, la ecuación característica de (9) es

$$(11) \quad (-1)^{m-1} \rho^{m+1} + (-1)^m \rho^m \sum_{i=0}^m [x^{2i}] + (-1)^{m-1} \rho^{m-1} \sum \Delta_2 + \dots - \rho \sum \Delta_m + \Delta_{m+1}$$

Como en virtud de (8) es $\Delta_{m+1} \neq 0$, resulta $\text{rango}(J) = m + 1$. La misma demostración empleada anteriormente para ver que $\Delta_{m+1} > 0$ prueba que todos los Δ_i , $i = 0, \dots, m$, que son los menores principales de J , son todos ellos positivos; por consiguiente, la suma $\sum \Delta_i$, cuyos sumandos son todos positivos, son números positivos, y como en (11) los términos tienen alternativamente los signos $+$ y $-$, resulta que el número de variaciones de la sucesión característica:

$$1, \sum_{i=0}^m [x^{2i}], \sum \Delta_2, \dots, \sum \Delta_m, \Delta_{m+1},$$

es cero, y el número de permanencias, $m + 1$; luego la signatura lineal de J es $m + 1$. Como consecuencia, la forma cuadrática (9) es definida, es decir, su signo es siempre el mismo, cualquiera que sea el vector $d\mathbf{x}$. Tomando para $d\mathbf{x}$ el vector $(1, 0, \dots, 0)$, la forma cuadrática (9) toma el valor $m + 1 > 0$, luego (9) es una forma cuadrática positiva, y en virtud de (B, 5, § 2, capítulo VI) la función F pasa por un mínimo cuando las λ_i toman como valores la solución del sistema (5).

EJERCICIOS:

948. Ajustar un polinomio de segundo grado a la siguiente función: $f(6,10) = 1,87180$, $f(6,51) = 1,87333$, $f(6,52) = 1,87487$, $f(6,53) = 1,87640$, $f(6,54) = 1,87793$, $f(6,55) = 1,87946$, $f(6,56) = 1,88099$.

949. Ajustar la función $f(-3) = -0,71$, $f(-2) = -0,01$, $f(-1) = 0,51$, $f(0) = 0,82$, $f(1) = 0,88$, $f(2) = 0,81$, $f(3) = 0,49$, mediante un polinomio de segundo grado.

950. Ajustar mediante un polinomio de primer grado la función $f(0) = 3,02$; $f(0,1) = 2,81$; $f(0,2) = 2,57$; $f(0,3) = 2,39$; $f(0,4) = 2,18$; $f(0,5) = 1,99$; $f(0,6) = 1,81$; $f(0,7) = 1,85$.

951. Ajustar mediante un polinomio de segundo grado la función $f(1) = 7,4$; $f(2) = 8,4$; $f(3) = 9,1$; $f(4) = 9,4$; $f(5) = 9,5$; $f(6) = 9,5$; $f(7) = 9,4$.

AJUSTE MEDIANTE POLINOMIOS ORTOGONALES.—El ajuste de una función con polinomios mediante el método de los mínimos cuadrados se simplifica empleando los llamados polinomios ortogonales. Este procedimiento puede emplearse cuando los valores de la variable independiente que se utilizan se encuentran igualmente espaciados, es decir, que $x_i = x_0 + i h$. Efectuando

este cambio de variable, se puede tomar como nueva variable la i , con lo que los valores que toma la nueva variable son siempre $0, 1, 2, \dots, n$. Supondremos efectuado este cambio previo de variable. Se conoce, por consiguiente, una función entera de variable entera, $f(x)$, en la que el campo de variabilidad de la variable independiente es $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Se trata de ajustar esta función entera $f(x)$ con un polinomio de grado m , $Q(x)$, mediante el método de los mínimos cuadrados. Según acabamos de ver en el caso anterior se trata de calcular los coeficientes de Q de modo que la función

$$(12) \quad F(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=0}^n [f(i) - Q(i)]^2$$

sea mínima. La idea del nuevo procedimiento consiste en lo siguiente. Expresemos el polinomio desconocido $Q(x)$ del siguiente modo:

$$(13) \quad Q(x) = \lambda_0 P_n^0 + \lambda_1 P_n^1 + \dots + \lambda_m P_n^m,$$

en donde P_n^i es un polinomio de grado i , $i = 0, \dots, m$, tal que

$$(14) \quad \sum_{x=0}^n P_n^i(x) P_n^j(x) = 0, \quad i \neq j.$$

Por verificarse la condición (14), se llaman los polinomios $P_n^i(x)$ *polinomios ortogonales*. Luego demostraremos la existencia y calcularemos los polinomios $P_n^i(x)$ que cumplan la condición (14). Vamos ahora a ver la ventaja que supone el empleo de dichos polinomios. Llevando (13) a (12), se obtiene:

$$(15) \quad F(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = \sum_{x=0}^n [f(x) - \lambda_0 P_n^0(x) - \lambda_1 P_n^1(x) - \dots - \lambda_m P_n^m(x)]^2,$$

de donde:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} &= \sum_{x=0}^n [f(x) - \lambda_0 P_n^0(x) - \lambda_1 P_n^1(x) - \dots - \lambda_m P_n^m(x)] P_n^i(x) \\ &= \sum_{x=0}^n f(x) P_n^i(x) - \lambda_i \sum_{x=0}^n [P_n^i(x)]^2 = 0. \end{aligned}$$

de donde resulta inmediatamente que

$$(16) \quad \lambda_i = \frac{\sum_{x=0}^n f(x) P_n^i(x)}{\sum_{x=0}^n [P_n^i(x)]^2}$$

con lo que el cálculo de las λ_i es mucho más rápido que resolviendo el sistema (5).

Pasemos, por tanto, al cálculo de los polinomios ortogonales $P_n^i(x)$, $i = 0, \dots, m$.

TEOREMA 2.—*Se pueden calcular los polinomios $P_n^i(x)$, $i = 0, \dots, m$, de modo que se verifiquen las relaciones*

$$(17) \quad \sum_{x=0}^n P_n^i(x) P_n^j(x) = 0; \quad n \neq j, \quad i, j = 0, \dots, m, \quad n > m.$$

DEMOSTRACIÓN.—El cálculo se simplifica expresando los polinomios $P_n^i(x)$ mediante factoriales generalizadas (3, 1). Sea

$$(18) \quad P_n^i(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^{(2)} + \dots + a_i x^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

en donde se entiende que $x^{(j)} = 0$ si $x < j$. La condición (17) se verificará si se verifican las relaciones:

$$(19) \quad \sum_{x=0}^n P_n^i(x) x^{(j)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i-1.$$

Ahora bien, con objeto de simplificar el cálculo de (19) conviene emplear un pequeño artificio. La expresión de un polinomio mediante factoriales generalizadas (l. c.), se puede modificar del siguiente modo: Sea $Q^j(x)$ un polinomio arbitrario de grado j ; se pueden calcular las c_i , $i = 0, \dots, j$ de modo que:

$$(20) \quad Q^j(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+2)^{(2)} + \dots + c_j(x+j)^{(j)},$$

para lo que basta con identificar los coeficientes de ambos miembros, obteniéndose un sistema que permite calcular las c_i . No efectuamos este cálculo porque, como se verá, no lo necesitaremos en lo que sigue.

Evidentemente, que se verificarán las relaciones (17) si se verifican las relaciones más fuertes:

$$(21) \quad \sum_{x=0}^n P_n^{(i)}(x) Q^j(x) = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad j < i$$

y se verificarán éstas, en virtud de (20), si se verifican las relaciones:

$$(22) \quad \sum_{x=0}^n P_n^{(i)}(x) (x+j)^{(j)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i-1.$$

Estas relaciones tienen la siguiente ventaja sobre las (19):

$$(23) \quad P_n^{(i)}(x) (x+j)^{(j)} = (x+j)^j + a_1 (x+j)^{j+1} + \dots + a_i (x+j)^{(i+j)},$$

y sustituyendo en (22):

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{x=0}^n P_n^{(i)}(x) (x+j)^{(j)} = \sum_{x=0}^n (x+j)^j + a_1 \sum_{x=0}^n (x+j)^{(j+1)} + \dots \\ &\quad + a_i \sum_{x=0}^n (x+j)^{(i+j)}. \end{aligned} \right.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} (1+j) \sum_{x=0}^n (x+j)^{(j)} &= (1+j) [j^{(j)} + (1+j)^{(j)} + \dots + (n+j)^{(j)}] \\ &= [(1+j)^{(j+1)} + (1+j)^{(j)} (1+j)] + \dots + (n+j)^{(j)} (1+j) \\ &= [(1+j)^{(j)} (2+j) + (2+j)^{(j)} (1+j)] + \dots + (n+j)^{(j)} (1+j) \\ &= (2+j)^{(j)} (3+j) + (3+j)^{(j)} (1+j) + \dots + (n+j)^{(j)} (1+j) \\ &= \dots = (n+j+1)^{(j+1)}. \end{aligned}$$

de donde:

$$\sum_{x=0}^n (x+j)^{(j)} = \frac{(n+j+1)^{(j+1)}}{1+j}.$$

Análogamente se procede con las otras sumas de (24), con lo que se obtiene:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{x=0}^n P_n^{(i)}(x) (x+j)^{(j)} = \frac{(n+j+1)^{(j+1)}}{1+j} \\ &\quad + a_1 \frac{(n+j+1)^{(j+2)}}{2+j} + \dots + a_i \frac{(n+j+1)^{(i+j+1)}}{1+i+j} \end{aligned} \right.$$

Dividiendo por $(n + j + 1)^{(j+1)}$, resulta:

$$(26) \quad \frac{1}{1+j} + a_1 \frac{n}{2+j} + a_2 \frac{n^{(2)}}{3+j} + \dots + a_i \frac{n^{(i)}}{1+i+j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i-1.$$

Sumando el primer miembro de (26), se obtiene:

$$\frac{p(j)}{(1+i+j)^{1+i}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i-1.$$

De donde: $p(j) = 0$ para $j = 0, 1, \dots, i-1$, y como $p(j)$ es un polinomio en j de grado no superior a $i-1$, que se anula para $j = 0, \dots, i-1$, será $p(j) = c j(j-1) \dots (j-i+1) = c j^{(i)}$. Resulta, por tanto:

$$(27) \quad \frac{1}{1+j} + a_1 \frac{n}{2+j} + \dots + a_i \frac{n^{(i)}}{1+i+j} = \frac{c j^{(i)}}{(1+i+j)^{(i+1)}}$$

y multiplicando por $(1+j)$ los dos miembros:

$$1 + a_1 \frac{n(1+j)}{2+j} + \dots + a_i \frac{n^{(i)}(1+j)}{1+i+j} = \frac{c j(j-1) \dots (j-i+1)}{(2+j)(3+j) \dots (1+i+j)}$$

y haciendo $j = -1$, se obtiene:

$$1 = \frac{c(-1)(-2) \dots (-i)}{1 \cdot 2 \dots i} = c(-1)^i$$

de donde $c = (-1)^i$; luego sustituyendo en (27):

$$(28) \quad \frac{1}{1+j} + a_1 \frac{n}{2+j} + \dots + a_i \frac{n^{(i)}}{1+i+j} = \frac{(-1)^i j^{(i)}}{(1+i+j)^{(i+1)}}$$

Quitando denominadores en (28):

$$\begin{aligned} \frac{(1+i+j)^{(i+1)}}{1+j} + a_1 n \frac{(1+i+j)^{(i+1)}}{2+j} + \dots + a_r n^{(r)} \frac{(1+i+j)^{(i+1)}}{r+1+j} + \dots \\ + a_i n^{(i)} \frac{(1+i+j)^{(i+1)}}{1+i+j} = (-1)^i j^{(i)}. \end{aligned}$$

Haciendo $j = -1 - r$, resulta:

$$\begin{aligned} a_r n^{(r)} (1-1-r)(2-1-r) \dots (r-1-r)(r+2-1-r) \dots (1+i-1-r) \\ = (-1)^i (-1-r)^{(i)}, \end{aligned}$$

o bien:

$$(-1)^r a_r n^{(r)} r! (i-r)! = (r+i)^i.$$

de donde

$$a_r = \frac{(-1)^r (r+i)^i}{n^{(r)} r! (i-r)!}, \quad r = 1, 2, \dots, i,$$

o bien:

$$a_r = \frac{(-1)^r (r+i)^{i(r)} i^{i(r-r)}}{n^{(r)} r! (i-r)!} = (-1)^r \frac{1}{n^{(r)}} \binom{r+i}{r} \binom{i}{i-r} = (-1)^r \frac{1}{n^{(r)}} \binom{r+i}{r} \binom{i}{r},$$

con lo que resulta:

$$(29) \quad \boxed{P_n^i(x) = 1 - \frac{1}{n} \binom{1+i}{1} \binom{i}{1} x + \dots + (-1)^r \frac{1}{n^{(r)}} \binom{r+i}{r} \binom{i}{r} x^{(r)} + \dots + (-1)^i \frac{1}{n^{(i)}} \binom{2i}{i} \binom{i}{i} x^{(i)},}$$

q. e. d.

De (13) y (16) se deduce que el polinomio de ajuste de la función $f(x)$ es:

$$(30) \quad Q(x) = \sum_{i=0}^m \frac{\sum_{x=0}^n f(x) P_n^i(x)}{\sum_{x=0}^n [P_n^i(x)]^2} P_n^i(x).$$

El grado de aproximación de $Q(x)$ a la función $f(x)$ puede medirse por

$$(31) \quad \epsilon = \sum_{x=0}^n [f(x) - Q(x)]^2 = \sum_{x=0}^n f^2(x) - \sum_{x=0}^n \frac{\left[\sum_{i=0}^n P_n^i(x) f(x) \right]^2}{\sum_{i=0}^n [P_n^i(x)]^2}$$

EJERCICIOS:

952. Calcular los polinomios ortogonales $P_5^i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

953. Idem $P_6^i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

954. Idem $P_7^i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

955. Tabular los polinomios anteriores para $x = 0, 1, \dots, r = 5, 6, 7$, respectivamente.

956. En una cierta reacción química se ha obtenido la siguiente función experimental $y = f(x)$, en donde x son minutos e y es la concentración del producto obtenido mediante la reacción, $f(0) = 0$, $f(10) = 0,000216$, $f(20) = 0,000344$, $f(30) = 0,000415$, $f(40) = 0,000451$, $f(50) = 0,000466$, $f(60) = 0,000470$. Ajustarla mediante polinomios ortogonales y el método de los mínimos cuadrados empleando un polinomio de tercer grado.

957. Aproximar $\cos x$ mediante un polinomio de tercer grado en los puntos $x = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ$.

958. Aproximar la función experimental $y = f(x)$: $f(0) = 1280$, $f(1) = 635$, $f(2) = 324$, $f(3) = 162$, $f(4) = 76$, $f(5) = 43$, $f(6) = 19$, mediante una función de la forma $y = a e^{bx}$.

4. Nomografía.—La nomografía tiene por objeto el cálculo aproximado de valores de funciones mediante el empleo de ciertas gráficas, llamadas *ábacos*.

1. ESCALAS FUNCIONALES.—Una función $y = f(x)$ puede representarse gráficamente, según se ha hecho en capítulos anteriores, por el conjunto de los puntos $(x, f(x))$ del plano. Pero, en ocasiones, conviene más otra representación sobre una recta. Para ello, tomando una unidad de medida u , y un sistema de abscisas sobre la recta $\{O, U\}$, $OU = u$, se pueden considerar los puntos $X_1, X_2, \dots$, cuyas abscisas sean $f(1), f(2), \dots$. Si en los puntos

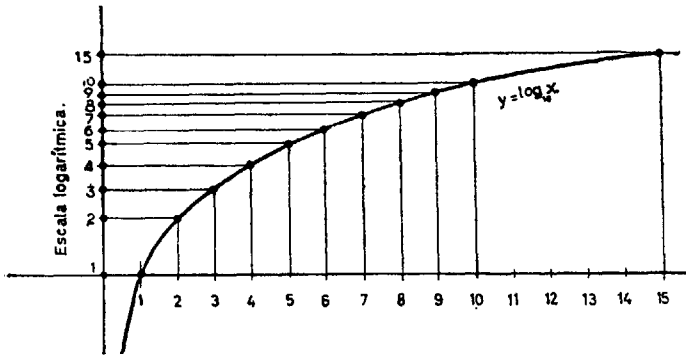


Fig. 108.

$X_1, X_2, \dots$ se colocan los números $1, 2, \dots$, el conjunto de puntos de la recta así obtenido, juntamente con los números colocados sobre ellos, constituyen una representación gráfica de la función $y = f(x)$, llamada *escala funcional de $f(x)$* . Para conocer el valor de la función correspondiente al valor x de la variable, basta buscar en la escala el punto X señalado con el número x y medir, con la unidad u , la distancia OX .

Si se dispone de la gráfica cartesiana de la función $y = f(x)$, la construcción de la escala puede hacerse fácilmente, según se ve en la figura 108, para la función logarítmica.

EJERCICIOS:

959. Construir la escala de la función lineal $y = 2x + 3$.

960. Idem de la función logarítmica de base 10.

961. Idem de la función exponencial de base 10.

962. Idem de la función de los cuadrados $y = x^2$ y de los cubos $y = x^3$.

La función bilineal o proyectiva:

$$(1) \quad y = \frac{a x + b}{c x + d},$$

se presenta muchas veces en la práctica, por lo que conviene conocer una construcción cómoda de su escala correspondiente. La ecuación (1) es la de una proyectividad entre dos rectas, o la de una perspectividad cuando el punto común de las dos rectas tiene la misma cota en las escalas de las dos rectas. Por consiguiente, bastará trazar dos rectas que se corten, r y s ; una de ellas, r , se gradúa, a partir del punto P de intersección de ambas, con la unidad u . Si se asigna al punto P la abscisa p , se señalan los puntos $p+1$, $p+2$, ... a un lado de P , y los de abscisas $p-1$, $p-2$, ... al otro. Sean Q y R otros dos puntos de r de abscisas q y r , respectivamente. Se calculan los números

$$p^* = \frac{a p + b}{c p + d}, \quad q^* = \frac{a q + b}{c q + d}, \quad r^* = \frac{a r + b}{c r + d}$$

y en la recta s se señalan los puntos Q^* y R^* , cuyas abscisas (respecto de un sistema de abscisas de unidad u y cuyo punto origen se fija por la condición de que P tenga respecto de él por abscisa p^*) sean q^* y r^* , respectivamente. Si O es el punto de intersección de las rectas $Q Q^*$ y $R R^*$, se obtiene la escala de la función bilineal (1), trazando rectas por O y colocando como cotas en los puntos X^* en que cortan a s las abscisas de los puntos de r situados en las rectas $O X^*$.

EJERCICIOS:

963. Construir la escala de $y = \frac{180 x}{x + 3.200}$.

964. Idem de la función $y = \frac{3 - 5 x}{2 + 7 x}$.

El soporte de la escala puede ser curvilíneo, en lugar de rectilíneo, como en los casos anteriores. Sea, por ejemplo, la función

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t),$$

que representa una curva plana. Si al punto $(x(t), y(t))$ de esta curva se le asigna como cota t , se obtiene la escala curvilínea de la función (2).

EJERCICIOS:

965. Construir las escalas curvilíneas de: a) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$; b) $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 3 \cos t$; c) $x = \operatorname{sh} t$, $y = \operatorname{ch} t$.

2. ABACOS DE PUNTOS ALINEADOS.—Consideremos tres curvas del plano:

$$(3) \quad \gamma_1 \begin{cases} x_1 = x_1(x), \\ y_1 = y_1(x), \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} x_2 = x_2(y), \\ y_2 = y_2(y), \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} x_3 = x_3(z), \\ y_3 = y_3(z). \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que los tres puntos

$$P_1 = (x_1(x), y_1(x)), \quad P_2 = (x_2(y), y_2(y)), \quad \text{y} \quad P_3 = (x_3(z), y_3(z))$$

estén alineados es que

$$(4) \quad f(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x) & y_1(x) \\ 1 & x_2(y) & y_2(y) \\ 1 & x_3(z) & y_3(z) \end{vmatrix} = 0,$$

o bien,

$$(5) \quad [x_2(y) - x_3(z)] y_1(x) + [x_3(z) - x_1(x)] y_2(y) + [x_1(x) - x_2(y)] y_3(z) = 0.$$

Ahora bien, (4) es una relación de la forma $f(x, y, z) = 0$, luego dados dos valores de las variables x, y, z y buscados estos valores en las escalas de las curvas correspondientes (3), el valor correspondiente de la tercera variable, en la función $f(x, y, z) = 0$, se obtendrá sin más que leer la cota del punto de intersección de la recta que une aquellos puntos con la tercera escala (3).

El problema de construir un ábaco de puntos alineados correspondiente a una función de tres variables $f(x, y, z) = 0$, consiste en poder expresar esta función en la forma (4), lo que, naturalmente, no siempre es posible.

Vamos a estudiar algunos casos sencillos de construcción de ábacos de puntos alineados.

3. ABACOS CON DOS ESCALAS RECTILÍNEAS PARALELAS.—Consideremos el caso particular en que γ_1 y γ_2 sean dos rectas paralelas. Tomándolas paralelas al eje y , las ecuaciones (3) se reducirán a las siguientes:

$$(6) \quad \gamma_1 \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \varphi(x) \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} x_2 = c \\ y_2 = \psi(y) \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} x_3 = x_3(z), \\ y_3 = y_3(z). \end{cases}$$

Por consiguiente, la relación (4) se reduce ahora a la siguiente:

$$(7) \quad f(x, y, z) = [c - x_3(z)] \varphi(x) + x_3(z) \psi(y) - c y_3(z) = 0,$$

es decir: «Si $f(x, y, z) = 0$ se puede representar mediante un ábaco de puntos alineados con dos escalas paralelas, se verifica que $f(x, y, z)$ se puede expresar como una función lineal de dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ con coeficientes que son funciones de z .»

Recíprocamente, supongamos que se verifique

$$(8) \quad f(x, y, z) = A(z) \varphi(x) + B(z) \psi(y) + C(z) = 0.$$

Para que $f(x, y, z)$ se pueda representar mediante un ábaco de puntos alineados con dos escalas paralelas, es suficiente que (8) sea equivalente a (7), y esto se verificará si

$$\frac{A(z)}{c - x_3(z)} = \frac{B(z)}{x_3(z)} = \frac{C(z)}{-c y_3(z)},$$

de donde

$$(9) \quad x_3 = \frac{c B(z)}{A(z) + B(z)}, \quad y_3 = -\frac{C(z)}{A(z) + B(z)}.$$

Hemos obtenido, por tanto, el siguiente:

4. TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente para que $f(x, y, z) = 0$ se pueda representar mediante un ábaco de puntos alineados con dos escalas paralelas, es que f se pueda expresar en la forma (8).*

EJERCICIOS:

966. Construir el ábaco para la resolución de una ecuación de tercer grado: $z^3 + xz + y = 0$.

967. Idem para $\cos^2(z)x + \sin^2(z)y + 1 = 0$.

968. Idem para $z \frac{1}{1+x^2} + z^2 \frac{1}{y} + 1 = 0$.

5. ABACOS CON TRES ESCALAS RECTILÍNEAS PARALELAS.—Supongamos que $f(x, y, z)$ se pueda representar mediante tres escalas rectilíneas paralelas:

$$(10) \quad \gamma_1 \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \varphi(x), \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} x_2 = c, \\ y_2 = \psi(y), \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} x_3 = d, \\ y_3 = \zeta(z). \end{cases}$$

La relación (5) se reduce en este caso a la siguiente:

$$(11) \quad (c-d)\varphi(x) + d\psi(y) - c\zeta(z) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que se verifique

$$(12) \quad f(x, y, z) = a\varphi(x) + b\psi(y) + m\zeta(z) = 0, \quad a + b + m = 0,$$

siendo a , b y m constantes. La equivalencia de (11) y (12) implica que

$$\frac{a}{c-d} = \frac{b}{d} = \frac{m}{-c},$$

de donde, en virtud de la condición $a + b + m = 0$, basta poner $d = b$, $c = -m$, con lo que $a = -m - b = c - d$. Por consiguiente:

6. TEOREMA.—La condición necesaria y suficiente para que la función $f(x, y, z) = 0$ se pueda representar mediante un ábaco de puntos alineados con tres escalas paralelas, es que se verifique (12).

EJERCICIO:

969. Construir el ábaco de la función $z = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$.

7. ABACOS EN N.—Supongamos que $f(x, y, z) = 0$ sea representable por un ábaco en N. Las ecuaciones (3) serán en este caso de la siguiente forma:

$$(13) \quad \gamma_1 \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \varphi(x), \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} x_2 = c, \\ y_2 = \psi(y), \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} x_3 = \zeta(z), \\ y_3 = 0, \end{cases}$$

en donde se toma γ_1 en el eje y , γ_2 en una paralela, y γ_3 en el eje x . La relación (5) se reduce en este caso a la siguiente:

$$(14) \quad [c - \zeta(z)]\varphi(x) + \zeta(z)\psi(y) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que

$$(15) \quad f(x, y, z) = A(z)\varphi(x) + B(z)\psi(y).$$

Identificando (14) y (15) se obtiene

$$\frac{A(z)}{c - \zeta(z)} = \frac{B(z)}{\zeta(z)},$$

de donde

$$\xi(z) = \frac{c B(z)}{A(z) + B(z)}.$$

Por consiguiente:

8. TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente para que $f(x, y, z) = 0$ se pueda representar por un ábaco en N de puntos alineados, es que se verifique (15).*

EJERCICIO:

970. Construir el ábaco de la función $z = x \frac{\operatorname{sen}^2 y}{2}$.

ABACOS CON DOS ESCALAS RECTILÍNEAS CONCURRENTES.—Supongamos que (3) sea de la forma

$$(16) \quad \gamma_1 \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = \varphi(x), \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} x_2 = \psi(y), \\ y_2 = 0, \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} x_3 = x_3(z), \\ y_3 = y_3(z), \end{cases}$$

con lo que (5) se reduce a

$$(17) \quad [\psi(y) - x_3(z)] \varphi(x) - \psi(y) y_3(z) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica

$$(18) \quad f(x, y, z) = A(z) \varphi(x) \psi(y) + B(z) \varphi(x) + C(z) \psi(y).$$

La equivalencia de (18) y (17) implica que

$$\frac{A(z)}{1} = \frac{B(z)}{-x_3(z)} = \frac{C(z)}{-y_3(z)},$$

de donde

$$x_3(z) = -\frac{B(z)}{A(z)}, \quad y_3(z) = -\frac{C(z)}{A(z)}.$$

Hemos obtenido:

9. TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente para que $f(x, y, z) = 0$ se pueda representar mediante un ábaco de puntos alineados con dos escalas rectilíneas concurrentes, es que $f(x, y, z) = 0$ sea la ecuación de una proyec-*

tividad (18) en $\psi(x)$ y $\psi(y)$, sin término constante, y con coeficientes funciones de z .

10. ABACOS CON TRES ESCALAS RECTILÍNEAS CONCURRENTES.—Supongamos que las (3) tengan la forma

$$(19) \quad \gamma_1 \begin{cases} y_1 = \varphi(x), \\ x_1 = 0, \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} x_2 = \psi(y), \\ y_2 = 0, \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} x_3 = \zeta(z), \\ y_3 = \lambda \zeta(z). \end{cases}$$

con lo que (5) se reduce a

$$(20) \quad \varphi(x) \psi(y) - \varphi(x) \zeta(z) - \lambda \psi(y) \zeta(z) = 0,$$

que se puede escribir también, dividiendo por $\varphi \psi \zeta$, del siguiente modo:

$$(21) \quad \frac{1}{-\frac{1}{\lambda} \varphi(x)} + \frac{1}{-\psi(y)} + \frac{1}{\zeta(z)} = 0,$$

con lo que resulta:

11. TEOREMA.—La condición necesaria y suficiente para que $f(x, y, z) = 0$ se pueda representar mediante un ábaco de puntos alineados con tres escalas rectilíneas concurrentes, es que

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\varphi(x)} + \frac{1}{\psi(y)} + \frac{1}{\zeta(z)}.$$

EJERCICIO:

971. Construir el ábaco correspondiente a resistencias en paralelo: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$.

CAPITULO OCTAVO

CURVAS Y SUPERFICIES

§ 1. CURVAS

1. Concepto de curva. Tangente.—Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una aplicación de V_1 en V_n de clase C^1 , esto es, con diferencial continua en un abierto A de V_1 .

Si $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ es otra aplicación de V_1 en V_n de clase C^1 en A , el producto escalar $\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)$ define una aplicación $A \rightarrow V_1$.

DIFERENCIAL DEL PRODUCTO ESCALAR.—Sea $\mathbf{x} = x_1(t) \mathbf{u}_1 + \dots + x_n(t) \mathbf{u}_n$, $\mathbf{y} = y_1(t) \mathbf{u}_1 + \dots + y_n(t) \mathbf{u}_n$, siendo $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal de V_n . De

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1(t) y_1(t) + \dots + x_n(t) y_n(t),$$

se deduce

$$\begin{aligned} (1) \quad d(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= [x_1(t) dy_1(t) + \dots + x_n(t) dy_n(t)] \\ &+ [y_1(t) dx_1(t) + \dots + y_n(t) dx_n(t)] = \mathbf{x}(t) \cdot d\mathbf{y}(t) + \mathbf{y}(t) \cdot d\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

En particular:

$$(2) \quad d[\mathbf{x}(t)]^2 = 2\mathbf{x}(t) \cdot d\mathbf{x}(t).$$

Recordando que $|\mathbf{x}(t)|^2 = [\mathbf{x}(t)]^2$, resulta:

$$d|\mathbf{x}(t)| = \frac{\mathbf{x}(t) \cdot d\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}.$$

DIFERENCIAL DEL PRODUCTO VECTORIAL DE DOS APLICACIONES DE V_1 EN V_3 .—De

$$\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t) = \begin{vmatrix} x_2(t) & y_2(t) \\ x_3(t) & y_3(t) \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} x_3(t) & y_3(t) \\ x_1(t) & y_1(t) \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \mathbf{u}_3$$

que se pueden escribir eliminando el parámetro, del siguiente modo:

$$(9) \quad \frac{y_1 - x_1(a)}{x'_1(a)} = \dots = \frac{y_n - x_n(a)}{x'_n(a)}.$$

EJERCICIOS:

972. Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$ en el punto $t = 2$.

973. ¿Existe tangente a la curva $x_1 = t^2 + 1$, $x_2 = t^3 - 1$ en el punto $t = 0$?

Para que no exista tangente según la definición 2, siendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una aplicación de clase C^1 , y existiendo por tanto $d\mathbf{x}$, es necesario y suficiente que $d\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en el punto considerado.

Si $d\mathbf{x}(a, dt) = \mathbf{0}$, la recta que más se aproxima viene dada por

$$(10) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}(a) + \lambda \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(a + dt) - \mathbf{x}(a)}{dt^r}, \quad \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(a + dt) - \mathbf{x}(a)}{dt^r} \neq \mathbf{0}.$$

Si la ecuación de la curva es de clase C^r , y si en el punto a se verifica $d^i \mathbf{x}(a) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, r-1$, el teorema de Taylor proporciona

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(a + dt) - \mathbf{x}(a)}{dt^r} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d^r \mathbf{x}(a + \theta dt; dt, \dots, dt)}{r!, dt^r} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{r!} \mathbf{x}^{(r)}(a + \theta dt) = \frac{1}{r!} \mathbf{x}^{(r)}(a). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la tangente a la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en el punto a , puede escribirse, en cualquier caso, del siguiente modo:

$$(11) \quad \boxed{\mathbf{y} = \mathbf{x}(a) + \lambda \mathbf{x}^{(r)}(a), \mathbf{x}^{(r)}(a) \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}'(a) = \dots = \mathbf{x}^{(r-1)}(a) = \mathbf{0}.}$$

EJERCICIOS:

974. Ecuación de la tangente a la curva del ejercicio 973 en el punto $t = 0$

975. Ecuación de la tangente en el punto $t = 0$ de la curva $x_1 = 1 - \cos t$, $x_2 = 3t^2 + 5$, $x_3 = e^t - \sin t - 1$.

976. Ecuaciones de la tangente en el punto $t = 0$ de la curva $x_1 = t^3$, $x_2 = t^9$. Idem a la curva $x_1 = t^2$, $x_2 = t^6$. Idem a la curva $x_1 = t$, $x_2 = t^3$. Comparar estas curvas entre sí.

977. Representar gráficamente las siguientes curvas en el segmento $[-1, 1]$: a) $x_1 = t$, $x_2 = t^3$; b) $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$; c) $x_1 = t^2$, $x_2 = t^4$; d) $x_1 = t^2$, $x_2 = t^5$; e) $x_1 = t^2$, $x_2 = t^6$.

En los ejercicios anteriores se observa que aplicaciones distintas de V_1 en V_n pueden dar lugar a la misma curva. Ahora bien, para que esto suceda es necesario y suficiente que exista una biyección del abierto A , en que está definida la curva sobre sí mismo: $t = \varphi(t')$ tal que si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y

$\mathbf{x} = \mathbf{y}(t')$ son las dos aplicaciones definidas sobre A , se verifica que $\mathbf{y}(t') = \mathbf{x}(\varphi(t'))$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(\varphi^{-1}(t))$.

DEFINICIÓN 3.—Se dice que el punto A de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es un *punto singular* cuando se verifica una de estas dos cosas: 1.º) Para toda ecuación $\mathbf{y} = \mathbf{y}(s)$ de la curva equivalente a la $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ se verifica que $d\mathbf{y}(s; ds) = 0$ en el punto A . 2.º)

$$(12) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(s), \quad t \neq s.$$

Los puntos no singulares se llaman *ordinarios*. Si A es un punto ordinario, supondremos elegida la ecuación de la curva de modo que la diferencial de la aplicación en A sea distinta de cero.

EJERCICIOS:

978. ¿Son equivalentes las siguientes ecuaciones de curvas?: $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$ y $x_1 = t^6$, $x_2 = t^9$?

979. ¿Son equivalentes las ecuaciones de las siguientes curvas?: $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$ y $x_1 = t^4$, $x_2 = t^6$. (Se supone que están definidas sobre el cuerpo real.)

980. ¿Es singular el punto $t = 0$ de la curva $x_1 = t^3$, $x_2 = t^6$?

981. ¿Es singular el punto $t = 0$ de la curva $x_1 = t^2$, $x_2 = t^4$?

2. Puntos singulares de las curvas definidas en forma explícita.—

Como el estudio es el mismo en el caso de las curvas planas que en el caso de las curvas del espacio, lo haremos conjuntamente.

DEFINICIÓN 1.—Si para todas las ecuaciones equivalentes de la curva $\mathbf{c}$ se verifica que la primera diferencial no nula en el punto P es de orden mayor o igual a $r > 1$, existiendo una ecuación $\mathbf{c}$ cuya diferencial r -ésima sea distinta de cero, diremos que P es un *punto singular de clase r* .

El aspecto de la curva en el entorno de un punto singular de clase r depende de la paridad de r . Para comprobarlo, consideremos la curva $\mathbf{c}$ de

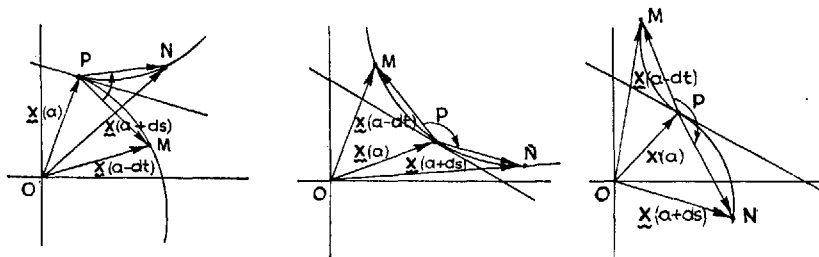


Fig. 110.

ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, que tiene el punto $P : \mathbf{x}(a)$ como punto singular de clase r , siendo $d^r \mathbf{x}(a) \neq 0$.

DEFINICIÓN 2.—El punto P se llama punto de *retroceso* o *cúspide*, cuando si M y N son los puntos definidos por $\mathbf{x}(a - dt)$ y $\mathbf{x}(a + ds)$, siendo $0 < dt$, $0 < ds$, se verifica que

$$(1) \quad \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ ds \rightarrow 0}} \widehat{M P N} = 0, \quad 0 < dt, \quad 0 < ds.$$

Vamos a buscar condiciones necesarias y suficientes para que un punto sea una cúspide.:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[P M]} &= \mathbf{x}(a - dt) - \mathbf{x}(a) \\ &= \frac{1}{r!} d^{(r)} \mathbf{x}(a - \theta dt, -dt, \dots, -dt) = \frac{1}{r!} \mathbf{x}^{(r)}(a - \theta dt) (-dt)^r \\ \overrightarrow{[P N]} &= \mathbf{x}(a + ds) - \mathbf{x}(a) \\ &= \frac{1}{r!} d^{(r)} \mathbf{x}(a + \theta' ds; ds, \dots, ds) = \frac{1}{r!} \mathbf{x}^{(r)}(a + \theta' ds) (ds)^r. \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ ds \rightarrow 0}} \widehat{M P N} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ ds \rightarrow 0}} \cos(\widehat{M P N}) = 1 \Leftrightarrow \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ ds \rightarrow 0}} ([\overrightarrow{[P M]}] \overrightarrow{[P N]}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ ds \rightarrow 0}} \frac{1}{(r!)^2} \mathbf{x}^{(r)}(a - \theta dt) \cdot \mathbf{x}^{(r)}(a + \theta' ds) (ds)^r (-dt)^r > 0. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ ds \rightarrow 0}} \mathbf{x}^{(r)}(a - \theta dt) \cdot \mathbf{x}^{(r)}(a + \theta' ds) = [\mathbf{x}^{(r)}(a)]^2 > 0,$$

la condición anterior equivale a $(-dt)^r > 0$, $dt > 0$ y ésta equivale a $r = 2k$.

1. La condición necesaria y suficiente para que el punto P : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(a)$ de la curva $\mathbf{c}$ sea una cúspide, es que P sea de clase r y $r = 2k$.

EJERCICIOS:

982. Hallar los puntos de retroceso de la curva $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$.

983. Idem para la curva $x_1 = \frac{1}{2} t^2 - t + 1$, $x_2 = \frac{1}{3} t^3 + t^2 - 3t + 2$.

984. Calcular los puntos singulares de clase $r > 1$ de la curva $x_1 = \frac{1}{2} t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t$, $x_2 = \frac{1}{60} t^5 + \frac{1}{24} t^4 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{7}{12} t^2 - \frac{5}{12} t - 3$.

Otros puntos singulares, llamados *múltiples*, vienen definidos por la condición:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(s), \quad t \neq s.$$

EJERCICIOS:

985. Hallar los puntos múltiples de la curva $x_1 = t^2 + 2$, $x_2 = t^3 - t + 5$.

986. Ecuaciones de las tangentes en el punto doble de la curva del ejercicio anterior.

987. Ecuaciones de las tangentes en el punto singular de la curva $x_1 = (t-3)^2$, $x_2 = t(t-3)^2$.

3. Fórmulas de Frénet.—Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una aplicación de clase C^2 de un abierto A de $\mathbb{R}$ en V_3 . Todo lo que sigue es válido también para curvas planas sin más que suponer el plano de la curva sumergido en el espacio euclídeo.

ELEMENTO DE ARCO.—Se llama *elemento de arco* de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, y lo representaremos por ds , a

$$(1) \quad ds = |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

La ecuación (1) permite calcular las derivadas del vector $\mathbf{x}(t)$ respecto de la nueva variable s , y se obtiene:

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}.$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} &= \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{\mathbf{x}''(t)}{|\mathbf{x}'(t)|^2} - \mathbf{x}'(t) \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'(t)|^4} \\ &= \frac{\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''(t) - (\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)) \mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|^4} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \left| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right| = \frac{\sqrt{\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''^2(t) - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')^2}}{|\mathbf{x}'(t)|^3}.$$

De (2) se deduce que

$$(5) \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = 1.$$

A las derivadas del vector respecto del arco la representaremos del siguiente modo:

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \dot{\mathbf{x}}(s), \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \ddot{\mathbf{x}}(s).$$

De (4) se deduce que $\dot{\mathbf{x}}^2(s) = 1$, y derivando aquí

$$(7) \quad \dot{\mathbf{x}}(s) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(s) = 0.$$

VECTORES TANGENTE, NORMAL PRINCIPAL Y BINORMAL.—La fórmula (7) prueba que los vectores $\mathbf{x}(s)$ y $\ddot{\mathbf{x}}(s)$ son ortogonales. Al vector $\mathbf{x}(s)$, que es un vector tangente y unitario, se le llama *vector tangente*, y lo representaremos por $\mathbf{t}$. Al vector unitario que tiene la dirección y el sentido del vector $\ddot{\mathbf{x}}(s)$ se le llama *vector normal principal*, y lo representaremos por $\mathbf{n}(s)$. Al producto vectorial del vector tangente por el vector normal principal se le llama *vector binormal*, y lo representaremos por $\mathbf{b}(s)$. Por consiguiente, el vector binormal es también unitario y ortogonal al vector tangente y al vector normal principal. Se verifica, por tanto:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \mathbf{x}(s) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}, & |\mathbf{t}(s)| &= 1 \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\ddot{\mathbf{x}}(s)}{|\ddot{\mathbf{x}}(s)|} = \frac{\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''(t) - [\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)] \mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)| \sqrt{\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''^2(t) - [\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)]^2}}, & |\mathbf{n}(s)| &= 1 \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(s) \times \ddot{\mathbf{x}}(s)}{|\ddot{\mathbf{x}}(s)|} = \frac{\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)}{\sqrt{\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''^2(t) - [\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)]^2}}, & |\mathbf{b}(s)| &= 1. \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0, & \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0, & \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0, \\ \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s), & \mathbf{n}(s) \times \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s), & \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \mathbf{n}(s). \end{cases}$$

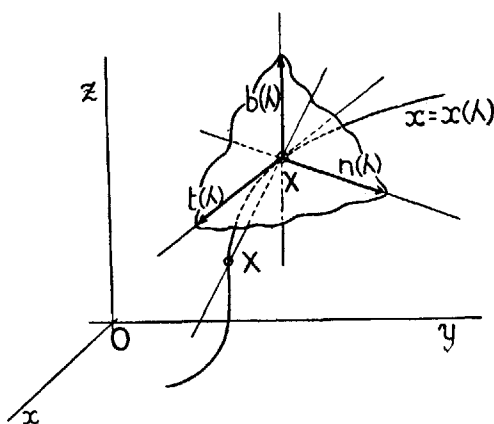


Fig. 111.

TANGENTE, NORMAL PRINCIPAL Y BINORMAL.—La recta incidente con el punto X de la curva y que contiene al vector normal principal se llama *normal principal*, y la recta incidente con X y que contiene al vector binormal se llama *binormal*. Por consiguiente, las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal serán las (10), (11) y (12), respectivamente:

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{t}(s) = \mathbf{x}(t) + \lambda \mathbf{x}'(t), \\ \frac{y_1 - x_1(t)}{x'_1(t)} = \frac{y_2 - x_2(t)}{x'_2(t)} = \frac{y_3 - x_3(t)}{x'_3(t)} \end{cases}$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{n}(s) = \mathbf{x}(t) + \lambda [\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''(t) - (\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)) \mathbf{x}'(t)] \\ \frac{y_1 - x_1(t)}{\mathbf{x}'^2(t) x''_1(t) - (\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)) x'_1(t)} &= \frac{y_2 - x_2(t)}{\mathbf{x}'^2(t) x''_2(t) - (\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)) x'_2(t)} \\ &= \frac{y_3 - x_3(t)}{\mathbf{x}'^2(t) x''_3(t) - (\mathbf{x}'(t) \mathbf{x}''(t)) x'_3(t)} \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{b}(s) = \mathbf{x}(t) + \lambda (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \\ \frac{y_1 - x_1(t)}{\begin{vmatrix} x'_2(t) & x'_3(t) \\ x''_2(t) & x''_3(t) \end{vmatrix}} &= \frac{y_2 - x_2(t)}{\begin{vmatrix} x'_3(t) & x'_1(t) \\ x''_3(t) & x''_1(t) \end{vmatrix}} = \frac{y_3 - x_3(t)}{\begin{vmatrix} x'_1(t) & x'_2(t) \\ x''_1(t) & x''_2(t) \end{vmatrix}} \end{aligned} \right.$$

EJERCICIOS:

988. Calcular el elemento de arco de la hélice: $x_1 = r \cos t$, $x_2 = r \sin t$, $x_3 = r h t$.

989. Calcular el elemento de arco de la circunferencia y de la elipse.

990. Calcular los vectores tangente, normal principal y binormal de la circunferencia y de la elipse.

991. Calcular los vectores tangente, normal principal y binormal de la cúbica alabeada: $x = \lambda$, $y = \lambda^2$, $z = \lambda^3$.

992. Ecuaciones de la tangente, normal principal y binormal de la hélice: $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $x_3 = t$.

PLANOS OSCULADOR, NORMAL Y RECTIFICANTE.—Se llama *plano osculador* en el punto $\mathbf{x}(t_0)$ de la curva al plano incidente con él y paralelo a los vectores tangente y normal principal. De esta definición resultan inmediatamente las siguientes *ecuaciones del plano osculador*:

$$(13) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t_0) + \mu \mathbf{n}(t_0); \quad (\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t_0) = 0,$$

$$(14) \quad \{\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}'(t_0), \mathbf{x}''(t_0)\} = 0.$$

Se llama *plano normal* en el punto $\mathbf{x}(t_0)$ al plano incidente con él y paralelo a los vectores normal y binormal. Por consiguiente, se obtienen las siguientes expresiones de la *ecuación del plano normal*:

$$(15) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{n}(t_0) + \mu \mathbf{b}(t_0); \quad (\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{t}(t_0) = 0,$$

$$(16) \quad (x_1 - x_1(t_0)) x'_1(t_0) + (x_2 - x_2(t_0)) x'_2(t_0) + (x_3 - x_3(t_0)) x'_3(t_0) = 0.$$

Se llama *plano rectificante* en el punto $\mathbf{x}(t_0)$ al plano incidente con él y

paralelo a los vectores tangente y binormal. Resultan, por tanto, las siguientes ecuaciones del plano rectificante:

$$(17) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t_0) + \mu \mathbf{b}(t_0); \quad [\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)] \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0$$

$$(18) \quad [\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)] [\mathbf{x}'^2 \mathbf{x}'' - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'') \mathbf{x}'] = 0.$$

EJERCICIOS:

993. Calcular las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en un punto de la hélice.

994. ¿Con qué plano coinciden todos los planos osculadores a una curva plana? ¿Qué les sucede a todos los planos rectificantes de una curva plana?

CURVATURA EN UN PUNTO.—Sea la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, que supondremos referida al arco. Consideremos los puntos $\mathbf{x}(s_0)$ y $\mathbf{x}(s_0 + ds)$. Se llama *curvatura* de la curva en el punto $\mathbf{x}(s_0)$, y se representa por $\kappa(s_0)$, a la expresión

$$(19) \quad \kappa(s_0) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\widehat{\dot{\mathbf{x}}(s_0), \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)}}{ds}$$

De la definición anterior resulta

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa(s_0) &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\dot{\mathbf{x}}(s_0), \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds))}{ds} \\ &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)}{ds} \cdot \frac{[\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)]}{|\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)|} \\ &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)}{ds} \cdot \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{[\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)]}{|\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times \dot{\mathbf{x}}(s_0 + ds)|} \\ &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{x}}(s_0) \times (\dot{\mathbf{x}}(s_0) + \ddot{\mathbf{x}}(s_0) ds + \dots)}{ds} \cdot \mathbf{b}(s_0) \\ &= (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \mathbf{b} = \{ \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{b} \} = \{ \mathbf{t}, \dot{\mathbf{x}} \mid \mathbf{n}, \mathbf{b} \} = |\dot{\mathbf{x}}(s_0)| \{ \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \} = |\ddot{\mathbf{x}}(s_0)|. \end{aligned} \right.$$

Empleando coordenadas, se puede escribir (20) del siguiente modo:

$$(21) \quad \kappa(s_0) = \sqrt{\ddot{x}_1^2(s_0) + \ddot{x}_2^2(s_0) + \ddot{x}_3^2(s_0)}$$

Si la ecuación de la curva está referida a un parámetro arbitrario $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, efectuando el oportuno cambio de variables, se obtiene:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa(s_0) &= |\ddot{\mathbf{x}}(s_0)| = \left| \frac{\mathbf{x}'^2 \mathbf{x}'' - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'') \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^4} \right| \\ &= \frac{\sqrt{(\mathbf{x}'^2)^2 \mathbf{x}''^2 - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')^2 \mathbf{x}'^2}}{|\mathbf{x}'|^4} = \frac{\sqrt{\mathbf{x}'^2 \mathbf{x}''^2 - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')^2}}{|\mathbf{x}'|^3} = \frac{\sqrt{(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')^2}}{|\mathbf{x}'|^3} \end{aligned} \right.$$

EXERCICIOS:

995. Calcular la curvatura de la curva $x_1 = a \cos t$, $x_2 = b \sin t$ en el punto (t) .

996. Idem de la curva $x_1 = a \operatorname{ch} t$, $x_2 = b \operatorname{sh} t$, $x_3 = t$.

997. Idem de la curva $x_1 = e^t$, $x_2 = e^{-t}$, $x_3 = t$.

998. Calcular la curvatura de la curva $y = f(x)$.

FÓRMULAS DE FRÉNET.—Todo el estudio local de las curvas en el entorno de un punto ordinario se apoya en las fórmulas que dan las derivadas de los vectores tangente, normal principal y binormal en función de estos vectores. Como estos tres vectores son linealmente independientes, se verificará:

$$(23) \quad (\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, de las identidades

$$(24) \quad \mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

se deduce, derivando, que la matriz del segundo miembro de (23) es hemisimétrica:

$$(25) \quad (\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, de $\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{|\dot{\mathbf{t}}|} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\kappa}$, se deduce $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$, y comparando ésta con la primera ecuación (25): $\dot{\mathbf{t}} = -a_{12} \mathbf{n} - a_{13} \mathbf{b}$, resulta que $-a_{12} = \kappa$, $a_{13} = 0$, con lo que (25) se puede escribir en la forma siguiente:

$$(26) \quad (\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & a_{23} \\ 0 & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

que son las fórmulas de Frénet.

TORSIÓN.—Sea la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, referida al arco. Se llama *torsión* en el punto $\mathbf{x}(s)$, y se representa por $\tau(s)$, a la expresión

$$(27) \quad \tau(s) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\widehat{\mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s+ds)}}{ds}.$$

De esta definición resulta:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau(s) &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\widehat{\mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s+ds)}}{ds} = \lim_{ds \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s+ds)}{ds} \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s+ds)}{|\mathbf{b}(s) \times \mathbf{b}(s+ds)|} \right] = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}(s) \times [\dot{\mathbf{b}}(s) ds + \dots]}{ds} \\ &= \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}(s) \times [\dot{\mathbf{b}}(s) ds + \dots]}{|\mathbf{b}(s) \times (\dot{\mathbf{b}}(s) ds + \dots)|} \\ &= [\mathbf{b}(s) \times \dot{\mathbf{b}}(s)] \mathbf{t}(s) = \{ \mathbf{b}(s), \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{t}(s) \} \\ &= \{ \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{t}}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \} \\ &= \{ \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s), \mathbf{t}(s) \} \\ &= [(\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) \times (\mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s))] \mathbf{t}(s) \\ &= (\{ \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \} \mathbf{t}(s) - \{ \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \} \dot{\mathbf{n}}(s)) \mathbf{t}(s) \\ &= \{ \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{n}}(s) \} = \left\{ \dot{\mathbf{x}}(s), \frac{\ddot{\mathbf{x}}(s)}{\kappa(s)}, \frac{\mathbf{x}(s) \ddot{\mathbf{x}}(s) - \dot{\mathbf{x}}(s) \dot{\mathbf{x}}(s)}{\kappa^2(s)} \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa^3(s)} \{ \dot{\mathbf{x}}(s), \ddot{\mathbf{x}}(s), \ddot{\mathbf{x}}(s) \} = \frac{\{ \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t) \}}{\mathbf{x}'^2(t) \mathbf{x}''^2(t) - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')^2} \end{aligned} \right.$$

Por otra parte, de la última fórmula de Frénet, $\mathbf{b} = a_{23} \mathbf{n}$, se obtiene en virtud de (28):

$$\tau(s) = \{ \mathbf{b}(s), a_{23} \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \} = -a_{23} \{ \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} \} = -a_{23},$$

luego llevando este valor de a_{23} a las fórmulas de Frénet, se obtienen éstas en la siguiente forma definitiva:

$$(29) \quad (\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS:

999. Calcular la curvatura y la torsión de la hélice circular $x_1 = r \cos t$, $x_2 = r \sin t$, $x_3 = kt$.

4. Curvas planas.

I. CURVAS PLANAS EN COORDENADAS POLARES.—Si (ρ, ω) son las coordenadas polares de un punto, una aplicación de clase C^1 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal como $\rho = f(\omega)$, define una curva plana, ya que esta ecuación, en virtud de las fórmulas de cambio a coordenadas cartesianas (8, 1, § 4, cap. III) equivale a las ecuaciones

$$(1) \quad \rho = f(\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = f(\omega) \cos \omega, \\ x_2 = f(\omega) \operatorname{sen} \omega, \end{cases}$$

que representa, en virtud de 1, una curva plana. Por consiguiente, el estudio de las curvas en coordenadas polares es un caso particular del estudio de las curvas en forma paramétrica: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

EJERCICIOS:

- 1.000. Hallar la ecuación de la tangente en un punto genérico a la curva $\rho = f(\omega)$.
 1.001. Calcular los vectores tangente y normal de una curva definida en coordenadas polares.
 1.002. Calcular la curvatura de una curva plana en coordenadas polares.

II. PUNTOS DE INFLEXIÓN DE LA CURVA $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.—Sean X e Y los puntos de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ correspondientes a los vectores $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}(t + dt)$ (fig. 112); si $|dt| < \varepsilon$, siendo ε suficientemente pequeño, el signo del ángulo $\varphi = (\overrightarrow{XY}, \mathbf{t})$, siendo $\mathbf{t}$ el vector tangente en X , viene dado por el signo del vector

$$[\mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)] \times \mathbf{t}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el teorema de Taylor, resulta que si

$$d^i \mathbf{x}(t) \times d \mathbf{x}(t) = 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

será:

$$(2) \quad [\mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)] \times \mathbf{t} = \frac{1}{(n+1)! |\mathbf{x}'(t)|} (\mathbf{x}^{(n+1)}(t + \theta dt) \times \mathbf{x}'(t)) dt^{n+1};$$

luego si ε es suficientemente pequeño, el signo de $\mathbf{x}^{(n+1)}(t + \theta dt) \times \mathbf{x}'(t)$ será igual al signo de $\mathbf{x}^{(n+1)}(t) \times \mathbf{x}'(t)$; por consiguiente, si $n+1 = 2k$, el signo del primer miembro de (2) será igual al signo de $\mathbf{x}^{(n+1)}(t) \times \mathbf{x}'(t)$, cualquiera que sea el signo de dt y la curva está situada, en un entorno

de X , a un mismo lado de la tangente. Si $n + 1 = 2k + 1$, el signo de φ depende del signo de d^2t y la curva atraviesa en X a la tangente; a estos puntos se les llama *puntos de inflexión*.

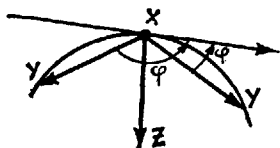


Fig. 112.

II. La condición necesaria y suficiente para que el punto $\mathbf{x}(t)$ de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sea punto de inflexión es que el primer vector $\mathbf{x}^{(i)}(t) \times \mathbf{x}'(t)$ distinto de cero, $i = 2, 3, \dots$, sea $\mathbf{x}^{(2k+1)}(t) \times \mathbf{x}'(t)$.

EJERCICIOS:

1.003. Hallar los puntos de inflexión de la curva $x_1 = t^2 + 1$, $x_2 = t^3 + t$.

1.004. Dibujar los puntos de inflexión, sus tangentes y arcos de la curva en sus entornos, para la curva del ejercicio anterior.

Si la curva viene dada por la ecuación $y = f(x)$ se verifica que los vectores derivados sucesivos son

$$(3) \quad \mathbf{x}' = (1, f'), \quad \mathbf{x}'' = (0, f''), \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)} = (0, f^{(n)});$$

por consiguiente,

$$(4) \quad \mathbf{x}^{(n+1)} \times \mathbf{x}' = -f^{(n+1)} \mathbf{v},$$

siendo $\mathbf{v}$ un vector unitario, normal al plano de la curva. De II y de (4) se deduce:

III. La condición necesaria y suficiente para que la curva $y = f(x)$ posea un punto de inflexión en (x, y) es que la primera derivada de orden superior a uno distinta de cero en x sea de orden impar.

EJERCICIOS:

1.005. Dibujar la curva $x_2 = 1 - x_1 + 3x_1^2 - x_1^3 - x_1^4$ en los entornos de sus puntos de inflexión.

1.006. Dada la curva $\rho = f(\omega)$, demostrar que la condición necesaria $f''f - 2f'^2 + f^2 = 0$ es suficiente juntamente con la condición $f'''f - 3f''f' - 2ff' \neq 0$, para que un punto sea punto de inflexión.

III. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.—Si el punto X de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ no es punto de inflexión, se dice que la curva es *cóncava* en el punto X respecto del punto Z de su plano (fig. 112), cuando en un entorno de X se verifica que la curva está en el mismo semiplano que el punto Z respecto de la tangente; en caso contrario, se dice que es *convexa* en X respecto de Z .

Análogamente, se dice que la curva es cóncava en X respecto del sentido determinado por el vector $\mathbf{v}$ cuando el representante de $\mathbf{v}$ con origen en X se halla en el mismo semiplano respecto de la tangente en X que el trozo de curva perteneciente a un cierto entorno de X . En caso contrario se llama convexa respecto del sentido de $\mathbf{v}$. Ambas definiciones pueden reducirse a la segunda sin más que tomar como vector $\mathbf{v}$ el vector $\overrightarrow{XZ}$.

De la definición anterior y del teorema de Taylor se deduce que:

1. La condición necesaria y suficiente para que la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sea cóncava en X respecto del sentido del vector $\mathbf{v}$ es que el primer orden de derivación n , para el que el primer miembro de (5) es distinto de cero, sea par: $n = 2k$ y que

$$(5) \quad (\mathbf{x}^{(n)} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{x}'^2 - (\mathbf{x}^{(n)} \cdot \mathbf{x}') (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{v}) > 0, \quad n = 2k.$$

En efecto, si $\mathbf{x}(t + dt)$ es un punto de la curva próximo al punto $\mathbf{x}(t)$, el sentido del ángulo que forma el vector $\mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)$ con el vector tangente $\mathbf{x}'(t)$ viene dado por el signo del producto vectorial de ambos vectores; como lo mismo ocurre respecto al signo del ángulo que forma el vector $\mathbf{v}$ con el vector $\mathbf{x}'(t)$, resulta que la condición necesaria y suficiente para que ambos ángulos tengan el mismo signo y que, por tanto, la curva sea cóncava respecto del sentido de $\mathbf{v}$, es que

$$(6) \quad \{[\mathbf{x}(t + dt) - \mathbf{x}(t)] \times \mathbf{x}'(t)\} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{x}'(t)) > 0.$$

Sustituyendo en (6) en lugar de $\mathbf{x}(t + dt)$ su desarrollo de Taylor, y suponiendo que $\mathbf{x}^{(n)}(t) \times \mathbf{x}'(t) \neq 0$, siendo $\mathbf{v}^{(i)}(t) \times \mathbf{x}'(t) = 0$, $i < n$, si $|dt| < \epsilon$, siendo ϵ suficientemente pequeño, el signo de la expresión que figura entre llaves en (6) es el mismo que el signo de $[\mathbf{x}^{(n)}(t) \times \mathbf{x}'(t)] dt^n$, y si $n = 2k$, dicho signo es igual al signo de $[\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{x}'(t)]$; por consiguiente, la condición (6) es equivalente a

$$(7) \quad [\mathbf{x}^{(n)}(t) \times \mathbf{x}'(t)] \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{x}'(t)) > 0, \quad n = 2k$$

y (7) es equivalente, por la identidad de Laplace, a (5).

2. La condición necesaria y suficiente para que la curva $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$ sea cóncava en el punto $X = (x_1, f(x_1))$ respecto del sentido del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es que

$$(8) \quad (v_2 - v_1 f') f^{(n)} > 0, \quad n = 2k, \quad f^{(i)} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

En efecto, de (3) y (7) se deduce que

$$(\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{x}') (\mathbf{v} \times \mathbf{x}') = (v_2 - v_1 f) f^{(n)}.$$

En particular, si se elige $\mathbf{v}$ de modo que tenga el sentido del semieje positivo de las x_2 , lo que equivale a tomar $\mathbf{v} = (0, 1)$, se obtiene:

3. La condición necesaria y suficiente para que la curva $\mathbf{x}_2 = f(x_1)$ sea cóncava en el punto $X = (x_1, f(x_1))$ respecto del sentido del semieje positivo de x_2 , es que

$$(9) \quad f^{(2k)}(x) > 0, \quad f^{(i)}(x) = 0, \quad i = 2, \dots, 2k-1.$$

4. Una condición suficiente para que la curva $\rho = f(\omega)$ sea cóncava en el punto $X = (\omega, f(\omega))$ respecto del sentido del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es que

$$(10) \quad (f''f - 2f'^2 + f^2) [f(v_1 \sin \omega - v_2 \cos \omega) + f(v_1 \cos \omega + v_2 \sin \omega)] > 0.$$

En particular, una condición suficiente para que la curva sea cóncava respecto del origen de coordenadas polares es que

$$(11) \quad f(f''f - 2f'^2 + f^2) < 0.$$

En efecto, (10) es consecuencia inmediata de (7), para $n = 2$. En cuanto a (11) basta observar que el vector unitario $\frac{[\overrightarrow{XO}]}{|\overrightarrow{XO}|}$, siendo O el origen de coordenadas, tiene por coordenadas: $\mathbf{v} = (-\cos \omega, -\sin \omega)$.

EJERCICIOS:

1.007. Comprobar que la elipse $x_1 = a \cos \varphi$, $x_2 = b \sin \varphi$ es cóncava respecto del origen de coordenadas en todos sus puntos.

1.008. Averiguar la concavidad o convexidad de la curva $y = 2x^3 - x^2 + 1$ en uno de sus puntos, respecto del semieje positivo de las x .

IV. ASÍNTOTAS.—Dada la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, se llama *vector asintótico* de la curva al vector unitario

$$(12) \quad \mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}, \quad \text{cuando } \lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{x}(t)| = \infty.$$

EJERCICIOS:

1.009. Calcular los vectores asintóticos de la curva $\mathbf{x} = \left(\frac{t}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t^2 + t - 2} \right)$

1.010. Calcular los vectores asintóticos de $x_2 = \frac{1}{(x_1^2 - 1)(x_1 - 3)}$.

1.011. Calcular los vectores asintóticos de la curva $\rho = \frac{\omega}{\text{sen}(2\omega - 1)}$.

DEFINICIÓN.—Si $\mathbf{a}$ es el vector asintótico correspondiente al valor t_0 de t , se llama *asíntota* de dirección $\mathbf{a}$ a la recta, si existe, paralela al vector asintótico $\mathbf{a}$, tal que la distancia del punto general de la curva $\mathbf{x}(t)$ a dicha recta tienda a cero cuando $t \rightarrow t_0$.

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, el vector $\mathbf{n} = (a_2, -a_1)$ es unitario y normal al vector $\mathbf{a}$. Las rectas paralelas al vector $\mathbf{a}$ pueden expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$(13) \quad \mathbf{y} = \rho \mathbf{n} + \lambda \mathbf{a};$$

para cada valor de ρ se obtiene una paralela. La ecuación de la paralela a la recta (13) trazada por $\mathbf{x}(t)$ es

$$(14) \quad \mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \lambda \mathbf{a},$$

y la distancia entre las rectas (13) y (14), que es igual a la distancia de $\mathbf{x}(t)$ a la recta (13), es:

$$\text{distancia}(\mathbf{X}, \mathbf{a}) = \rho - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n});$$

por consiguiente, para que la recta (13) sea asíntota es necesario y suficiente que

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} [\rho - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})] = 0, \quad \text{o bien,} \quad \rho = \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}),$$

Por consiguiente, la asíntota correspondiente al valor t_0 del parámetro tiene por ecuación

$$(16) \quad \mathbf{y} = \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + \lambda \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{x}(t)| = \infty.$$

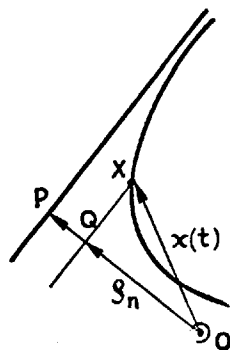


Fig. 119.

EJERCICIOS:

1.012. Calcular las ecuaciones de las asíntotas de la curva del ejercicio 1.009.

La ecuación (16) se puede escribir también, en forma cartesiana no paramétrica, del siguiente modo:

$$(17) \quad a_2 y_1 - a_1 y_2 = \rho,$$

en donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es el vector calculado en (12), y ρ es el número calculado en (15), que puede escribirse del siguiente modo:

$$(18) \quad \rho = \lim_{t \rightarrow t_0} (x_1(t) a_2 - x_2(t) a_1).$$

En particular, si la curva viene dada por la ecuación $y = f(x)$, será:

$$(19) \quad a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + [f(x)]^2}}, \quad a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + [f(x)]^2}}.$$

y

$$(20) \quad \rho = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_2 x - a_1 f(x)).$$

Para las curvas definidas por una ecuación en coordenadas polares:

$$(21) \quad \rho = f(\omega),$$

los vectores asíntóticos se determinan por la condición

$$(22) \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(\omega) = \infty, \quad \mathbf{a} = (\cos \omega_0, \operatorname{sen} \omega_0),$$

con lo que será: $\mathbf{n} = (\operatorname{sen} \omega_0, -\cos \omega_0)$, y la fórmula (15) se reduce a

$$(23) \quad \rho = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(\omega) \operatorname{sen}(\omega_0 - \omega).$$

La ecuación (16) se escribirá, eliminando el parámetro λ :

$$(24) \quad \operatorname{sen} \omega_0 y_1 - \cos \omega_0 y_2 = \rho,$$

que es la ecuación cartesiana de la asíntota correspondiente al valor de ω_0 de la variable independiente que hace infinito a ρ . La ecuación (24) se escribe, en coordenadas polares, del siguiente modo:

$$(25) \quad r \operatorname{sen}(\omega_0 - \varphi) = \rho,$$

en donde las variables son (φ, r) , y ω_0 y ρ son los valores calculados en (22) y (23), respectivamente.

EJERCICIOS:

1.013. Calcular las asíntotas de la curva $\rho = a \cot \omega$ (llamada curva de Gutschoven).

1.014. Hallar las asíntotas de la trisectriz de Longchamps: $\rho = -\frac{r}{\cos 3\omega}$.

5. Curvas planas definidas implícitamente.—Sea $f(x_1, x_2)$ una aplicación del plano vectorial en $\mathbb{R}$. Supondremos que f es diferenciable tantas veces como sea preciso. Sea c el conjunto formado por todos los puntos $X = (x_1, x_2)$ del plano euclídeo tales que

$$(1) \quad f(x_1, x_2) = 0.$$

Sea $A = (a_1, a_2)$ un punto de c en el que $df(x_1, x_2)$ es distinta de cero, lo que equivale a que una, por lo menos, de las derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A, \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A$$

sea distinta de cero; si, por ejemplo, es $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A \neq 0$, el teorema de existencia de las funciones implícitas establece que se puede hallar un entorno $E(a_1)$ y una función $x_2 = \varphi_1(x_1)$ tales que

$$(2) \quad f(x_1, \varphi_1(x_1)) = 0, \quad \forall x_1 \in E(a_1).$$

Recordando la definición de curva plana, resulta que el conjunto c_1 formado por todos los puntos $X = (x_1, \varphi_1(x_1))$, $x_1 \in E(a_1)$ es una curva plana, en el sentido que acabamos de mencionar, y por otra parte, la relación (2) prueba que c_1 es un subconjunto de c . Si $c_1 = c$, el conjunto c es una curva plana. Si existe otro punto $B = (b_1, b_2)$ que pertenece a c y no pertenece a c_1 , se podría repetir con él lo dicho para el punto A y podría obtenerse otra curva c_2 cuyos puntos pertenecerían a c . Si mediante un número finito de curvas $c_1, c_2, \dots, c_n$ se agotan todos los puntos de c salvo un número finito de ellos, se dice que c es una curva plana representada por la ecuación implícita (1). Según esto, una curva plana, definida por una ecuación implícita (1), equivale a un número finito de curvas según la definición de 1. La curva c_1 , de ecuación $x_2 = \varphi_1(x_1)$, que forma parte de la curva (1) se llama rama de la curva (1) respecto de la variable de uniformización x_1 .

Si todos los puntos de c , salvo un número finito de ellos $R_1, \dots, R_p$, pertenecen a una de las ramas

$$(3) \quad c_i: \quad x_2 = \varphi_i(x_1), \quad i = 1, \dots, q,$$

se dice que estas curvas son todas las ramas de (1) respecto de la variable de uniformización x_1 y que $R_1, \dots, R_p$ son los puntos de ramificación de la curva (1) respecto de la variable x_1 . Los puntos de ramificación respecto de la variable x_1 están caracterizados por la propiedad de que en ellos

$$(4) \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0.$$

Análogamente, los puntos de ramificación respecto de la variable x_2 están caracterizados por la propiedad de ser en ellos

$$(5) \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.$$

Todo punto de la curva (1) que no sea de ramificación respecto de x_2 pertenece a una de las ramas

$$(6) \quad c'_i: \quad x_1 = \psi_i(x_2), \quad i = 1, \dots, q'; \quad f(\psi_i(x_2), x_2) = 0,$$

respecto de la variable de uniformización x_2 .

Se llama *punto ordinario* de la curva (1) a todo punto que pertenece a una de las ramas (3), (6) de dicha curva. Los puntos que no pertenecen a ninguna de las ramas (3), (6) se llaman *puntos singulares* de la curva (1). Por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para que un punto de la curva (1) sea singular es que en él se verifiquen las dos ecuaciones:

$$(7) \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0.$$

EJERCICIO:

1.015. Hallar los puntos singulares de las siguientes curvas: a) $(x_2 - 1)^3 + (x_2 - 1)^2 - (x_1 + 1)^2 = 0$. b) $x_2^3 - x_1^3 = 0$.

En virtud de todo lo que antecede, *el estudio local de una curva definida implícitamente, en uno de sus puntos ordinarios se reduce al estudio de dicho punto en una curva definida explícitamente*. Vamos, por consiguiente, a resumirlo brevemente.

ESTUDIO LOCAL DE LAS CURVAS DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE EN UN PUNTO ORDINARIO DE LAS MISMAS.—I. TANGENTE.—Sea $A = (a_1, a_2)$ un punto ordinario de (1). Supongamos que A pertenece a la rama c_1 de ecuación $x_2 = \varphi_1(x_1)$. Se llama *tangente en A a la curva* (1) a la tangente en A a la rama c_1 . Por consiguiente, su ecuación será:

$$(8) \quad x_2 - a_2 = \varphi'_1(a_1)(x_1 - a_1).$$

Ahora bien, derivando en (2), se obtiene:

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \varphi'_1(x_1) = 0.$$

de donde:

$$\varphi'_1(a_1) = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A},$$

con lo que (9) se puede escribir del siguiente modo:

$$(10) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A (x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A (x_2 - a_2) = 0.$$

II. NORMAL.—De (10) se obtiene la siguiente ecuación de la normal en A :

$$(11) \quad \frac{x_1 - a_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A} = \frac{x_2 - a_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A}.$$

III. VECTORES TANGENTE Y NORMAL.—De (10) y (11) se deduce que los vectores tangente y normal son:

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}}, - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}} \right),$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}} \right).$$

IV. PUNTOS DE INFLEXIÓN.—De (9) se deduce que los puntos de inflexión verifican la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 = 0.$$

EJERCICIOS:

- 1.016. Hallar los puntos de inflexión de las siguientes curvas: a) $x_2^2 + a x_1^3 + b x_1^2 = 0$.
 b) $a x_2^2 = x_1^3 + c x_1 + d$ (distinguir los siguientes subcasos: $c = d = 0$; $c = 0, d \neq 0$).
 c) $x_1 x_2^2 - a^3 = 0$. d) $x_1 x_2^2 - 3 b^2 (a - x_1) = 0$. e) $x_1 (x_2^2 + b^2) - a b x_2 = 0$. f) $x_1 x_2^2 = (a - x_1)^3$. g) $x_1 x_2^2 = (a - x_1) (b - x_1)^2$. h) $a^2 x_1 x_2^2 - (x_1 - b)^3 = 0$. i) $a^2 x_1 x_2 = (x_1 - b) (x_1 - c) (x_1 - d)$.

V. ASÍNTOTAS.—La recta $X_2 = t X_1$, que une el punto (x_1, x_2) de la curva (1) con el origen de coordenadas, tiene como pendiente $t = \frac{x_2}{x_1}$. A la dirección de esta recta, cuando el punto (x_1, x_2) tiende hacia infinito (entendiendo por tal que una, al menos, de sus coordenadas tienda a infinito), se le llama dirección asintótica. Por consiguiente, las direcciones asintóticas, distintas de la dirección del eje $X_1 = 0$, vienen dadas por los valores de t calculados por la condición:

$$(12) \quad \lim_{x_1 \rightarrow \pm \infty} x_1^{-v} f(x_1, t x_1) = 0.$$

Análogamente, las direcciones asintóticas, distintas de la dirección de la recta $X_2 = 0$, vienen dadas por

$$(13) \quad \lim_{x_2 \rightarrow \pm \infty} x_2^{-v} f(t x_2, x_2) = 0,$$

en donde v es un número entero conveniente.

EJERCICIOS:

1.017. Hallar las direcciones asintóticas de las curvas del ejercicio 1.016.

- 1.018. Hallar las direcciones asintóticas de las siguientes curvas: a) $x_2 - e^{x_1} = 0$.
 b) $x_2 - 2 x_1 + \operatorname{sen}(x_2 - 2 x_1) = 0$.

1. Se llama *asíntota* a toda recta cuya dirección es asintótica y tal que la distancia de un punto de la curva a dicha recta tienda a cero cuando el punto de la curva tiende a un punto del infinito.

Sea

$$(14) \quad X_2 = t X_1 + n,$$

un haz de rectas de dirección asintótica correspondiente a la curva (1). Supongamos que t se ha calculado mediante (12). La distancia del punto (x_1, x_2) a la recta (14) viene dada por

$$d = \frac{x_2 - t x_1 - n}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Para que (14) sea asíntota debe verificarse que

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm \infty} \frac{x_2 - t x_1 - n}{\sqrt{1 + t^2}} = 0,$$

de donde

$$(15) \quad \lim_{x_1 \rightarrow \pm \infty} (x_2 - t x_1 - n) = 0.$$

La ecuación (15) permite calcular, en general, n . De (15) se deduce que n verifica la ecuación

$$(16) \quad \lim_{x_1 \rightarrow \pm \infty} x_1^{-(\gamma-1)} f(x_1, t x_1 + n) = 0,$$

de donde se pueden calcular los valores de n correspondientes a los valores de t .

EJERCICIOS:

1.019. Calcular las asíntotas de la curva $a^2 x_1 x_2^2 - (x_1 - b)(x_1 - c)(x_1 - d) = 0$.

1.020. Calcular las asíntotas de la curva $x_1^4 - x_2^4 + x_1^2 - 2x_2^2 = 0$.

1.021. Calcular las asíntotas de la curva $x_1^4 - x_1^3 x_2 - x_2^2 = 0$.

VI. PUNTOS SINGULARES.—Supondremos en lo que sigue que $f(x_1, x_2)$ es una función analítica en el intervalo considerado; esto es, de clase infinito y convergente en un entorno de $(0, 0)$. Hemos visto que la condición necesaria y suficiente para que el punto (x_1, x_2) de $f(x_1, x_2)$ sea un punto singular es que

$$(17) \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0.$$

Vamos a estudiar ahora la curva en las proximidades de un punto singular P , que tomaremos en el origen de coordenadas. Supongamos que las

primeras derivadas no nulas en P son las derivadas de orden r , por lo que en un entorno de P se verificará:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = f(x_1, x_2) &= \frac{1}{r!} \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right]_{(0,0)}^{(r)} f(x_1, x_2) \\ &+ \frac{1}{(r+1)!} \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right]_{(0,0)}^{(r+1)} f(x_1, x_2) + \dots \end{aligned} \right.$$

En la demostración del teorema de existencia de las funciones implícitas se ha supuesto que el punto P, en cuyo entorno se estudiaba la función, era un punto simple; sin embargo, puede ser cierto el teorema, salvo la unicidad de la función φ , sin necesidad de exigir que el punto P sea simple. Se verifica que, si $f(x_1, x_2)$ es un función de clase ∞ en el punto P, siendo (18) convergente en un entorno de P, existe una función $x_2 = \varphi(x_1)$ (o bien $x_1 = \psi(x_2)$), y en general r , cuando todas las derivadas parciales de órdenes inferiores a r son nulas y no todas las derivadas de orden r lo son en P, tal que

$$(19) \quad f(x_1, \varphi(x_1)) = 0,$$

en un cierto entorno de P. La función $\varphi(x_1)$ admite, en algunos casos, un desarrollo en serie de Taylor, de la forma:

$$(20) \quad \varphi(x_1) = \varphi'(0)x_1 + \frac{1}{2}\varphi''(0)x_1^2 + \dots$$

En efecto, para calcular las derivadas sucesivas de $\varphi(x)$ basta derivar la identidad (19), obteniéndose las ecuaciones siguientes:

$$(21) \quad \frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_1^r} + \binom{r}{1} \frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2} \varphi'(0) + \dots + \frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_2^r} [\varphi'(0)]^r = 0,$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^{r+1} f(0,0)}{\partial x_1^{r+1}} + \binom{r+1}{1} \frac{\partial^{r+1} f(0,0)}{\partial x_1^r \partial x_2} \varphi'(0) + \dots + \frac{\partial^{r+1} f(0,0)}{\partial x_2^{r+1}} [\varphi'(0)]^{r+1} \Big\} \\ &+ \binom{r+1}{2} \left[\frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2} + \binom{r-1}{1} \frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_1^{r-2} \partial x_2^2} \varphi'(0) + \dots \right. \\ &\left. + \binom{r-1}{r-2} \frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2^{r-1}} \varphi'^{r-2}(0) + \frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_2^r} \varphi'^{r-1}(0) \right] \varphi''(0) = 0, \dots \end{aligned} \right.$$

En la primera de ellas se puede calcular $\varphi'(0)$ y se obtienen (suponiendo $\frac{\partial^r f(0,0)}{\partial x_2^r} \neq 0$) r -valores, lo que indica que el punto P pertenece en este caso

a r ramas. El primer coeficiente, $\varphi'(o)$ de (20), es por tanto una raíz de la ecuación

$$(23) \quad \frac{\partial^r f(o, o)}{\partial x_1^r} + \binom{r}{1} \frac{\partial^r f(o, o)}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2} x + \dots + \frac{\partial^r f(o, o)}{\partial x_2^r} x^r = 0.$$

Si tomamos para $\varphi'(o)$ una raíz simple de (23), la ecuación (22) permite calcular $\varphi''(o)$, ya que la expresión contenida en el paréntesis rectangular de (22) es igual a $\frac{1}{r}$ multiplicado por la derivada de (23) al sustituir en ella x por $\varphi'(o)$, lo que prueba que si $\varphi'(o)$ es raíz simple de (23), dicho paréntesis rectangular es distinto de cero. Si, por el contrario, se toma como valor de $\varphi'(o)$ una raíz de orden de multiplicidad s de (23), la ecuación (22) no permite calcular $\varphi''(o)$; por ser cero el coeficiente de φ'' en (22). Por consiguiente, para que el cálculo sea posible es necesario que el término encerrado entre llaves en (22) sea también cero. Si esto no ocurre, ello indica que la función $\varphi(x)$ no es desarrollable en serie de potencias enteras en el entorno del punto P. Si el término entre llaves de (22) es también cero, se pasa a la derivada siguiente, de orden $r+2$; si en ella se puede calcular φ'' se obtendrán para él dos valores. Si esta segunda derivada diese lugar a una igualdad imposible, el problema no tendría solución; si diese lugar a una identidad se pasaría a la siguiente, y así sucesivamente.

EJERCICIOS:

1.022. Calcular las ramas en el origen de la curva:

$$f(x, y) = x(x-y)y + x^4 + y^4 = 0.$$

[Las derivadas sucesivas de $f(x, \varphi(x))$ son:

$$D f = f_1 + f_2 \varphi'.$$

$$D^2 f = f_{11} + 2 f_{12} \varphi' + f_{22} \varphi'^2 + f_2 \varphi''.$$

$$D^3 f = f_{111} + 3 f_{112} \varphi' + 3 f_{122} \varphi'^2 + f_{222} \varphi'^3 + 3(f_{12} + f_{22} \varphi') \varphi'' + f_2 \varphi'''. \quad \cdot$$

$$D^4 f = f_{1111} + 4 f_{1112} \varphi' + 6 f_{1122} \varphi'^2 + 4 f_{1222} \varphi'^3 + f_{2222} \varphi'^4 \\ + 3(2 f_{112} + 4 f_{122} \varphi' + 2 f_{222} \varphi'^2 + f_{22} \varphi'') \varphi'' - 4(f_{12} + f_{22} \varphi') \varphi''' + f_2 \varphi^{(4)}.$$

$$D^5 f = f_{11111} + 5 f_{11112} \varphi' + 10 f_{11122} \varphi'^2 + 10 f_{11222} \varphi'^3 + 5 f_{12222} \varphi'^4 + f_{22222} \varphi'^5 \\ + (10 f_{1112} + 30 f_{1122} \varphi' + 30 f_{1222} \varphi'^2 + 10 f_{2222} \varphi'^3 + 15 f_{122} \varphi'' + 15 f_{222} \varphi' \varphi'') \varphi''' \\ + (10 f_{112} + 20 f_{122} \varphi' + 10 f_{222} \varphi'^2 + 10 f_{22} \varphi'') \varphi^{(4)} \\ + (5 f_{12} + 5 f_{22} \varphi') \varphi^{(4)} + f_2 \varphi^{(5)} \dots$$

Para la curva dada, en el origen, se verifica que $f_1 = f_2 = f_{11} = f_{12} = f_{22} = 0$, $f_{111} = f_{222} = 0$, $f_{112} = 2$, $f_{122} = -2$, $f_{1111} = f_{2222} = 24$, $f_{1112} = f_{1122} = f_{1222} = 0$ y todas las derivadas siguientes son nulas. Por consiguiente, la tercera derivada da

$$\varphi' - \varphi'^2 = 0,$$

de donde $\varphi' = 0$, $\varphi' = 1$. Para $\varphi' = 0$, la derivada cuarta da $\varphi'' = -2$, y la derivada quinta, $\varphi''' = 6$. Por consiguiente, una rama en el origen es:

$$\varphi_1(x) = -x^2 + x^3 + \dots$$

Tomando la raíz $\varphi' = 1$, se obtiene $\varphi'' = 4$, $\varphi''' = 24$, luego otra rama es

$$\varphi_2(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + \dots$$

Considerando la rama $x = \psi(y)$, se obtiene, análogamente:

$$\psi(y) = \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

1.023. Calcular las ramas en el origen de la curva

$$f(x, y) = (x - y)(2x - y)(3x - y) + y^3 + x^4$$

2. La expresión (20) se llama *rama en el origen de la curva* (1), y el origen se llama *centro de la rama*. Si en el punto P son nulas todas las derivadas parciales de $f(x_1, x_2)$ hasta las de orden r , y no lo son todas las de orden r , se dice que P es un *punto múltiple de orden de multiplicidad r*.

Si $x_2 = \varphi(x_1)$ es una rama de la curva (1) en el origen de coordenadas, siendo éste un punto de orden de multiplicidad r , la ecuación de la tangente en el origen a esta rama es:

$$(24) \quad x_2 = \varphi'(0) x_1.$$

Ahora bien, por ser nulas todas las derivadas parciales de $f(x_1, x_2)$ hasta las de orden r , se verifica que la derivada r -ésima de (19) es:

$$(25) \quad D^r [f(x_1, \varphi(x_1))] = a_0 + a_1 \varphi'(0) + a_2 \varphi'(0)^2 + \dots + a_r \varphi'(0)^r = 0,$$

en donde

$$a_i = \binom{r}{i} \left[\frac{\partial^r f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{r-i} \partial x_2^i} \right]_{(0,0)}; \quad i = 0, \dots, r.$$

Ahora bien, como la ecuación (25) posee r raíces, la curva (1) posee en un punto de multiplicidad r , r tangentes, que pueden parcialmente coincidir.

EJERCICIOS:

1.024. Hallar las ecuaciones de las tangentes en el punto singular de la curva

$$24y^4 + 24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 - 24e^x = 0.$$

1.025. Demostrar que si la ecuación de la curva es de la forma

$$f_r(x, y) + f_{r+1}(x, y) + \dots + f_n(x, y) = 0,$$

en donde $f_i(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado i , se verifica que la ecuación conjunta de las tangentes en el origen es $f_r(x, y) = 0$.

1.026. Hallar los puntos múltiples, con sus tangentes, de la siguiente curva:

$$-x^3 + x^4 - 2x^2y - xy^2 + 2xy^4 + y^5 = 0.$$

1.027. Idem de la curva

$$x^4 - x^3y + 3x^2y^3 - 3xy^5 + y^7 = 0.$$

1.028. Idem de la curva

$$(x^2 - y^2)^2 - x^5 = 0.$$

3. Se llama *parábola aproximada* de una curva en un punto, la curva que se obtiene tomando un número finito de términos de una rama de la curva con centro en él.

Para representar gráficamente una curva conviene dibujar las parábolas aproximadas en los puntos múltiples, en los máximos y mínimos y en los puntos de inflexión.

EJERCICIO:

1.029. Representar gráficamente la curva del ejercicio 1.022, dibujando las parábolas aproximadas de segundo y tercer orden en los puntos múltiples.

§ 2. SUPERFICIES

1. **Superficies. Definición. Plano tangente.**—Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ una aplicación de clase C^1 de V_2 en V_3 , siendo V_2 y V_3 espacios vectoriales euclídeos.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *superficie* de un espacio euclídeo tridimensional, respecto de un origen O del mismo, al lugar de los extremos de los repre-

sentantes con origen O de los vectores de una aplicación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, de clase C^1 , de un abierto $\mathcal{A}$ de V_2 en V_3 .

A cada curva $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ de $\mathcal{A}$ (fig. 114), le corresponde mediante la aplicación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$, contenida en la superficie dada.

Sea A' un punto arbitrario de $\mathcal{A}$: $A' = \mathbf{u}_0 = (u_0^1, u_0^2)$, y sea $A = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ su homólogo de la superficie. Si $\mathbf{u}(t)$ es una aplicación arbitraria de V_1 en V_2 de clase C^1 tal que $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ representa una curva plana que pasa por el punto A' , y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ una curva de la superficie que pasa

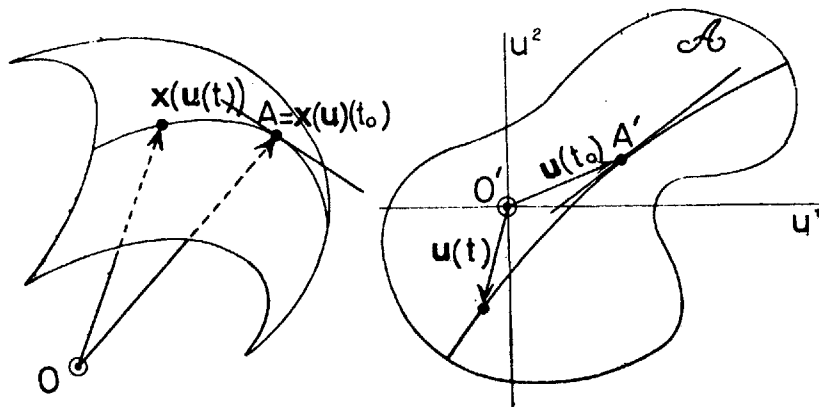


Fig. 114.

por el punto A . La tangente a la curva $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ en el punto A' tiene por ecuación:

$$(1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}(t_0) + \mathbf{u}'(t_0) dt,$$

y la tangente en A a la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ tiene por ecuación

$$(2) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + (\mathbf{x}_1 u_1' + \mathbf{x}_2 u_2') dt, \quad \mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}.$$

Ahora bien, como la aplicación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ es de clase C^1 existe la diferencial $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 du^1 + \mathbf{x}_2 du^2$. Por consiguiente,

$$(3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{x}_1 du^1 + \mathbf{x}_2 du^2$$

es un plano, siempre que $d\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ sea inyectiva, como supondremos de momento (las variables independientes son du^1 y du^2), incidente con el punto A . La ecuación (2), de la tangente en A a la curva $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$, es un caso particular de la (3): basta sustituir en ésta du^1 por $u_1' dt$, y du^2 por

$u'' dt$ para obtener la (2). Esto indica que todos los puntos de la tangente (2) están en el plano (3). Resulta, por consiguiente, que: *las tangentes en A a todas las curvas de la superficie que pasan por A están contenidas en el plano (3) que recibe el nombre de plano tangente a la superficie en A.*

La ecuación (3) expresa que el vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, lo cual puede expresarse también del siguiente modo:

$$(4) \quad \{\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{u}_0), \mathbf{x}_1(\mathbf{u}_0), \mathbf{x}_2(\mathbf{u}_0)\} = 0,$$

que constituye otra expresión de la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto A.

Tomando una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en el espacio vectorial V_3 y poniendo $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = x_1(\mathbf{u}) \mathbf{e}_1 + x_2(\mathbf{u}) \mathbf{e}_2 + x_3(\mathbf{u}) \mathbf{e}_3$, la ecuación (4) se puede escribir en la siguiente forma:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x_1 - x_1(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial x_1(\mathbf{u}_0)}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1(\mathbf{u}_0)}{\partial u^2} \\ x_2 - x_2(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial x_2(\mathbf{u}_0)}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2(\mathbf{u}_0)}{\partial u^2} \\ x_3 - x_3(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial x_3(\mathbf{u}_0)}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3(\mathbf{u}_0)}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIOS:

1.030. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x_1 = u^1$, $x_2 = u^2$, $x_3 = (u^1)^2 - 4(u^2)^2$ en el punto $(2, 1, 0)$.

1.031. Idem a la superficie $x_1 = (u^1)^2 - u^2$, $x_2 = u^1 u^2$, $x_3 = (u^2)^2$ en el punto $(-1, 2, 4)$.

DEFINICIÓN 2.—Un punto de la superficie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ se llama *ordinario* cuando la diferencial $d\mathbf{x}(\mathbf{u})$ en él es una aplicación inyectiva.

TEOREMA 1.—La condición necesaria y suficiente para que el punto $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ sea ordinario es que $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\right)_0 \neq \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$; entonces será

$$(6) \quad \begin{vmatrix} dx_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^1}\right)_0 du^1 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^2}\right)_0 du^2 & dx_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} \end{pmatrix}_0 \\ dx_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u^1}\right)_0 du^1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u^2}\right)_0 du^2 & dx_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_0 \\ dx_3 = \left(\frac{\partial x_3}{\partial u^1}\right)_0 du^1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u^2}\right)_0 du^2 & dx_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{pmatrix}_0 \end{vmatrix} = 0.$$

CONDICIÓN NECESARIA.—Si la diferencial (6) es inyectiva, el sistema (6) posee solución única respecto de du^1 y du^2 , lo cual implica que rango $\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u^1, u^2)} = 2$, y esto equivale a que los vectores $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}$ y $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}$ sean linealmente independientes y, por tanto, su producto vectorial distinto de cero.

CONDICIÓN SUFICIENTE.—Si $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\right) \neq \mathbf{0}$, los vectores $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}$ y $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}$ no son paralelos, luego rango $\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u^1, u^2)} = 2$, lo que implica que el sistema (6) se puede resolver respecto de du^1 , du^2 de modo único, esto es, la diferencial es inyectiva.

COROLARIO.—La condición necesaria y suficiente para que el punto $\mathbf{x}(u_0)$ sea ordinario es que (3) sea la ecuación de un plano. Esto equivale a lo siguiente: la condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{x}(u_0)$ sea un punto ordinario es que posea plano tangente.

TEOREMA 2.—Si A es un punto ordinario de la superficie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$, siendo, por ejemplo, $\left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u^1, u^2)}\right| \neq 0$, existe un entorno de A en el que la superficie puede representarse por una ecuación, llamada explícita, de la siguiente forma:

$$(7) \quad x_3 = \varphi(x_1, x_2).$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta poner $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = x_3$ y aplicar el teorema fundamental de existencia de las funciones implícitas (2, § 3, cap. VI).

La ecuación (7) es un caso particular de ecuaciones paramétricas, ya que (7) es equivalente a

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = u^1, \\ x_2 = u^2, \\ x_3 = \varphi(u^1, u^2), \end{cases}$$

Aplicando la ecuación (5) del plano tangente a (8), se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & 1 & 0 \\ x_2 - x_2^0 & 0 & 1 \\ x_3 - x_3^0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)_0 \end{vmatrix} = 0,$$

que puede escribirse del siguiente modo:

$$(9) \quad x_3 - x_3^0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right)_0 (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right)_0 (x_2 - x_2^0),$$

que es la forma más usada de la ecuación del plano tangente a una superficie definida por su ecuación explícita (7).

DEFINICIÓN 3.—Se llama *normal* en un punto de una superficie a la recta incidente con él y perpendicular al plano tangente en él a la superficie.

Por consiguiente, las ecuaciones de la normal en A a la superficie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ serán, en virtud de (5),

$$(10) \quad \frac{x_1 - x_1(u_0)}{\left| \frac{\partial (x_2, x_3)}{\partial (u^1, u^2)} \right|_0} = \frac{x_2 - x_2(u_0)}{\left| \frac{\partial (x_3, x_1)}{\partial (u^1, u^2)} \right|_0} = \frac{x_3 - x_3(u_0)}{\left| \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (u^1, u^2)} \right|_0},$$

y las ecuaciones de la normal en A a la superficie (7) serán:

$$(11) \quad -(x_3 - x_3^0) = \frac{x_1 - x_1^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right)_0} = \frac{x_2 - x_2^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right)_0}.$$

2. Superficies en forma implícita. Curvas en forma implícita.—Sea f una aplicación de clase C^1 del espacio vectorial euclídeo V_3 en el V_1 , tal que en el punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ se verifica $f(a_1, a_2, a_3) = 0$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_A \neq 0$. En tales condiciones, el teorema de existencia de las funciones implícitas asegura la existencia de un entorno E del punto (a_1, a_2) del plano V_2 , tal que, para todo punto $(x_1, x_2) \in E$, está definida una aplicación de clase C^1 :

$$(12) \quad x_3 = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in E,$$

tal que

$$(13) \quad f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) = 0.$$

Ahora bien, (12) representa, según hemos visto, una superficie. Si no existe ningún otro punto, fuera de la superficie (12), que anule a la función $f(x_1, x_2, x_3)$, se dice que

$$(14) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

es la ecuación implícita de la superficie (12). Si existen otros puntos se procede con ellos como se ha procedido con A y se obtiene un número fi-

nito o infinito de superficies de la forma (12) cuyos puntos verifican todos ellos la ecuación (14). De aquí que convenga ampliar el concepto de superficie, admitiendo la siguiente:

DEFINICIÓN 4.—Se llama *superficie definida por la ecuación implícita* (14) al conjunto formado por todas las superficies (12) definidas mediante el teorema de existencia de funciones implícitas, y a los puntos de acumulación de todas estas superficies.

DEFINICIÓN 5.—La superficie (12) se llama *hoja de la superficie* (14), *respecto de las variables de uniformización* (x_1, x_2) . Los puntos de la superficie (14) que pertenezcan a una hoja se llaman *puntos ordinarios*, y los que no pertenecen a ninguna hoja, *puntos singulares*.

Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$ un punto ordinario de (14), y sea (12) la hoja a la que pertenece A . El plano tangente a (12) en A se llama también plano tangente a (14) en A . Su ecuación es (9) (sin más que cambiar x_1^0, x_2^0, x_3^0 por a_1, a_2, a_3 , respectivamente). Ahora bien, derivando parcialmente respecto de x_1 y x_2 la identidad (13) resulta:

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0.$$

De (15) y (9) resulta la siguiente *ecuación del plano tangente a la superficie* (14) *en el punto* A :

$$(16) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_A (x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_A (x_2 - a_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_A (x_3 - a_3) = 0.$$

De (16) resulta que: *la condición necesaria y suficiente para que el punto* A *sea un punto singular de la superficie* (14) *es que sea solución del sistema*

$$(17) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0.$$

EJERCICIOS:

1.032. Ecuación del plano tangente a la superficie $x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 + 4x_1x_2 - x_2 + 1 = 0$, en un punto genérico.

1.033. Hallar el punto singular de la superficie $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 - 2(x_1 - 1)(x_3 + 1) + 4(x_2 - 2)(x_3 + 1) = 0$.

1.034. Hallar todos los puntos singulares de la superficie $x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$.

PUNTOS SINGULARES. CONO TANGENTE.—Sea la superficie S de ecuación $f(x, y, z) = 0$. Existen puntos singulares en los cuales se pueden hallar infinitas ternas de funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, tales que para todo $t \in I = (t_1, t_2)$ se verifique idénticamente $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Sea $P = (a, b, c)$ uno de tales puntos singulares, y sea $a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$, $c = z(t_0)$. La curva C : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ está contenida en S y pasa por P . La tangente a C en P es:

$$(18) \quad \frac{x-a}{x'(t_0)} = \frac{y-b}{y'(t_0)} = \frac{z-c}{z'(t_0)}.$$

Ahora bien, derivando sucesivamente la identidad $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$, se obtiene:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_x x'(t) + f'_y y'(t) + f'_z z'(t) = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial}{\partial z} z'(t) \right]^{(2)} f(x, y, z) + \sum f'_x x''(t) = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial}{\partial z} z'(t) \right]^{(3)} f(x, y, z) + 3 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x' x'' \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x' y'' + x'' y') + \dots \right] + \sum f'_x x'''(t) = 0 \dots \end{array} \right.$$

Sustituyendo en (19) en lugar de la variable t el número t_0 , correspondiente al punto P , por ser este punto singular deben anularse las tres derivadas primeras en él, pues en otro caso existiría una función explícita que se verificaría en todo un entorno de él. Supongamos que no se anulan en P todas las derivadas segundas. Haciendo en la segunda (19) $t = t_0$, resulta:

$$(20) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial}{\partial y} y'(t_0) + \frac{\partial}{\partial z} z'(t_0) \right]^{(2)} f(a, b, c) = 0$$

De (18) y (20) se deduce

$$(21) \quad \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} + (z-c) \frac{\partial}{\partial z} \right]^{(2)} f(a, b, c) = 0.$$

Por consiguiente, todos los puntos de la tangente (18) a la curva C en el punto P verifican la ecuación (21). Ahora bien, la ecuación (21) no depende de la curva C , luego (21) es verificada por las tangentes a todas las curvas de S en el punto singular P . Como (21) es una ecuación de segundo grado verificada por rectas que pasan por P , (21) es la ecuación de un cono de segundo orden con vértice en P , llamado *cono tangente a S en*

3. Superficies regladas.—Se llama *superficie reglada* a toda superficie tal que por cada uno de sus puntos pasa una recta totalmente contenida en ella. Sea

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1)$$

la ecuación de una curva contenida en la superficie reglada S que tenga un punto, y uno solo, común con cada una de las rectas de la superficie (esto puede siempre conseguirse tomando un trozo suficientemente pequeño de superficie). Sea $\mathbf{v}(u_1)$, $|\mathbf{v}(u_1)| = 1$ un vector unitario que tiene la dirección de la recta de S que pasa por el punto $\mathbf{x}(u_1)$. La ecuación de la superficie será (fig. 115):

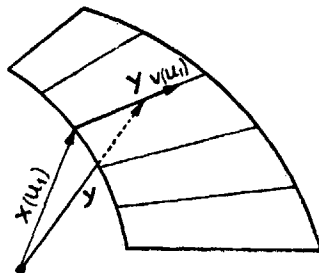


Fig. 115.

$$(2) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}(u_1) + u_2 \mathbf{v}(u_1).$$

De (2) se deduce que los vectores derivados respecto de u_1 y u_2 , que representaremos por $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$, respectivamente, y el vector normal, que representaremos por $\mathbf{y}_3$, son:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}'(u_1) + u_2 \mathbf{v}'(u_1), \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{v}(u_1), \\ \mathbf{y}_3 = \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{v}) + u_2 (\mathbf{v}' \times \mathbf{v})}{\mathbf{x}'^2 - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{v})^2 + 2u_2 (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{v}') + u_2^2 \mathbf{v}'^2} \end{cases}$$

De (3) se deduce que el plano tangente en el punto (u_1, u_2) tiene por ecuación:

$$(4) \quad \{\mathbf{X} - \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{v}\} + u_2 \{\mathbf{X} - \mathbf{y}, \mathbf{v}', \mathbf{v}\} = 0,$$

o bien, sustituyendo en lugar de $\mathbf{y}$ el segundo miembro de (2):

$$(5) \quad \{\mathbf{X} - \mathbf{x}(u_1), \mathbf{x}', \mathbf{v}\} + u_2 \{\mathbf{X} - \mathbf{x}(u_1), \mathbf{v}', \mathbf{v}\} = 0.$$

La expresión (5) del plano tangente expresa que todos los planos tangentes en los puntos de una generatriz rectilínea contienen a esta recta. Estos planos tangentes forman un haz cuando dos de ellos son distintos y coinciden todos ellos entre sí cuando coinciden dos de ellos. En el primer caso, la superficie se llama *alabeada*; en el segundo, *desarrollable*. Por con-

siguiente, la condición necesaria y suficiente para que una superficie reglada sea desarrollable es que:

$$(6) \quad (\mathbf{x}' \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}', \mathbf{v}', \mathbf{v}\} \mathbf{v} = 0.$$

Supongamos que la superficie (2) sea alabeada. En este caso, todos los planos de (5) cuando u_1 es constante y varía u_2 son distintos y forman un haz. Si a cada punto de la generatriz (2) (se supone ahora que en (2) es u_1 constante y u_2 variable), que viene determinado por la abscisa u_2 , se le hace corresponder su plano tangente (5), que viene determinado por la misma abscisa u_2 , se obtiene una correspondencia en la que el plano homólogo de un punto tiene la misma abscisa que éste. Esta correspondencia es, por tanto, una correspondencia lineal. Resulta así el siguiente:

TEOREMA DE CHASLES.—*La correspondencia que asocia a cada punto de una generatriz de una superficie reglada alabeada, su plano tangente es una correspondencia lineal.*

Sean dos generatrices:

$$(7) \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}(u_1) + u_2 \mathbf{v}(u_1), \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}(u_1 + d u_1) + u_2 \mathbf{v}(u_1 + d u_1),$$

de la superficie reglada (2). La perpendicular común a las dos rectas (7) tiene por ecuación

$$(8) \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}(u_1) + u_2 \mathbf{v}(u_1) + \lambda (\mathbf{v}(u_1) \times \mathbf{v}(u_1 + d u_1)),$$

en donde u_2 debe verificar la condición

$$(9) \quad \{\mathbf{x}(u_1) + u_2 \mathbf{v}(u_1) - \mathbf{x}(u_1 + d u_1), \quad \mathbf{v}(u_1) \times \mathbf{v}(u_1 + d u_1), \quad \mathbf{v}(u_1 + d u_1)\} = 0,$$

que expresa que la recta (8) es coplanaria con la segunda recta (7). Desarrollando en serie de Taylor todos los vectores de (9), se obtiene:

$$(10) \quad \{u_2 \mathbf{v}(u_1), \mathbf{v} \times \mathbf{v}', \mathbf{v}'\} - \{\mathbf{x}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}', \mathbf{v}\} d u_1^2 + [\dots] d u_1^3 = 0.$$

Cuando la segunda generatriz (7) tiende hacia la primera, el pie de la perpendicular común en la primera recta (7) se obtiene sustituyendo en su ecuación la variable u_2 por el número

$$(11) \quad u_2 = \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}')}{(\mathbf{v} \times \mathbf{v}')^2}.$$

Al lugar de todos los pies de las perpendiculares comunes a dos generatrices rectilíneas, cuando una de ellas tiende hacia la otra, se le llama *línea*

de *estricción* de la superficie reglada. Por consiguiente, la línea de *estricción* de la superficie reglada (2) es:

$$(12) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}(u_1) + \frac{(\mathbf{x}'(u_1) \times \mathbf{v}(u_1)) \cdot (\mathbf{v}(u_1) \times \mathbf{v}'(u_1))}{(\mathbf{v} \times \mathbf{v}')^2} \mathbf{v}(u_1) = \mathbf{x}(u_1) - \frac{\mathbf{v}'(u_1) \mathbf{x}'(u_1)}{\mathbf{v}'(u_1)^2} \mathbf{v}(u_1).$$

EJERCICIOS:

1.037. Hallar la línea de *estricción* del hiperboloide

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

1.038. Hallar la línea de *estricción* de la superficie desarrollable:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(u_1) + u_2 \mathbf{x}'(u_1).$$

1.039. Hallar la línea de *estricción* del helicoides:

$$\mathbf{y} = ((1 + \cos \alpha \cdot u_2) \cos u_1, (1 + \cos \alpha \cdot u_2) \sin u_1, \alpha u_1 + \sin \alpha \cdot u_2).$$

SUPERFICIES DESARROLLABLES.

Si la superficie es desarrollable, de (6) se deduce que

$$(13) \quad \mathbf{x}' \times \mathbf{v} = \rho (\mathbf{v}' \times \mathbf{v}),$$

de donde

$$(14) \quad \rho = \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}' \times \mathbf{v})}{(\mathbf{v}' \times \mathbf{v})^2} = \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}'}{\mathbf{v}'^2}.$$

Sustituyendo (14) en (13) resulta que para las superficies desarrollables es

$$(15) \quad (\mathbf{x}' \times \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}'}{\mathbf{v}'^2} (\mathbf{v}' \times \mathbf{v}) = 0.$$

La condición (6) de superficie desarrollable puede verificarse en los siguientes casos: a) $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$. b) $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$. c) $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$. En el caso a) será $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, siendo $\mathbf{a}$ un vector constante. En tal caso, la superficie (7) es una *superficie cónica*. b) $\mathbf{v} = \mathbf{a}$, siendo $\mathbf{a}$ un vector constante. En este caso es (7) una *superficie cilíndrica*. c) En este caso la línea de *estricción* de la superficie desarrollable existe y es distinta de un punto. Vamos a ver que

la superficie (7) coincide con la superficie tangencial formada por las tangentes a su línea de estricción. En efecto, para demostrar esto basta ver que (7) coincide con

$$(16) \quad \mathbf{z} = \mathbf{y}(u_1) + u_2 \mathbf{y}'(u_1) = \mathbf{x}(u_1) - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}'}{\mathbf{v}'^2} \mathbf{v} + u_2 \mathbf{y}'(u_1),$$

siendo $\mathbf{y}$ la función definida por (12). En virtud del tercer miembro de (16), esto equivale a probar que $\mathbf{y}'$ es paralelo a $\mathbf{v}$. Ahora bien, de (15) se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \times \mathbf{v} &= \left[\mathbf{x}' - \frac{\mathbf{v}'^2 (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}'') - 2 (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'') (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}')}{(\mathbf{v}'^2)^2} \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}'}{\mathbf{v}'^2} \mathbf{v}' \right] \times \mathbf{v} \\ &= \left[(\mathbf{x}' \times \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}'}{\mathbf{v}'^2} (\mathbf{v}' \times \mathbf{v}) \right] \times \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

A la línea de estricción de una superficie desarrollable se le llama *arista de retroceso de la misma*.

EJERCICIOS:

1.040. Demostrar que la curva intersección de una superficie desarrollable con un plano que corta a su arista de retroceso posee un punto de retroceso en el punto de intersección del plano con dicha arista.

1.041. Averiguar si es desarrollable la superficie $x_1 = -4u_1^3 - 12u_1^5 + 3u_2u_1^2$, $x_2 = \frac{1}{2} + 3u_1^2 + \frac{15}{2}u_1^4 - 3u_2u_1$, $x_3 = u_2$, y hallar su arista de retroceso.

1.042. Hallar la ecuación de la superficie reglada formada por todas las rectas paralelas al plano $x_3 = 0$ y que se apoyan en las circunferencias $x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_1 = 0$; $(x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 4$, $x_1 = 2$.

1.043. Hallar la ecuación de la superficie reglada formada por todas las rectas que se apoyan en la hélice $x_1 = \cos u_1$, $x_2 = \sin u_1$, $x_3 = u_1$, cortan al eje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y forman con él un ángulo constante α .

1.044. Hallar la ecuación de la superficie reglada formada por todas las rectas que cortan perpendicularmente al eje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y se apoyan en la circunferencia $x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 = 1$.

1.045. Hallar las líneas de estricción de las superficies de los ejercicios 1.042, 1.043 y 1.044.

1.046. Hallar la ecuación de la superficie cónica que proyecta la cúbica $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$ desde el punto $(1, 1, 1)$.

1.047. Hallar las ecuaciones de las superficies cilíndricas que proyectan la cúbica del ejercicio anterior paralelamente a los ejes de coordenadas.

1.048. Hallar las ecuaciones de las superficies cilíndricas que proyectan la hélice $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $x_3 = t$ paralelamente a los ejes de coordenadas.

4. Superficies de rotación y de traslación.

SUPERFICIES DE ROTACIÓN.—Se llama *superficie de rotación* a la superficie engendrada por una curva, llamada *generatriz*, al girar alrededor de un eje, llamado *eje de rotación de la superficie*. Sea

$$(1) \quad g: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t); \quad x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t),$$

la ecuación vectorial de la generatriz, y sea

$$(2) \quad e: \quad \mathbf{y} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$$

la ecuación del eje. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ el vector de posición de un punto genérico de la superficie de rotación. El punto $\mathbf{X}$ proviene del giro del punto $\mathbf{x}(t)$ alrededor del eje, luego se verificará que el vector $\mathbf{X} - \mathbf{x}(t)$ será perpendicular al eje:

$$(3) \quad (\mathbf{X} - \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{b} = 0,$$

y que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{x}(t)$ equidistan del eje. Llamando $\mathbf{y}$ al vector de posición del punto de intersección con el eje del plano normal al eje trazado por $\mathbf{X}$, será:

$$(4) \quad \mathbf{y} = \mathbf{a} + \rho \mathbf{b}, \quad (\mathbf{y} - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

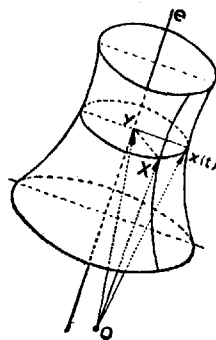


Fig. 116.

Tomando el vector $\mathbf{b}$ unitario ($\mathbf{b}^2 = 1$), de (4) se deduce que

$$\rho = (\mathbf{X} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{a} + [(\mathbf{X} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}] \mathbf{b} = \mathbf{a} + [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}] \mathbf{b}.$$

La condición de equidistancia de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{x}(t)$ al eje proporciona

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X})^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{x}(t))^2,$$

de donde, teniendo en cuenta (3), se obtienen las siguientes ecuaciones de la superficie de rotación:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{X}^2 - \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{x}(t)) = 0, \\ (\mathbf{X} - \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

En particular, si e es el eje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, las ecuaciones (5) se reducen a las siguientes:

$$(6) \quad \begin{cases} X_1^2 + X_2^2 = x_1^2(t) + x_2^2(t), \\ X_3 = x_3(t). \end{cases}$$

Eliminando t entre las (5) (o entre las (6)) se obtiene la ecuación no paramétrica de la superficie de rotación. Las ecuaciones (6) se pueden escribir también en forma paramétrica del siguiente modo:

$$(7) \quad \begin{cases} X_1 = \sqrt{x_1^2(u_1) + x_2^2(u_1)} \cos u_2, \\ X_2 = \sqrt{x_1^2(u_1) + x_2^2(u_1)} \sin u_2, \\ X_3 = x_3(u_1). \end{cases}$$

EJERCICIOS:

1.049. Hallar la ecuación del toro engendrado al girar la circunferencia $(x_2 - a)^2 + x_3^2 = r^2$, $x_1 = 0$ alrededor del eje x_3 .

1.050. Hallar la ecuación de la superficie de rotación obtenida al girar la recta $x_1 = a_1 + b_1 t$, $x_2 = a_2 + b_2 t$, $x_3 = a_3 + b_3 t$, alrededor del eje x_3 .

SUPERFICIES DE TRASLACIÓN.—Dada una curva:

$$(8) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1)$$

llamada *directriz*, y otra curva

$$(9) \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(u_2),$$

llamada *generatriz*, con un punto común $\mathbf{a}$:

$$(10) \quad \mathbf{a} = \mathbf{x}(u_1^0) = \mathbf{y}(u_2^0),$$

se llama superficie de traslación de directriz (8) y generatriz (9) a la superficie engendrada por la generatriz al moverse paralelamente a sí misma cuando el punto $\mathbf{a}$ describe la directriz. Si $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ es un punto de la superficie de traslación que procede del punto $\mathbf{x}(u_1)$ y está situado en la generatriz que pasa por el punto $\mathbf{y}(u_2)$, se verificará que

$$\mathbf{X} - \mathbf{x}(u_1) = \mathbf{y}(u_2) - \mathbf{a}.$$

de donde

$$(11) \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}(u_1) + y(u_2) - \mathbf{a}$$

es la ecuación de la superficie de traslación.

EJERCICIOS:

1.051. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica engendrada por la elipse $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $x_3 = 0$ al trasladarse paralelamente a sí misma a lo largo de la recta $\frac{x_1 - a}{\lambda} = \frac{x_2}{\mu} = \frac{x_3}{\nu}$.

1.052. Hallar la ecuación del paraboloides engendrado por la parábola $x_3 = b x_2^2$, $x_1 = 0$ al trasladarse paralelamente a sí misma a lo largo de la parábola $x_3 = a x_1^2$, $x_2 = 0$.

CAPITULO NOVENO

INTEGRACION

§ 1 INTEGRALES INDEFINIDAS

1. Extensión del concepto de diferencial. Integral indefinida.—En el capítulo sexto se ha estudiado el concepto de diferencial de una función de una variable real. Dada la función $f(x)$, su diferencial era $f'(x) dx$. Hemos visto que se podía tomar como imagen geométrica de la diferencial $dy = f'(x) dx$ el conjunto de todas las tangentes a la curva $y = f(x)$. Esta interpretación geométrica puede modificarse del siguiente modo: dada la diferencial $f'(x) dx$ consideremos como imagen geométrica de la misma el conjunto d formado por todas las rectas del plano, tales que por cada

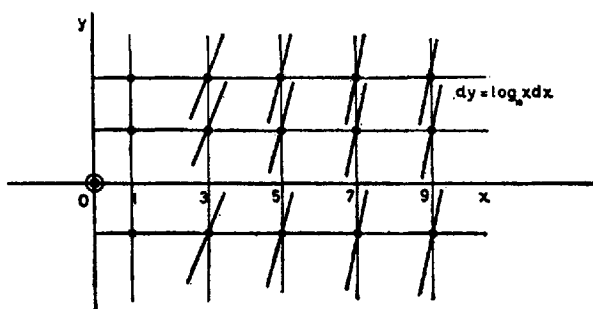


Fig. 117.

punto (x, y) del plano pasa una recta del conjunto d cuya pendiente es $f'(x)$ (si f' no existe en el punto x al punto (x, y) , no le corresponde ninguna recta). Esto permite generalizar inmediatamente el concepto de diferencial. Si $f(x)$ es una función arbitraria de variable real, podemos considerar el conjunto d de todas las rectas del plano, tales que por cada punto del plano, de coordenadas (x, y) , pasa una recta cuya pendiente sea $f'(x)$,

cuando $f(x)$ está definida en x , y ninguna en caso contrario. Al conjunto de todas estas rectas se le llama diferencial, y se representa por $f(x) dx$. Admitimos, por consiguiente, la siguiente:

DEFINICIÓN G.—Dada la función $f(x)$ de una variable real x , se llama diferencial a la expresión $f(x) dx$. La imagen geométrica de estas diferenciales está formada por el conjunto d de las rectas del plano, tal que por cada punto (x, y) del plano pasa una recta de d , cuya pendiente es $f(x)$, cuando f está definida en el punto x , y ninguna recta en caso contrario.

Evidentemente, las diferenciales en el sentido del capítulo sexto lo son también según la definición G, cuando la función $f(x)$ es la derivada de otra función: $f(x) = F'(x)$. Se presenta, por tanto, la pregunta recíproca:

CUESTIÓN.—¿Toda diferencial según la definición G es una diferencial en el sentido del capítulo sexto?

Si la diferencial $g(x) dx$, según la definición G, es una diferencial en el sentido del capítulo sexto, se verificará que existirá una función $f(x)$ tal que $f'(x) = g(x)$.

DEFINICIÓN 1.—Dada la diferencial $g(x) dx$, según la definición G, a toda función $f(x)$ que verifique la relación $f'(x) = g(x)$, se le llama *función primitiva de la diferencial $g(x) dx$, o de la función $g(x)$* .

Empleando la interpretación gráfica de la diferencial $g(x) dx$, resulta que si $f(x)$ es una primitiva de $g(x) dx$, se verificará que la curva $y = f(x)$ será tangente en cada uno de sus puntos a una recta del conjunto de rectas d correspondientes a la diferencial $g(x) dx$. Recíprocamente, si se cumple esta condición $f(x)$ será primitiva de $g(x) dx$. Por consiguiente, si $f(x)$ es primitiva de $g(x) dx$, todas las curvas que se obtienen por traslación, paralela al eje y , de la curva $y = f(x)$ serán tangentes a las rectas del conjunto d correspondiente a $g(x) dx$, y, según acabamos de ver, serán también primitivas de $g(x) dx$. Hemos obtenido el siguiente resultado: Si $g(x) dx$ posee una primitiva, posee infinitas. Esto se puede obtener también inmediatamente por medio del cálculo. En efecto, si $f(x)$ es primitiva de $g(x) dx$ se verifica que $f'(x) = g(x)$, de donde resulta que $[f(x) + c]' = f'(x) = g(x)$, luego todas las curvas $y = f(x) + c$, siendo c una constante arbitraria, son también primitivas.

TEOREMA 1.—Si $f(x)$ es una primitiva de la diferencial $g(x) dx$, siendo $g(x)$ una función definida en un intervalo (a, b) , todas las funciones $f(x) + c$, en donde c recorre el cuerpo real, son también funciones primitivas y son las únicas funciones primitivas de $g(x) dx$.

DEMOSTRACIÓN.—La primera parte del teorema se acaba de demostrar. Sean $f(x)$ y $h(x)$ dos funciones primitivas de $g(x) dx$. Esto significa que $f'(x) dx = g(x) dx$ y $h'(x) dx = g(x) dx$, de donde $f'(x) = h'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Sea x_0 un punto cualquiera de (a, b) y x un punto variable sobre (a, b) . Por el teorema del valor medio, resulta:

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= f(x_0) - h(x_0) + (x - x_0) [f'(x_0 + \theta(x - x_0)) - h'(x_0 + \theta(x - x_0))] \\ &= f(x_0) - h(x_0) = c, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.—Al conjunto de todas las primitivas de una diferencial $g(x) dx$ se le llama *integral indefinida* de la diferencial, y se representa por

$$\int g(x) dx.$$

De esta definición y del teorema anterior, resulta que si $f(x)$ es una primitiva de $g(x) dx$ y c representa una variable sobre el cuerpo real, llamada *constante de integración*, se verifica que

$$(1) \quad \int g(x) dx = f(x) + c.$$

Antes de ocuparnos del problema fundamental que hemos enunciado arriba, vamos a tratar de calcular algunas integrales indefinidas de algunos tipos particulares de diferenciales.

2. Integrales inmediatas.—De $df(x) = f'(x) dx$ se deduce, en virtud de la definición 1, que

$$\int f'(x) dx = f(x) + c,$$

es decir:

$$I. \quad \int df(x) = f(x) + c.$$

Recíprocamente, de (1) se deduce, diferenciando:

$$II. \quad d \int g(x) dx = g(x) dx.$$

De aquí resulta que el cuadro de las diferenciales de las funciones elementales de una variable real, proporciona el siguiente cuadro de integrales, llamadas *integrales inmediatas*:

- | | |
|--|---|
| 1. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$ | 2. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ |
| 3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$ | 4. $\int e^x dx = e^x + c$ |
| 5. $\int a^x dx = \log_a e \cdot a^x + c$ | 6. $\int \frac{dx}{x} = \log x + c$ |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | 8. $\int \cos x dx = \sin x + c$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ | 10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cot} x + c$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\pm \sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + c$ | 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + c$ |
| 13. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$ | 14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$ |
| 15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tgh} x + c$ | 16. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + c$ |
| 17. $\int \frac{dx}{\pm \sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arg} \operatorname{sh} x + c$ | 18. $\int \frac{dx}{\pm \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arg} \operatorname{ch} x + c$ |
| 19. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arg} \operatorname{tgh} x + c$ | 20. $\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arg} \operatorname{coth} x + c$ |

3. Integración por descomposición y cambio de variable.

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN.—La fórmula (2) de 2 permite integrar polinomios cuando se conocen las integrales de cada uno de los términos. En particular, permite la integración de polinomios de una variable:

$$(2) \quad \int [a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n] dx = c + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n} a_n x^{n+1}.$$

EJERCICIOS:

1.053. Calcular las integrales indefinidas de las siguientes diferenciales:

- a) $3x^5 dx$. b) $\sqrt{2x} dx$. c) $\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$. d) $\frac{dx}{x^2-9}$. e) $\frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x^3}} dx$.
- f) $\operatorname{tg}^2 x dx$. g) $\frac{2dx}{x-3}$. h) $\frac{4x+5}{7x+2} dx$. i) $\frac{4x dx}{(5x+1)^2}$. j) $\frac{x dx}{3x^2-1}$.
- k) $\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$. l) $\operatorname{tg} x dx$. m) $\frac{3^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$. n) $\frac{6x-10 \cos x \operatorname{sen} x}{3x^2+5 \cos^2 x} dx$.
- p) $\frac{3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x} dx$.

- 1.054. Calcular: a) $\int \operatorname{sen} n x \cdot \operatorname{sen} m x \, dx$, b) $\int \operatorname{sen} n x \cos m x \, dx$,
 c) $\int \cos n x \cdot \cos m x \, dx$, d) $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$, e) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$, f) $\int \cos^2 x \, dx$.

INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE.—Es el método más general y más útil. La elección del cambio de variable conveniente es fruto de la práctica. Sea la integral $\int f(x) \, dx$ y sea t una nueva variable ligada con la primera mediante la relación $x = \varphi(t)$, de donde $dx = \varphi'(t) \, dt$. Sustituyendo en la integral dada, resulta:

$$(3) \quad \int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt,$$

que es la fórmula general del cambio de variable. Mediante ella se pueden integrar inmediatamente las siguientes funciones:

$$(4) \quad \int \varphi(x)^n \varphi'(x) \, dx = \int t^n \, dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + c = \frac{1}{n+1} \varphi(x)^{n+1} + c.$$

$$(5) \quad \int a^{\varphi(x)} \varphi'(x) \, dx = \int a^t \, dt = \log_a e \cdot a^t + c = \log_a e \cdot a^{\varphi(x)} + c.$$

$$(6) \quad \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log |\varphi(x)| + c$$

$$(7) \quad \int \operatorname{sen} \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int \operatorname{sen} t \, dt = -\cos t + c = -\cos \varphi(x) + c.$$

$$(8) \quad \int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} \, dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + c = \operatorname{tg} \varphi(x) + c.$$

$$(9) \quad \int \frac{\varphi'(x) \, dx}{\pm \sqrt{1 - \varphi^2(x)}} = \int \frac{dt}{\pm \sqrt{1 - t^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + c = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \varphi(x) + c.$$

$$(10) \quad \int \frac{\varphi'(x) \, dx}{1 + \varphi^2(x)} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + c = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi(x) + c.$$

$$(11) \quad \int \frac{\varphi'(x) \, dx}{\pm \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} = \int \frac{dt}{\pm \sqrt{1 + t^2}} = \operatorname{arg} \operatorname{sh} t + c = \operatorname{arg} \operatorname{sh} \varphi(x) + c.$$

$$(12) \quad \int \frac{\varphi'(x) \, dx}{1 - \varphi^2(x)} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \operatorname{arg} \operatorname{tgh} t + c = \operatorname{arg} \operatorname{tgh} \varphi(x) + c.$$

EJERCICIOS:

1.055. Integrar, por cambio de variables, las siguientes diferenciales:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-1}}, \quad \text{b) } \frac{dx}{e^x+2}, \quad \text{c) } \frac{x \, dx}{\sqrt{3x+1}}, \\ & \text{d) } \frac{a+x}{a+\sqrt{x}} \, dx, \quad \text{e) } \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}, \quad \text{f) } \frac{(1-x) \, dx}{\sqrt{x}}, \quad \text{g) } \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

1.056. Calcular las integrales de las siguientes diferenciales:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad \operatorname{sen}^n x \cos x \, dx. & \text{b)} \quad a^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}. & \text{c)} \quad \operatorname{tg} x \, dx. & \text{d)} \quad \operatorname{sen} \log x \frac{dx}{x}. \\ \text{e)} \quad \frac{dx}{2 \sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}. & \text{f)} \quad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. & \text{g)} \quad \frac{x \, dx}{1+ax^2}. \\ \text{h)} \quad \frac{\cos x \, dx}{\pm \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}. & \text{i)} \quad \frac{dx}{\cos x}. \end{array}$$

4. Integración por partes.—De la fórmula de la diferencial de un producto de dos funciones $u(x) \cdot v(x)$ se deduce, integrando miembro a miembro:

$$(13) \quad \int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

que es la fórmula de integración por partes que permite calcular un gran número de integrales.

APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.—I. $I_n = \int x^n e^x \, dx$, siendo n un número natural. Poniendo $u = x^n$, $dv = e^x \, dx$, se obtiene $I_n = e^x x^n - n \int x^{n-1} e^x \, dx = e^x x^n - n I_{n-1}$. Fórmula recurrente de la que se deduce:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_n = e^x [x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \dots \\ \quad + (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 2x + (-1)^n n!] + c. \end{array} \right.$$

II. $I_n = \int x^n \operatorname{sen} x \, dx$, siendo n un número natural. $u = x^n$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$,

$$I_n = -x^n \cos x + n \int \cos x \cdot x^{n-1} \, dx.$$

Integrando nuevamente por partes la última integral: $u = x^{n-1}$, $dv = \cos x \, dx$, se obtiene:

$$I_n = -x^n \cos x + n x^{n-1} \operatorname{sen} x - n(n-1) I_{n-2},$$

fórmula recurrente que permite calcular I_n :

$$\begin{aligned} I_n = \cos x [-x^n + n(n-1) x^{n-2} - n(n-1)(n-2) x^{n-4} + \dots \pm n! (\pm n! x)] \\ + \operatorname{sen} x [n x^{n-1} - n(n-1) x^{n-3} + \dots \mp n! x (\mp n!)] + c. \end{aligned}$$

en donde el último término escrito en cada paréntesis rectangular corresponde al caso de n par y los encerrados en paréntesis curvos son los últimos términos en el caso de ser n impar.

De un modo totalmente análogo, se obtiene

$$\text{III. } \left\{ \begin{aligned} I_n &= \int x^n \cos x \, dx = \sin x [x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + \\ &+ \dots \pm n! x (\pm n!)] + \cos x [n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &+ n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \dots \mp n! (\mp n! x)] + c. \end{aligned} \right.$$

en donde los términos encerrados entre paréntesis curvos al final de cada paréntesis rectangular deben de sustituir a los últimos términos cuando n es par.

$$\text{IV. } I_m = \int e^x \sin^m x \, dx = \frac{e^x}{m^2 + 1} [\sin^m x - m \sin^{m-1} x \cos x] + \frac{m(m-1)}{m^2 + 1} I_{m-2},$$

fórmula recurrente que permite calcular I_m .

$$\text{V. } I_m = \int e^x \cos^m x \, dx = \frac{e^x}{m^2 + 1} [\cos^m x + m \cos^{m-1} x \sin x] + \frac{m(m-1)}{m^2 + 1} I_{m-2}.$$

$$\text{VI. } \left\{ \begin{aligned} I_{m,n} &= \int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{1}{m+n} \cos^{n+1} x \sin^{m-1} x \\ &+ \frac{m-1}{(m+n)^2} \cos^{n-1} x \sin^{m-1} x + \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n)^2} I_{m-2, n-2}. \end{aligned} \right.$$

EJERCICIOS:

- 1.057. Integrar por partes las siguientes diferenciales: a) $\log x \, dx$. b) $x e^x \, dx$. c) $x \sin x \, dx$. d) $\arcsen x \, dx$. e) $\arctg x \, dx$. f) $x \log x \, dx$. g) $\log(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$. h) $\cos^3 x \, dx$. i) $\sin^4 x \, dx$. j) $\cotg^2 x \, dx$. k) $\sin 3x \cos 5x \, dx$.

1.058. Aplicar VI en los casos en que $m = 0$ y $n = 0$, respectivamente.

1.059. Calcular:

$$I_n = \int x^n \operatorname{sh} x \, dx. \quad I_n = \int x^n \operatorname{ch} x \, dx. \quad I_n = \int e^x \operatorname{sh}^n x \, dx. \quad I_n = \int e^x \operatorname{ch}^n x \, dx.$$

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x \, dx.$$

Todas las fórmulas anteriores son un caso particular de la siguiente fórmula general: sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones de clase $n+1$. La aplicación sucesiva de la fórmula de integración por partes proporciona

$$\left\{ \begin{aligned} \int u(x) v^{(n+1)}(x) \, dx &= u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} + \dots \\ &+ (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v \, dx. \end{aligned} \right.$$

5. Integración de funciones racionales.—Hemos visto (9, 3, § 5, cap. I) que toda función racional es combinación lineal de fracciones simples. Por consiguiente, la integración de las funciones racionales se reduce a la de las fracciones simples.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \log |x-a| + c.$$

$$\text{II } \int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + c \quad (\alpha \neq 1).$$

$$\text{III. } \left\{ \begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x-m)^2+n^2} dx &= M \int \frac{y dy}{y^2+n^2} + (Mm+N) \int \frac{dy}{y^2+n^2} \\ &= \frac{M}{2} \log(y^2+n^2) + \frac{Mm+N}{n} \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{M}{2} \log[(x-m)^2+n^2] \\ &\quad + \frac{Mm+N}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x-m}{n} \right) + c. \end{aligned} \right.$$

$$\text{IV. } \left\{ \begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{[(x-m)^2+n^2]^\rho} dx &= \frac{M}{2(1-\rho)[(x-m)^2+n^2]^{\rho-1}} \\ &\quad + \frac{Mm+N}{n^{2\rho-1}} \int \frac{dz}{(z^2+1)^\rho} \end{aligned} \right.$$

en donde $z = \frac{x-m}{n}$. Para calcular la última integral, que llamaremos I_ρ , se procede del siguiente modo: sumando y restando al numerador del integrando z^2 , resulta:

$$\begin{aligned} I_\rho &= I_{\rho-1} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^\rho} = I_{\rho-1} - \left[\frac{z}{2(1-\rho)(z^2+1)^{\rho-1}} - \int \frac{dz}{2(1-\rho)(z^2+1)^{\rho-1}} \right] \\ &= \frac{z}{2(\rho-1)(z^2+1)^{\rho-1}} + \frac{2\rho-1}{2\rho-2} I_{\rho-1}, \end{aligned}$$

fórmula recurrente que resuelve el cálculo de la integral.

Toda la dificultad de la integración de las funciones racionales radica en la solución de la ecuación que se obtiene anulando el denominador, y esta dificultad aumenta con el grado; por ello es conveniente proceder del siguiente modo: sea la función racional $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (en donde suponemos ya que grado $(P(x)) <$ grado $(Q(x))$). Se comienza por buscar el polinomio que posee las mismas raíces que Q , pero siendo todas ellas simples. Para ello basta

dividir $Q(x)$ por $M(x) = \text{m. c. d. } (Q(x), Q'(x)) : Q(x) = M(x) q(x)$. Se pueden hallar dos polinomios $H(x)$ y $K(x)$ tales que se verifique la relación

$$(15) \quad \int R(x) dx = \frac{H(x)}{M(x)} + \int \frac{K(x)}{q(x)} dx.$$

En efecto, derivando en (15) y multiplicando por $Q(x)$, resulta:

$$(16) \quad P(x) = q(x) H'(x) - H(x) G(x) + K(x) M(x);$$

en donde $G(x) = \frac{q(x) M'(x)}{M(x)}$ es un polinomio, puesto que $Q'(x) = M'(x) q(x) + M(x) q'(x)$, lo que dice que $M(x)$ divide a $M'(x) q(x)$, ya que, por hipótesis, divide a $Q'(x)$ y también divide al último término de la última igualdad. Siempre se puede suponer que los grados de $H(x)$ y $K(x)$ sean inferiores a $\text{grad}(Q) - \text{grad}(q)$, con lo que la identidad (16) permite calcular $H(x)$ y $K(x)$ por el método de los coeficientes indeterminados.

Como todas las raíces de $q(x)$ son simples, en la descomposición de $\frac{K(x)}{q(x)}$ en fracciones simples únicamente se presentarán las correspondientes a I y III de las integrales anteriores.

De todo lo que precede resulta que: *la condición necesaria y suficiente para que la integral de una función racional sea otra función racional es que $K(x) = 0$.*

Para el cálculo de las constantes de los numeradores de la descomposición en fracciones simples de $\frac{K(x)}{q(x)}$ puede procederse del siguiente modo:

$$K(x) = \sum \frac{A_i q(x)}{x - a_i}, \quad \text{de donde:} \quad K(a_i) = A_i q'(a_i),$$

lo que permite calcular todas las A_i :

$$(17) \quad A_i = \frac{K(a_i)}{q'(a_i)}.$$

Si $a_j = m_j + i n_j$ y $a_l = m_j - i n_j$, la fórmula (17) prueba que A_j y A_l son también conjugados, por lo que

$$\frac{A_j}{x - (m_j + i n_j)} + \frac{A_l}{x - (m_j - i n_j)} = \frac{(A_j + A_l)x - m_j(A_j + A_l) + i n_j(A_j - A_l)}{(x - m_j)^2 + n_j^2}$$

y

$$M = A_j + A_l \quad \text{y} \quad N = -m_j(A_j + A_l) + i n_j(A_j - A_l)$$

son números reales.

EJERCICIOS:

1.060. Integrar las siguientes diferenciales racionales:

$$a) \frac{2x^2 - 3x + 5}{2x + 3} dx. \quad b) \frac{5x - 1}{x^2 - 7x + 12} dx. \quad c) \frac{x^5 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx.$$

1.061. Integrar las siguientes diferenciales racionales:

$$a) \frac{x^3 - 2x + 4}{(x-1)^2} dx. \quad b) \frac{2x + 5}{x^2 + x + 1} dx. \quad c) \frac{x^5 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

6. Racionalización de funciones.—Algunas funciones no racionales se pueden integrar transformándolas en racionales mediante un cambio conveniente de variable.

I. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, siendo R una función racional. El cambio de variable conveniente se puede obtener del siguiente modo: pongamos $y = \sin x$, $z = \cos x$. Estas dos ecuaciones representan una circunferencia del plano (y, z) . Consideremos el haz de rectas cuyo vértice es un punto cualquiera de esta circunferencia, por ejemplo el haz $(z-1) + ty = 0$, cuyo vértice es $(0, 1)$. El segundo punto de intersección de estas rectas con la circunferencia viene dado por $\cos x - 1 + t \sin x = 0$, o bien,

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - 1 + 2t \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

de donde

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t,$$

llevando este valor de x a la ecuación de la circunferencia se obtienen las coordenadas del punto de intersección de la recta con ella. Vamos a ver que el parámetro $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ racionaliza la integral considerada. En efecto:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

con lo que resulta

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

EJERCICIOS:

1.062. Integrar, racionalizando, las siguientes diferenciales:

$$\text{a) } \frac{dx}{1 + 7 \sin x} \quad \text{b) } \frac{dx}{\sin x + \cos x} \quad \text{c) } \frac{dx}{2 + \cos 3x}.$$

El tipo I es un caso particular del siguiente tipo general:

II. CURVAS UNICURSALES.— $\int R(x, y) dx$, en donde R es una función racional de x e y , y entre estas variables existe una relación algebraica $f(x, y) = 0$, es decir, f es un polinomio en x, y .

Sea n el grado del polinomio f , llamado *orden* de la curva $f(x, y) = 0$. Se llama *género* de esta curva, y se acostumbra a representar por p , al número $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, en donde d es el número de puntos dobles, conviniéndose en contar cada punto r -ple como $\frac{r(r-1)}{2}$ puntos dobles. Pues bien, si la curva $f(x, y) = 0$ es de género cero, también llamada *unicursal* o *racional*, se puede convertir la integral anterior en otra racional, eligiendo convenientemente una nueva variable independiente. En efecto, supongamos que todos los puntos múltiples de la curva C de ecuación $f(x, y) = 0$ sean dobles. Por los $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles de C más otros $n-3$ puntos simples de la misma curva pasa un haz lineal de curvas de orden $n-2$, ya que la ecuación de un polinomio completo con dos variables de grado $n-2$ posee $\binom{n}{2}$ coeficientes, luego para determinar una de tales curvas es necesario dar $\binom{n}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ puntos independientes. Como

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n+1)(n-2)}{2} - 1,$$

resulta que por los puntos dobles de C más los otros $n-3$ puntos simples pasa un haz lineal de curvas de orden $n-2$. Como el número de puntos de intersección de una curva de orden n con otra de orden $n-2$ es igual a $n(n-2)$ y los puntos dobles de C hay que contarlos cada uno de ellos dos veces, resulta que además de los puntos dobles de C y los $n-3$ puntos simples, cada curva del haz tiene común con C , $n(n-2) - [(n-1) \cdot (n-2) + n - 3] = 1$, y esto permitirá expresar las coordenadas de este punto en función racional del parámetro del haz.

III. Un caso particular de II es el siguiente:

$$I = \int R(x, y) dx, \quad f(x, y) = a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{12}xy + a_{11}x^2 + a_{22}y^2.$$

En este caso, el haz de curvas que conviene emplear es un haz de rectas cuyo vértice sea un punto cualquiera (ξ, η) de la cónica. Escribiendo la ecuación de ésta en forma matricial $\mathbf{x} A \mathbf{x}' = 0$, $A = A'$, $\mathbf{x} = (1, x, y)$ y poniendo $\mathbf{p} = (1, \xi, \eta)$, se verificará $\mathbf{p} A \mathbf{p}' = 0$. El haz de rectas de vértice $\mathbf{p}$ se podrá escribir en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \rho(0, 1, t)$, en donde t es el parámetro del haz. La intersección, distinta del punto $\mathbf{p}$, de la recta general de este haz con la cónica, se obtiene resolviendo el sistema

$$\mathbf{x} A \mathbf{x}' = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + \rho \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = (0, 1, t).$$

Resultando:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} - 2 \frac{\mathbf{p} A \mathbf{t}'}{\mathbf{t} A \mathbf{t}'} \mathbf{t};$$

y llevando estos valores a I:

$$I = -2 \int R \left(\xi - 2 \frac{\mathbf{p} A \mathbf{t}'}{\mathbf{t} A \mathbf{t}'} \xi, \eta - 2 \frac{\mathbf{p} A \mathbf{t}'}{\mathbf{t} A \mathbf{t}'} \eta \right) \frac{[\mathbf{t} A \mathbf{t}'] \left[\mathbf{p} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 [\mathbf{p} A \mathbf{t}'] \left[\mathbf{t} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}{[\mathbf{t} A \mathbf{t}']^2} dt$$

EJERCICIOS:

1.063. Calcular $\int \sqrt{a + bx + cx^2} dx$.

1.064. Calcular $\int \sqrt{x^3 + 2x^2} dx$

1.065. Calcular $\int \sqrt[3]{x^4 + 8x^3} dx$.

IV. DIFERENCIALES BINOMIAS.—Se llaman así a las siguientes diferenciales:

$$(18) \quad x^m (ax^n + b)^p dx,$$

en donde m , n y p son números racionales. Si p es entero, estas diferenciales se racionalizan inmediatamente sin más que efectuar el cambio de variable $x = t^d$, siendo d el m. c. m. de los denominadores de m y n . Por otra parte, efectuando el cambio de variable $ax^n + b = t$, resulta:

$$(19) \quad x^m (ax^n + b)^p dx = \frac{1}{na} t^p \left(\frac{1}{a} t - \frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n} - 1} dt$$

que tiene la misma estructura que (18), luego también se podrá racionalizar cuando sea $\frac{m+1}{n}$ un número entero. Como además se puede escribir:

$$(20) \quad x^m (a x^n + b)^p = x^{m+np} (a + b x^{-n})^p dx,$$

también se podrá racionalizar cuando $\frac{m+n p+1}{n}$ sea entero. Resumiendo: *las diferenciales binomias (18) se pueden racionalizar cuando uno de los tres números p , $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ sea entero.*

EJERCICIO:

1.066. Integrar las diferenciales binomias:

$$a) \sqrt{x^3} (2\sqrt[3]{x} + 5)^2 dx. \quad b) \sqrt{x} \sqrt[5]{5\sqrt{x^3} + 1} dx.$$

Para contestar al problema planteado al principio de este párrafo, necesitamos introducir el concepto de integral desde otro punto de vista, y esto lo haremos en el párrafo siguiente.

§ 2. INTEGRAL DE RIEMANN

1. Integrales de Darboux.

1. HIPÓTESIS, DEFINICIONES Y NOTACIONES.— $f(x)$ es una función real uniforme y acotada de la variable real x definida en el segmento $[a, b]$. Un conjunto finito de puntos $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ se llama una *partición* del segmento $[a, b]$. Diremos que la *partición*

$$P' = \{a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m = b\}$$

sigue a la partición P , y escribiremos $P' \gg P$ cuando todo punto x_i de P figure entre los puntos x'_i de P' . Se llama *diámetro de una partición P* , $d(P)$, a

$$d(P) = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Diremos que la *partición P' sigue a P* , y escribiremos $P < P'$ cuando $d(P') \leq d(P)$. Llamaremos $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones del segmento $[a, b]$.

1. *El conjunto de las particiones $\mathcal{P}$ con la relación $\geq$ es un conjunto filtrante* (def. 28, 5, § 2, cap. I). En efecto: a) Para todo P se verifica $P \geq P$. b) Si $P \geq P'$ y $P' \geq P''$ se verifica que $P \geq P''$. c) Si P y P' son dos particiones cualesquiera y llamamos P'' a la partición que se obtiene al tomar todos los puntos de división de P y de P' (cada uno de ellos una sola vez) se verifica que $P'' \geq P$ y $P'' \geq P'$.

2. *El conjunto de las particiones $\mathcal{P}$ con la relación $<$ es un conjunto filtrante* (l. c.). En efecto: a) Para todo P se verifica $P < P$. b) Si $P < P'$ y $P' < P''$, será $d(P') \leq d(P)$, $d(P'') \leq d(P')$, de donde $d(P'') \leq d(P)$ y $P < P''$. c) Si P y P' son dos particiones cualesquiera y $\min\{d(P), d(P')\} = d(P)$, será $P < P$ y $P < P'$.

3. *Sumas de Darboux.*—Las sumas de Darboux son dos aplicaciones, que representaremos por S_D y s_D , del conjunto filtrante $\mathcal{P}$ en el espacio topológico de los números reales, definidas del siguiente modo:

$$(1) \quad \begin{cases} S_D(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i, & \text{siendo } M_i = \text{ext sup } \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ s_D(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i, & \text{siendo } m_i = \text{ext inf } \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}. \end{cases}$$

(Por ser f acotada en el segmento $[a, b]$, se verifica que existe un número positivo M tal que $|f(x)| < M$ para todo x de $[a, b]$. Por consiguiente, si x recorre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, será también $|f(x)| < M$. Cuando x recorre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, todos los números $f(x)$ están comprendidos entre $-M$ y M ; luego, existen dos números M_i y m_i tales que para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$ se verifica que $m_i \leq f(x) \leq M_i$ y además que en todo entorno de m_i y en todo entorno de M_i existe algún $f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$. M_i es el extremo superior de $f(x)$ cuando $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, y m_i el extremo inferior.)

4. *Propiedades de las sumas de Darboux.*—a) $s_D(P) \leq S_D(P)$. Ya que $m_i \leq M_i$ y $x_i - x_{i-1} > 0$. b) $P \geq P' \implies S_D(P) \leq S_D(P')$ y $s_D(P) \geq s_D(P')$. Puesto que $P \geq P'$ implica que $P = P'$, en cuyo caso las relaciones son evidentes, o que existe un punto x_i de división de P que no pertenecen a P' y será $x'_j < x_i < x'_{j+1}$, y el extremo superior de la función en un subintervalo es menor o igual al extremo superior de la función en el intervalo, y el extremo inferior en el subintervalo es mayor o igual al extremo inferior en el intervalo. c) Si P y P' son dos particiones arbitrarias se verifica $s_D(P) \leq S_D(P')$. En efecto, si $P'' \geq P$ y $P'' \geq P'$ será $s_D(P) \leq s_D(P'') \leq S_D(P'') \leq S_D(P')$. d) Existe $\text{ext. inf. } \{S_D(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$, ya que todas las $S_D(P)$ están acotadas inferiormente por cualquier $s_D(P)$. e) Existe extremo sup. $\{s_D(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$, por análoga razón.

DEFINICIÓN 1.—Se llama *integral superior de Darboux* de la función $f(x)$ extendida al segmento $[a, b]$, al siguiente número:

$$(2) \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = \text{ext inf} \{ S_D(P) \mid P \in \mathcal{P} \}.$$

Análogamente, se llama *integral inferior de Darboux* de la función $f(x)$ extendida al segmento $[a, b]$, al número

$$(3) \quad \underline{\int_a^b f(x) dx} = \text{ext sup} \{ s_D(P) \mid P \in \mathcal{P} \}.$$

Si la integral superior es igual a la inferior, al valor común a ambas se le llama *integral de Darboux extendida* de a a b , y se escribe

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}.$$

En este caso se dice que $f(x)$ es *integrable, según Darboux*, en el segmento $[a, b]$.

EJERCICIOS:

1.067. Demostrar que si $a < b < c$, se verifica:

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} + \overline{\int_b^c f(x) dx} = \overline{\int_a^c f(x) dx},$$

y análoga relación para las integrales inferiores.

1.068. Demostrar que si f y g son funciones acotadas, en $[a, b]$ se verifica que

$$\overline{\int_a^b (f+g) dx} \leq \overline{\int_a^b f dx} + \overline{\int_a^b g dx} \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b (f+g) dx} \geq \underline{\int_a^b f dx} + \underline{\int_a^b g dx}.$$

1.069. Calcular las integrales inferior y superior de Darboux para la función $f(x)$ definida así: $f(x) = 0$, si x es un número racional del segmento $[a, b]$, y $f(x) = 1$, si x es un número irracional.

1.070. Calcular $\int_2^7 (0,75x - 0,5) dx$.

1.071. Sabiendo que $\sin 0,5 = 0,479$, $\sin 0,6 = 0,565$, $\sin 0,7 = 0,644$, calcular aproximadamente $\int_{0,5}^{0,7} \sin x dx$ y una cota del error cometido.

2. Límites filtrantes.—Dado un conjunto filtrante superiormente $(\mathcal{P}, \leq)$, esto es, tal que para todo par P_1, P_2 de $\mathcal{P}$ existe otro elemento P_3 de $\mathcal{P}$ tal que $P_1 \leq P_3$, $P_2 \leq P_3$, y una aplicación $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ de $\mathcal{P}$ en el cuerpo de los números reales, se puede generalizar el concepto de límite del siguiente modo:

DEFINICIÓN 1.—Se dice que L es el *límite filtrante* de $F(P)$, $P \in \mathcal{P}$, cuando para todo entorno $E_\epsilon(L)$, y para todo elemento $Q \in \mathcal{P}$, existe un $P' \in \mathcal{P}$, $P' \geq Q$, tal que, para todo $P \geq P'$, se verifica que $F(P) \in E_\epsilon(L)$.

Simbólicamente se puede expresar esta definición del siguiente modo:

$$(1) \quad \lim_{\mathcal{P}} F(P) = L \Leftrightarrow \forall E_\epsilon(L) \quad y \quad \forall Q \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists P' \in \mathcal{P}, P' \geq Q \mid \\ \forall P \geq P', F(P) \in E_\epsilon(L).$$

1. Si existe el límite filtrante es único.—En efecto, si L y L' fuesen límites filtrantes de F y $L \neq L'$, eligiendo los entornos $E_\epsilon(L)$ y $E_{\epsilon'}(L')$ de modo que fuesen disjuntos, dado el elemento Q de $\mathcal{P}$, y determinados P' y P'' por las condiciones $P' \geq Q$, $P'' \geq Q$, $\forall P \geq P'$, $F(P) \in E_\epsilon(L)$, $\forall P \geq P''$, $F(P) \in E_{\epsilon'}(L')$, si $P_1 \geq P'$, $P_1 \geq P''$, sería $\forall P \geq P_1$, $F(P) \in E_\epsilon(L)$, $F(P) \in E_{\epsilon'}(L')$, contradicción.

2. Si F y G son dos aplicaciones de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}$, se verifica que

$$\lim_{\mathcal{P}} (F + G)(P) = \lim_{\mathcal{P}} F(P) + \lim_{\mathcal{P}} G(P).$$

En efecto, dado un entorno arbitrario $E_\epsilon(L + L')$, siendo $L = \lim_{\mathcal{P}} F(P)$ y $L' = \lim_{\mathcal{P}} G(P)$, sean $E_{\frac{\epsilon}{2}}(L)$ y $E_{\frac{\epsilon}{2}}(L')$ entornos de L y L' . Dado un elemento arbitrario Q de $\mathcal{P}$, existen P' y P'' tales que $P' \geq Q$, $P'' \geq Q$ y $\forall P \geq P'$ se verifica que $F(P) \in E_{\frac{\epsilon}{2}}(L)$ y $\forall P \geq P''$ es $G(P) \in E_{\frac{\epsilon}{2}}(L')$. Sea $Q' \geq P'$, $Q' \geq P''$, para todo $P \geq Q'$ será:

$$|L + L' - (F + G)(P)| \leq |L - F(P)| + |L' - G(P)| < \epsilon.$$

3. Integral de Riemann.—Emplearemos las hipótesis, notaciones y resultados de los números anteriores.

1. *Función de elección.*—A cada partición $P = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$ le vamos a asignar todas las posibles funciones e definidas del siguiente modo: $e(x_{i-1}, x_i) = \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; esto es, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $i = 1, \dots, n$. La función e diremos que es una *función de elección* correspondiente a la partición P . Evidentemente, a cada partición le corresponden infinitas funciones de elección distintas.

2. *El conjunto formado por todos los pares (P, e) , siendo e una cualquiera de las funciones de elección correspondientes a la partición P , es un conjunto filtrante respecto de la relación de ordenación: $(P, e) \geq (P', e') \iff P \geq P'$.* Esto es consecuencia inmediata de ser $\mathcal{P}$ un conjunto filtrante respecto de la relación $\geq$.

3. *El conjunto formado por todos los pares (P, e) , siendo e una cualquiera de las funciones de elección correspondientes a la partición P , es un conjunto filtrante respecto de la relación de ordenación: $(P, e) > (P', e') \iff P > P'$.* Por la misma razón que en 2.

4. *Sumas de Riemann.*—Las sumas de Riemann son aplicaciones del conjunto $\mathcal{R} = \{(P, e)\}$, formado por todos los pares (P, e) , en el cuerpo de los números reales, definidas del siguiente modo:

$$(2) \quad S_R(P, e) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(e(x_{i-1}, x_i)).$$

5. $s_D(P) \leq S_R(P, e) \leq S_D(P)$, para toda e . Es consecuencia inmediata de (1) y (2).

6. Si $f(x)$ es integrable, según Darboux, en el segmento $[a, b]$, se verifica que las sumas de Riemann convergen (Def. 1, 2) hacia la integral de Darboux respecto de la ordenación $\geq$. En efecto, según la definición que acabamos de citar, si I es la integral de Darboux y si $\mathcal{G}(I)$ es un entorno arbitrario de I , dada una partición arbitraria Q , existen $P' \geq Q$ y $P'' \geq Q$ tales que $s_D(P')$ y $S_D(P'')$ pertenezcan a $\mathcal{G}(I)$. Si $P \geq P'$ y $P \geq P''$, será $s_D(P) \in \mathcal{G}(I)$, $S_D(P) \in \mathcal{G}(I)$, luego para todo (P_1, e_1) tal que $(P_1, e_1) \geq (P, e)$ (siendo e cualquier función de elección correspondiente a P), se verificará, en virtud de 5, que $S_R(P_1, e_1) \in \mathcal{G}(I)$, lo que significa (Def. 1, 2), que $\lim S_R(P, e) = I$. Cuando las sumas de Riemann son $\geq$ convergentes, a su límite se le llama *integral de Riemann de $f(x)$ extendida de a a b* .

7. $f(x)$ integrable Darboux en el segmento $[a, b] \implies f(x)$ integrable $\geq$ Riemann en el segmento $[a, b]$.—Integrable $\geq$ Riemann significa que la ordenación que se emplea en el conjunto (P, e) es la ordenación $\geq$.

8. $f(x)$ integrable $\geq$ Riemann en el segmento $[a, b] \implies f(x)$ integrable Darboux en el segmento $[a, b]$.—Sea $\mathcal{P}_R$ el conjunto de todos los pares (P, e) . Vamos a definir un subconjunto $Q_\varepsilon \subset \mathcal{P}_R$ del siguiente modo: $(P, e) \in Q_\varepsilon \iff S_R(P, e) + \varepsilon \geq S_D(P)$, siendo ε un número positivo dado. Si $(P, e) \in Q_\varepsilon$ y $P' \geq P$, se puede definir una función de elección e' , de modo que $S_R(P', e') + \varepsilon \geq S_D(P')$, luego $(P', e') \in Q_\varepsilon$. Sea I la integral Riemann de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y sea ε un número positivo arbitrario y sea $\mathcal{G}(I)$ un entorno intervalo de I de radio $\frac{\varepsilon}{2}$. Por ser I el límite de $S_R(P, e)$ relativo a la ordenación $\geq$, existe un (P, e) , siendo $(P, e) \geq (Q, e_2)$ y (Q, e_2) un elemento arbitrario de $\mathcal{P}_R$, tal que si $(P', e') \geq (P, e)$ se verifica $S_R(P', e') \in \mathcal{G}(I)$. Consideremos $Q_{\frac{\varepsilon}{2}}$ y sea $(P'', e'') \in Q_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $(P_1, e_1) \geq (P'', e'')$ y $(P_1, e_1) \geq (P, e)$. Se puede elegir e_1 de modo que $(P_1, e_1) \in Q_{\frac{\varepsilon}{2}}$ y como $S_R(P_1, e_1) \in \mathcal{G}(I)$, y de $(P_1, e_1) \in Q_{\frac{\varepsilon}{2}}$ se deduce

$$S_R(P_1, e_1) \leq S_D(P_1) \leq S_R(P_1, e_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

resulta que $S_D(P_1) \in \mathcal{G}_\varepsilon(I)$, siendo $\mathcal{G}_\varepsilon(I)$ un entorno intervalo de I de radio ε . Para todo $P_2 \geq P_1$ se verificará *a fortiori* $S_D(P_2) \in \mathcal{G}_\varepsilon(I)$, y como ε es arbitrario, se verifica que $S_D(P)$ converge hacia I (Def. 1, 2), luego la integral de Riemann coincide con la integral superior de Darboux. Como el razonamiento puede repetirse respecto de las s_D , resulta que: $f(x)$ es integrable $\geq$ Riemann $\implies f(x)$ integrable Darboux y ambas integrales son iguales.

El concepto de integral de Riemann puede obtenerse también mediante la ordenación $\succ$. Esta ordenación es más cómoda para la demostración de algunas propiedades, por lo que conviene establecer la equivalencia de ambos conceptos. El lector que no esté interesado en la demostración de las propiedades puede terminar aquí el estudio de la integral de Riemann.

9. La aplicación filtrante S_R relativa a la ordenación $\geq$ es una sub-aplicación de la aplicación filtrante S_R relativa a la ordenación $\succ$. En efecto, ambas aplicaciones actúan sobre el mismo conjunto $\mathcal{P}_R$; la diferencia está en que la primera actúa sobre $(\mathcal{P}_R, \geq)$ y la segunda sobre $(\mathcal{P}_R, \succ)$. Sea (P, e) un elemento arbitrario de $(\mathcal{P}_R, \succ)$. Para todo (P', e') de $(\mathcal{P}_R, \geq)$ tal que $(P', e') \geq (P, e)$ se verifica que $d(P') \geq d(P)$, lo que implica que $(P', e') \succ (P, e)$.

10. Si la aplicación filtrante S_R definida sobre $(\mathcal{P}_R, \succ)$ converge, converge también hacia el mismo límite la aplicación filtrante definida sobre

$(\mathcal{P}_R, \succ)$. En efecto, si I es el límite de S_R definido sobre $(\mathcal{P}_R, \succ)$, se verifica que, dado un entorno arbitrario $\mathcal{G}(I)$, existe un $(P, \epsilon) \in (\mathcal{P}_R, \succ)$ tal que, para todo $(P', \epsilon') \succ (P, \epsilon)$ se verifica que $S_R(P', \epsilon') \in \mathcal{G}(I)$. Sea (P', ϵ') un elemento de $(\mathcal{P}_R, \succ)$ tal que $(P', \epsilon') \succ (P, \epsilon)$. En virtud de 9 se verifica que $(P', \epsilon') \succ (P, \epsilon)$, luego $S_R(P', \epsilon') \in \mathcal{G}(I)$, lo que prueba que I es el límite definido sobre $(\mathcal{P}_R, \succ)$.

11. Si $f(x)$ es integrable Darboux se verifica que S_R es convergente sobre $(\mathcal{P}_R, \succ)$. Sea I la integral según Darboux y sea $\mathcal{P}(I)$ un entorno arbitrario de I . Existe una partición $P \in \mathcal{P}$ tal que para todo $P' \succ P$ se verifica que $s_D(P') \in \mathcal{G}(I)$ y $S_D(P') \in \mathcal{G}(I)$.

Sea ϵ la longitud del menor intervalo de la descomposición P . Sea P' una descomposición arbitraria tal que $d(P') < \epsilon$. En cada intervalo de P' no puede existir más de un punto de la descomposición de P . Sea e' una función de elección de P' definida del siguiente modo: si un punto x_i de P pertenece a (x'_{j-1}, x'_j) se toma $e'(x'_{j-1}, x'_j) = x_i$; en caso contrario, se toma un punto arbitrario de (x'_{j-1}, x'_j) . Mediante la función e' se definen ahora dos funciones de elección, e_1 y e_2 , de P del siguiente modo: $e_1(x_{i-1}, x_i)$ igual a aquél $e'(x'_{j-1}, x'_j)$ correspondiente a un intervalo (x'_{j-1}, x'_j) que tenga puntos comunes con (x_{i-1}, x_i) y para el cual sea $f(e'(x'_{j-1}, x'_j))$ mínimo respecto de todos los (x'_{j-1}, x'_j) que tienen puntos comunes con (x_{i-1}, x_i) ; $e_2(x_{i-1}, x_i)$ se define de modo análogo sustituyendo la condición de mínimo por la de máximo. Resulta así que

$$(3) \quad S_R(P, e_1) \leq S_R(P', e') \leq S_R(P, e_2).$$

Ahora bien, en virtud de 5 es

$$(4) \quad s_D(P) \leq S_R(P, e_1) \leq S_D(P) \quad \text{y} \quad s_D(P) \leq S_R(P, e_2) \leq S_D(P).$$

De (3), (4), $s_D(P) \in \mathcal{G}(I)$ y $S_D(P) \in \mathcal{G}(I)$ se deduce que $S_R(P', e') \in \mathcal{G}(I)$. Si $(P^*, e^*) \succ (P', e')$ será $d(P^*) \leq d(P') < \epsilon$; luego, según lo visto anteriormente, habrá un (P^*, e^{**}) tal que $s_D(P) \leq S_R(P^*, e^{**}) \leq S_D(P)$ y por tanto $s_D(P) \leq S_R(P^*, e^*) \leq S_D(P)$, luego $S_R(P^*, e^*) \in \mathcal{G}(I)$.

Hemos obtenido el siguiente:

TEOREMA FUNDAMENTAL.—La función $f(x)$ es integrable según Darboux $\iff$ La función $f(x)$ es integrable según Riemann respecto de la ordenación $\succ$ de las particiones del intervalo $[a, b]$ $\iff$ La función $f(x)$ es integrable según Riemann respecto de la ordenación $\prec$ de las particiones del intervalo $[a, b]$.

4. Propiedades de la integral de Riemann.

I. Si $a < b < c$ son tres puntos del campo de variabilidad de la variable independiente x de la función $f(x)$, acotada en $[a, c]$, y si $f(x)$ es integrable en dos de los segmentos $[a, b]$, $[b, c]$ y $[a, c]$, es integrable en el tercero, y se verifica

$$(5) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Supongamos que sea integrable en los dos primeros. Sean $\mathcal{P}_a^b$, $\mathcal{P}_b^c$ y $\mathcal{P}_a^c$ los conjuntos de todas las particiones de los segmentos $[a, b]$, $[b, c]$ y $[a, c]$. Si representamos por $\mathcal{P}_a^b + \mathcal{P}_b^c$ el conjunto formado por las particiones de $[a, c]$ que se obtienen tomando una partición cualquiera del primer sumando y una partición arbitraria del segundo, será $\mathcal{P}_a^b + \mathcal{P}_b^c \subset \mathcal{P}_a^c$. Ahora bien, como en virtud del teorema fundamental, la integral de Riemann depende únicamente del diámetro de las particiones, se puede sustituir $\mathcal{P}_a^c$ por $\mathcal{P}_a^b + \mathcal{P}_b^c$; esto equivale a que en todas las particiones figure el punto b . Entonces, si $P \in \mathcal{P}_a^b + \mathcal{P}_b^c$, será

$$S_R(P, \epsilon) = S_R(P_a^b, \epsilon) + S_R(P_b^c, \epsilon).$$

Sean I_1 e I_2 las integrales de $f(x)$ en $[a, b]$ y $[b, c]$, respectivamente. Dado un entorno de radio $\frac{\epsilon}{2}$ de I_1 y otro entorno de radio $\frac{\epsilon}{2}$ de I_2 , se puede hallar un diámetro δ tal que, para toda partición de diámetro inferior a δ , sea $I_1 - \frac{\epsilon}{2} < S_R(P_a^b, \epsilon) < I_1 + \frac{\epsilon}{2}$ e $I_2 - \frac{\epsilon}{2} < S_R(P_b^c, \epsilon) < I_2 + \frac{\epsilon}{2}$. Sumando, se obtiene $I_1 + I_2 - \epsilon < S_R(P, \epsilon) < I_1 + I_2 + \epsilon$.

Si existiesen las integrales en $[a, c]$ y $[a, b]$ se obtendrían, de modo análogo,

$$-\frac{\epsilon}{2} < I - S_R(P_a^c, \epsilon) < \frac{\epsilon}{2}, \quad -\frac{\epsilon}{2} < S_R(P_a^b, \epsilon) - I_1 < \frac{\epsilon}{2}$$

de donde, sumando

$$-\epsilon < I - I_1 - S_R(P_b^c, \epsilon) < \epsilon$$

II. En la definición de la integral se ha supuesto que $a < b$. Si fuese $a > b$ y se procediese del mismo modo, se verificaría que todos los factores

$x_i - x_{i-1}$ serían negativos; luego procediendo del mismo modo que se ha hecho cuando $a < b$, se obtendría

$$(6) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Se conviene, en el caso en que el intervalo de integración sea cero, en poner

$$(7) \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

III. Las generalizaciones de II permiten enunciar I de un modo un poco más general: *si existen dos de las integrales siguientes, existe la tercera y se verifica*

$$(8) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

cualesquiera que sean los puntos a, b, c.

IV. *Todas las funciones continuas en $[a, b]$ son integrables.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y por tanto acotada en $[a, b]$; luego existen las integrales superior e inferior de Darboux. Si P es una partición arbitraria de $[a, b]$, se verifica

$$(9) \quad s_D(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq S_D(P).$$

Por ser $[a, b]$ un segmento cerrado, $f(x)$ es uniformemente continua en él, luego si ϵ es un número positivo arbitrario se puede hallar una partición P de diámetro inferior a un número δ tal que si $|x' - x''| < \delta$ sea

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{|b - a|}.$$

Para esta partición será, suponiendo $a < b$,

$$S_D(P) - s_D(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (M_i - m_i) < \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{\epsilon}{b - a} = \epsilon,$$

lo que, en virtud de (9), significa que $f(x)$ es integrable según Darboux, y esto, por el teorema fundamental, significa que $f(x)$ es integrable según Riemann.

V. *Las funciones acotadas en $[a, b]$ y con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ son integrables.*—En efecto, se pueden encerrar las discontinuidades en un número finito de segmentos de longitud arbitrariamente pequeña.

VI. *Si se alteran los valores de una función en un número finito de puntos su integral de Riemann no varía.*—Por la misma razón del caso anterior.

VII. PRIMER TEOREMA DEL VALOR MEDIO.—Sean m y M el extremo inferior y el extremo superior de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Si P es cualquier partición de $[a, b]$ y $P_0 = \{a = x_0, b = x_1\}$, se verifica

$$(b-a)m = s_D(P_0) \leq s_D(P) \leq S_D(P) \leq S_D(P_0) = (b-a)M,$$

luego si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, se verifica

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M,$$

si

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a},$$

será

$$(10) \quad \boxed{m \leq \mu \leq M \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a);}$$

expresión que constituye el *primer teorema del valor medio*. En el caso en que $f(x)$ sea continua, existe un punto ξ tal que $a \leq \xi \leq b$ y $f(\xi) = \mu$, lo que permite escribir el *teorema del valor medio para funciones continuas* del siguiente modo:

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi), \quad a \leq \xi \leq b.$$

VIII. Si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, lo es también en todo subsegmento $[a, x]$, $a \leq x \leq b$, luego existe la integral de $f(x)$ para todo intervalo $[a, x]$. Se obtiene así una función

$$(12) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

definida para todo punto de $[a, b]$. $F'(x) = f(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+dx} f(t) dt}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+dx} f(t) dt}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + \theta dx) dx}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} f(x + \theta dx) = f(x); \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Se llama *primitiva* de una función $f(x)$ (Def. 1, 1, § 1) a toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Al conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ se le llama (l. c.) *integral indefinida* de $f(x)$ y se representa del siguiente modo:

$$(13) \quad \int f(x) dx = F(x) + c.$$

I. CONSECUENCIAS.—Si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, $\int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

II. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es la primitiva de $f(x)$ que posee la propiedad de ser $F(a) = 0$. Por consiguiente, si $G(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$, será $F(x) = G(x) - G(a)$, o bien

$$(14) \quad \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a),$$

siendo $G(x)$ una primitiva cualquiera de la función continua $f(x)$.

III. Si existen las dos integrales del segundo miembro, se verifica que

$$(15) \quad \int_a^\beta (a f dx + b g dx) = a \int_a^\beta f dx + b \int_a^\beta g dx,$$

en donde a y b son constantes. Aun cuando este teorema es válido con la generalidad con que se ha enunciado, vamos a demostrarlo únicamente en el caso de ser f y g continuas en el segmento $[a, \beta]$. En tal caso es consecuencia inmediata de 1 y 2 de 2, § 1, y II.

IV. Si existe una de las dos integrales siguientes, existe la otra y se verifica la igualdad siguiente, conocida con el nombre de *fórmula de integración por partes*:

$$(16) \quad \boxed{\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a)}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración la haremos únicamente en el caso de ser las funciones f y g de primera clase; esto es, con derivadas continuas en $[a, b]$. En este caso, $f dg$ y $g df$ son diferenciales continuas y se puede aplicar I y II. La relación (16) es entonces consecuencia inmediata de la fórmula que proporciona la diferencial de un producto

$$d(fg) = f dg + g df.$$

V. CAMBIO DE VARIABLE.—Sea $f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$; $x = \varphi(t)$ una aplicación biunívoca del segmento $[a, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$, siendo además $\varphi(t)$ de primera clase en $[a, \beta]$. La función $F(t) = f(\varphi(t))$ es entonces una función continua en el segmento $[a, \beta]$, así como la función $F(t)\varphi'(t)$, producto de dos funciones continuas. Por consiguiente, existe la integral de $F(t)\varphi'(t)$ en el segmento $[a, \beta]$. Se verifica que

$$(17) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt;}$$

fórmula del cambio de variable.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad y \quad J = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Sea ϵ un número positivo arbitrario. Por ser $\varphi'(t)$ continua en $[a, \beta]$, es uniformemente continua en él. Supondremos que $\max f(x)$ en $[a, b]$ sea un número positivo M y que $a < \beta$. Existe un número positivo δ tal que para todos t' y t'' tales que $a \leq t' < t'' \leq \beta$ y $t'' - t' < \delta$ sea

$$|\varphi'(t'') - \varphi'(t')| < \frac{\epsilon}{(\beta - a)M}$$

Por ser φ biunívoca y continua en un segmento del cuerpo de los números reales es bicontinua; esto es, φ^{-1} es también continua, luego existe un número positivo η tal que, para todo x' y $x'' \in [a, b]$ tales que $|x' - x''| < \eta$, sea $|\varphi^{-1}(x') - \varphi^{-1}(x'')| < \delta$. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ de diámetro inferior η , y e una función de elección arbitraria correspondiente a ella. Sea $e(x_{i-1}, x_i) = \xi_i$ y $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\eta_i = \varphi^{-1}(\xi_i)$, $i = 0, \dots, n$. Por ser φ biunívoca y continua, se verifica que $t_{i-1} \leq \eta_i \leq t_i$. Por consiguiente, $e'(t_{i-1}, t_i) = \eta_i$ es una función de elección de la partición $P' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta\}$. Sea $S_R(P, e)$ la suma de Riemann correspondiente a la función $f(x)$ y $S'_R(P', e')$ la suma de Riemann correspondiente a la función $F(t) \varphi'(t)$. Se verifica que

$$\begin{aligned} |S_R(P, e) - S'_R(P', e')| &= \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - S'_R(P', e') \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) f(\varphi(\eta_i)) - S'_R(P', e') \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n F(\eta_i) \varphi'(t_{i-1} + \theta(t_i - t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n F(\eta_i) \varphi'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |F(\eta_i)| |\varphi'(t_{i-1} + \theta(t_i - t_{i-1})) - \varphi'(\eta_i)| (t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{(\beta - a)M} \sum_{i=1}^n |F(\eta_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\epsilon}{(\beta - a)M} \sum_{i=1}^n M(t_i - t_{i-1}) = \epsilon. \end{aligned}$$

Dado un número positivo arbitrario ε^* se puede hallar un δ^* tal que para toda partición P^* del segmento $[a, b]$ de diámetro inferior a δ^* sea

$$|J - S_R(P^*, \varepsilon^*)| < \frac{\varepsilon^*}{2}.$$

Sea $\bar{\delta} = \min. \{\delta_1, \delta^*\}$, siendo δ_1 el δ calculado al principio para $\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{2}$,

Sustituyendo en todo lo que precede δ por $\bar{\delta}$ y llamando $\bar{P}$ y $\bar{P}'$ a las particiones correspondientes a las P y P' , respectivamente, resultaría

$$|S_R(\bar{P}, \bar{\varepsilon}) - S_R'(\bar{P}', \bar{\varepsilon}')| < \frac{\varepsilon^*}{2}, \quad |J - S_R(\bar{P}', \bar{\varepsilon}')| < \frac{\varepsilon^*}{2},$$

de donde

$$|J - S_R(\bar{P}, \bar{\varepsilon})| = |J - S_R(\bar{P}', \bar{\varepsilon}') + S_R(\bar{P}', \bar{\varepsilon}') - S_R(\bar{P}, \bar{\varepsilon})| < \varepsilon^*,$$

lo que prueba que el límite de las S_R correspondientes a la función $f(x)$ es J , q. e. d.

EJERCICIOS:

1.072. Demostrar que: a) $\int_a^b dx = b - a$. b) $\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$. c) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a}$ o $a < a < b$. d) $\int_a^b (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) dx = a_0 b + \frac{1}{2} a_1 b^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n b^{n+1} - \left(a_0 a + \frac{1}{2} a_1 a^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n a^{n+1} \right)$ e) $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

1.073. Aplicando la fórmula de integración por partes, comprobar que

$$\int e^x dx (x^2) = 2(x-1)e^x.$$

1.074. Aplicando el cambio de variable $x = \arcsen t$, comprobar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sen x \cos x dx = \frac{1}{2}.$$

1.075. Calcular las siguientes integrales definidas: a) $\int_1^e \log x \, dx$. b) $\int_1^2 \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$,
 $\operatorname{tg} 0,5 = 0,546$, $\operatorname{tg} 1 = 1,557$. $\ln 10 = 2,30258$, c) $\int_1^2 \frac{dx}{\cos^2 x}$. d) $\int_{0,5}^{0,9} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$.

1.076. Representar gráficamente el arco de curva $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ en el segmento $[0,5; 0,9]$; observar que este arco es cóncavo respecto del semieje de las x positivas y que, por consiguiente, si se llaman A y B los puntos del eje x de abscisas 0,5 y 0,9, respectivamente, y C y D a los puntos de la curva $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ de abscisas 0,5 y 0,9, respectivamente, el trapecio ACDB tiene área inferior a la integral d) del ejercicio anterior. Calcular esta área y compararla con dicha integral.

5. Integral de Riemann-Stieltjes.

[La integral de Riemann tiene numerosas aplicaciones a problemas de la técnica; así, por ejemplo, el momento de una viga, uniformemente cargada, respecto de uno de sus extremos (fig. 119) viene dado por $\int_a^b m x \, dx = m \int_a^b x \, dx$. Si en lugar de estar uniformemente cargada, la carga viene dada por la función de densidad $y = \varphi(x)$ (fig. 120), el momento

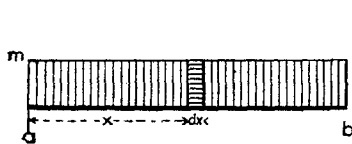


Fig. 119.

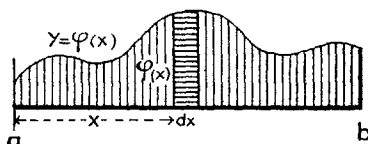


Fig. 120.

sería $\int_a^b x \varphi(x) \, dx$. Si la función de densidad fuese integrable en el segmento $[a, b]$, po-

niendo $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(x) \, dx$ se podría escribir la integral anterior en la forma $\int_a^b x \, d\Phi(x)$.

La función $y = \Phi(x)$ se llama *función de distribución de masas* o de *distribución de cargas*. Ahora bien, esto admite otra interpretación, que permite una generalización del concepto de integral muy útil en estática y en cálculo de probabilidades, entre otras múltiples aplicaciones. Consideremos la recta $y = x$ (fig. 121). Dado un segmento

$$[x_i, x_{i+1}] \in [a, b],$$

la longitud de dicho segmento o medida ordinaria del segmento es

$$\mu[x_i, x_{i+1}] = x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i;$$

esto es, la función $y = x$ se puede considerar como función de distribución de masas para la medida de la longitud de un segmento. En el caso de una viga uniformemente cargada, con una densidad de carga igual a m , la medida del segmento $[x_i, x_{i+1}]$ sería

$$\mu [x_i, x_{i+1}] = m (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1}^* - y_i^*,$$

lo que prueba que la función $y = mx$ (fig. 121) sería la función de distribución de masas para la medida de un segmento de una viga uniformemente cargada. En el caso de una viga

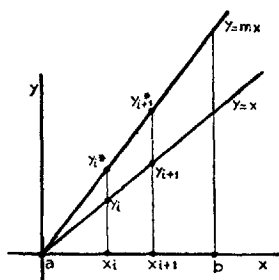


Fig. 121.

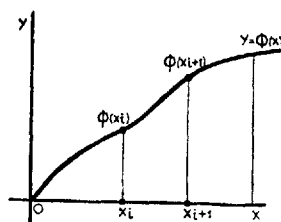


Fig. 122.

con carga variable, pero continua, y función de densidad $y = \varphi(x)$ (fig. 120), la función de distribución de masas sería $y = \Phi(x)$ (fig. 122) y la medida del segmento $[x_i, x_{i+1}]$, esto es, la carga que actúa sobre él sería $\mu [x_i, x_{i+1}] = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)$. De este modo, la fórmula que da el momento de una viga respecto de uno de sus puntos se puede repre-

sentar por una fórmula única, válida para todos estos casos: $M = \int_a^b x d\Phi(x)$, siendo

$\Phi(x)$ la función de distribución de cargas. Pero la ventaja aparece cuando la distribución de cargas no es continua. Supongamos (fig. 123) una viga uniformemente cargada en la que actúan dos fuerzas aisladas p_1 y p_2 a las distancias α y β , respectivamente, de a . La función de distribución de cargas correspondiente a este caso sería la representada en la figura 123, esto es, la función $y = \Phi(x)$, cuya gráfica está formada por los segmentos $aP_1, P_1'P_2, P_2'b$. La medida de un segmento respecto de la función de distribución Φ o, lo que es lo mismo, la carga que actúa sobre él correspondiente a la distribución de cargas indicada en la figura 123, será $\mu [x_i, x_{i+1}] = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)$. Ahora bien, el momento correspondiente a esta distribución de cargas no puede representarse mediante una integral de Riemann, lo que supone una complicación en el estudio de problemas estáticos en los que la carga no es continua. Una situación completamente análoga se presenta en cálculo de probabilidades cuando la función de distribución de probabilidad no es continua. De aquí nace la conveniencia de generalizar el concepto de integral

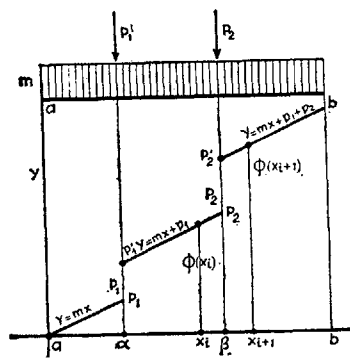


Fig. 123.

de Riemann con objeto de obtener una fórmula única que sirva tanto para cargas continuas como discontinuas. Esto se consigue mediante la integral de Riemann-Stieltjes, que vamos a estudiar en este número.]

Analizando el concepto de integral estudiado en el número 3, se puede extraer la siguiente síntesis del mismo: Para definir la integral se requieren las siguientes cosas: 1) *Un conjunto de puntos C.* 2) *Un conjunto filtrante $(\mathcal{P}, \succcurlyeq)$ definido sobre el conjunto de todas las particiones de C.* 3) *Una aplicación del conjunto filtrante $(\mathcal{P}, \succcurlyeq)$ en el cuerpo de los números reales, definida por las funciones S.* Cualquiera de estas tres componentes de una integral puede modificarse respecto del significado que tenía en el número 3. En 3, C era un segmento de una recta; puede sustituirse este segmento por conjuntos de puntos de la recta más generales. En cuanto a 2) pueden definirse ordenaciones distintas en $\mathcal{P}$. Finalmente, respecto de 3) se puede variar de muchas formas la definición de las funciones S. De momento vamos a dejar invariantes 1) y 2) y vamos a modificar la definición de las funciones $(\mathcal{P}, \succcurlyeq) \rightarrow \mathbb{R}$. Observando las definiciones de las funciones S de Darboux y de Riemann, se observa que en ellas interviene un número obtenido a partir de la función $f(x)$ que se desea integrar y otro que es la longitud del segmento $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Ahora bien, la longitud de un segmento no es sino una medida del mismo y esta medida puede efectuarse de muchas formas distintas. Vamos, por tanto, a generalizar la idea de medida de un segmento, lo que nos proporcionará, procediendo del mismo modo que se ha hecho con las integrales de Riemann y de Darboux, un nuevo concepto de integral. Por consiguiente, para definir una integral debemos de precisar el significado del conjunto C; del conjunto filtrante $(\mathcal{P}, \succcurlyeq)$, lo que se reduce a definir la relación de ordenación $\succcurlyeq$ entre las particiones de C y el modo de obtener estas particiones; y, finalmente, la forma de definir la aplicación S de $(\mathcal{P}, \succcurlyeq)$ en $\mathbb{R}$. Esto nos lleva a precisar, mediante la siguiente notación, una integral $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(C; \mathcal{P} \succcurlyeq; S, \mathbb{R}).$$

Recordando (17, 3, § 1, cap. II) las propiedades características de la medida de una magnitud, vamos a extenderlas al caso en que no se trate de una magnitud (recuérdese que magnitud es lo mismo que semigrupo aditivo) propiamente tal, sino de las partes de un segmento de la recta real formadas por un número finito o infinito numerable de segmentos tales que dos cualesquiera de ellos no tengan ningún punto común.

APLICACIONES DE PARTES DE UN CONJUNTO EN $\mathbb{R}^+$.—Sea C un conjunto, P un cierto subconjunto del conjunto formado por las partes de C, tal que

sobre todos los elementos de P se ha definido una aplicación μ que verifica las siguientes propiedades:

- 1) $P \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^+$, siendo $\mathbb{R}^+$ el semigrupo de los números reales no negativos,
- 2) $\mu(s_1 \cup s_2 \cup \dots) = \mu(s_1) + \mu(s_2) + \dots; \quad s_i \cap s_j = \emptyset, \quad i \neq j,$
 $s_1 \cup s_2 \cup \dots \in P; \quad s_i \in P; \quad i = 1, 2, \dots$

A aplicaciones de este tipo se les llama *aplicaciones definidas en un conjunto*. A toda aplicación definida en un conjunto C de partes de un espacio euclídeo E , que puede ser en particular la recta, se le puede hacer corresponder una aplicación de este espacio en $\mathbb{R}^+$ del siguiente modo: si $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}$ son dos vectores de E , se dice que $\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}$ cuando todas las coordenadas de $\mathbf{x}_0$ son menores o iguales a sus correspondientes de $\mathbf{x}$. Las partes de E que se consideran están formadas por los paralelepípedos definidos por todos los vectores $\mathbf{y}$ tales que $(\mathbf{x}_0 < \mathbf{y} \leq \mathbf{x})$.

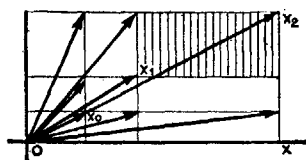


Fig. 124.

Según la definición anterior, a cada uno de estos paralelepípedos le corresponde un número no negativo: $\mu(\mathbf{x}_0 < \mathbf{y} \leq \mathbf{x})$. Si se supone fijo $\mathbf{x}_0$, el número $\mu(\mathbf{x}_0 < \mathbf{y} \leq \mathbf{x})$ depende únicamente del vector $\mathbf{x}$, con lo que se obtiene una aplicación Φ de E en $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}_0 < \mathbf{y} \leq \mathbf{x}), & \mathbf{x}_0 < \mathbf{x} \\ \Phi(\mathbf{x}_0) = 0 \\ \Phi(\mathbf{x}) = -\mu(\mathbf{x} < \mathbf{y} \leq \mathbf{x}_0), & \mathbf{x}_0 > \mathbf{x}. \end{cases}$$

En el caso particular de ser E de dimensión uno, la función Φ permite definir fácilmente a su vez la función μ . En efecto, si $\dim(E) = 1$:

$$\begin{aligned} \Phi(x_2) &= \mu(x_0 < y \leq x_2) = \mu[(x_0 < y \leq x_1) \cup (x_1 < y \leq x_2)] \\ &= \mu(x_0 < y \leq x_1) + \mu(x_1 < y \leq x_2), \end{aligned}$$

de donde

$$(1) \quad \mu(x_1 < y \leq x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Como μ es una función no negativa, resulta que la función Φ es una función monótona no decreciente:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \Phi(x_1) \leq \Phi(x_2).$$

La función $\Phi(x)$ así obtenida tiene las tres propiedades características siguientes:

1) $\Phi(x)$ es continua por la derecha. 2) $\mu(y=x) = s > 0 \iff \Phi(x)$ posee un salto en el punto x de amplitud igual a s . 3) $\mu(y=x) = 0 \iff \Phi(x)$ es continua en x . En efecto, sea $\Delta x > 0$,

$$\begin{aligned}\Phi(x+0) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \Phi(x + \Delta x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \mu(x_0 < y \leq x + \Delta x) = \mu(x_0 < y \leq x) \\ &+ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \mu(x < y \leq x + \Delta x) = \Phi(x) + \mu(x < y \leq x) = \Phi(x) + \mu(0) = \Phi(x). \\ \Phi(x-0) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \Phi(x + \Delta x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \Phi(x - \Delta x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \mu(x_0 < y \leq x - \Delta x) \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} [\mu(x_0 < y \leq x) - \mu(x - \Delta x < y \leq x)] \\ &= \mu(x_0 < y \leq x) - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \mu(x - \Delta x < y \leq x) = \mu(x_0 < y \leq x) - \mu(y=x) \\ &= \Phi(x) - \mu(y=x).\end{aligned}$$

Recíprocamente, dada una función no decreciente $\Phi(x)$ y acotada en su campo de definición C , se puede definir una función μ de las partes de C del siguiente modo:

$$(2) \quad \mu(x_0 < y \leq x) = \Phi(x) - \Phi(x_0).$$

Las funciones de conjunto μ , o sus equivalentes $\Phi(x)$ llamadas *funciones de distribución*, son fundamentales en el cálculo de probabilidades. La expresión (2) se puede escribir en la forma

$$(3) \quad \mu(x_0 < y \leq x) = F(x),$$

sin más que poner $F(x) = \Phi(x) - \Phi(x_0)$. Por consiguiente, la función μ de medida definida sobre un conjunto de puntos de una recta equivale a la función monótona no decreciente $F(x)$. No hay inconveniente en generalizar la medida admitiendo medidas negativas de conjunto. Esto equivale a admitir que $F(x)$ no sea monótona. Entonces podemos proceder del siguiente modo:

DEFINICIÓN 1.—Dadas dos funciones $f(x)$ y $F(x)$, definidas en el segmento $[a, b]$ de la recta euclídea y definido en $[a, b]$ el conjunto filtrante formado por todas sus particiones $\mathcal{P}$, con la relación de ordenación $\geq$ (3); se define una aplicación de $(\mathcal{P}, \geq)$ en el cuerpo real del siguiente modo: sea e una función de elección de $P \in \mathcal{P}$; se llama *suma de Riemann-Stieltjes*, y se representa por S_{R-S} a la siguiente aplicación:

$$(4) \quad S_{R-S}(P, e) = \sum_{i=1}^n f(e(x_{i-1}, x_i)) [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Si la aplicación S_{R-S} de $(\mathcal{P}, \geq)$ en R es convergente, su límite es único y a este límite se le llama *integral de Riemann-Stieltjes de la función $f(x)$ respecto de la función de distribución $F(x)$, extendida de a a b , y se representa por*

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dF(x).$$

EJERCICIOS:

1.077. Sea $y = \Phi(x)$ la función de distribución representada en la figura 123. Calcular

$$\int_a^b x d\Phi(x).$$

[Sea P una partición de la forma

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x < x_{i+1} < \dots < x_j < \beta < x_{j+1} < \dots < x_n = b\}.$$

Pongamos $e(x_{i-1}, x_i) = \xi_i$. Será:

$$\begin{aligned} S_{R-S}(P, e) &= \sum_{l=1}^i \xi_l [\Phi_l(x_l) - \Phi(x_{l-1})] + \xi_{i+1} [\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)] + \sum_{l=i+2}^n \xi_l [\Phi(x_l) \\ &- \Phi(x_{l-1})] + \xi_{j+1} [\Phi(x_{j+1}) - \Phi(x_j)] + \sum_{l=j+2}^n \xi_l [\Phi(x_l) - \Phi(x_{l-1})] = \sum_{l=1}^i \xi_l \cdot m(x_l - x_{l-1}) \\ &+ \xi_{i+1} (p_1 + m x_{i+1} - m x_{i-1}) + \sum_{l=i+2}^j \xi_l [p_1 + m x_l - (p_1 + m x_{l-1})] \\ &+ \xi_{j+1} [p_1 + p_2 + m x_{j+1} - (p_1 + m x_j)] + \sum_{l=j+2}^n \xi_l [p_1 + p_2 + m x_l - (p_1 + p_2 + m x_{l-1})] \\ &= \sum_{l=1}^n \xi_l \cdot m(x_l - x_{l-1}) + \xi_{i+1} p_1 + \xi_{j+1} p_2. \end{aligned}$$

Cuando el diámetro de la partición tiende a cero estas sumas tienden a

$$\int_a^b x m dx + \alpha p_1 + \beta p_2,$$

que es el momento respecto de a de la carga de la figura 123.]

1.078. Demostrar que si $y = \Phi(x)$ es una función con derivada continua, y $F(x) = \Phi(x)$ para $a \leq x < \alpha_1$; $F(x) = \Phi(x) + p_1$ para $\alpha_1 \leq x < \alpha_2$; ...; $F(x) = \Phi(x) + p_1 + \dots + p_n$ para $\alpha_n \leq x < b$, se verifica que

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) \Phi'(x) dx + p_1 \alpha_1 + \dots + p_n \alpha_n.$$

1.079. Calcular $\int_{0,5}^{10,5} dF(x)$, siendo $F(x) = \text{parte entera de } x$

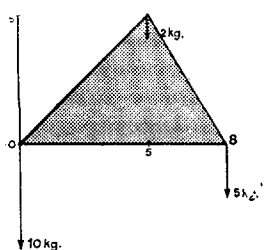


Fig. 125.

1.080. Dadas las fuerzas paralelas y coplanarias $F_i = i$, situadas a las distancias (de cada una con la siguiente) 1, 2, 3, 4, 5, respectivamente, calcular la resultante del sistema.

1.081. Un triángulo material y homogéneo, de densidad 1 cuyos vértices son pesados, siendo sus pesos los indicados en la figura 125, está colocado en la posición que se indica en la misma. Calcular la abscisa del centro de gravedad.

6. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes.—Las propiedades lineales respecto de la función integrando y la aditiva respecto del intervalo de integración son válidas también para la integral de Riemann-Stieltjes y sus demostraciones no difieren esencialmente de las vistas para la integral de Riemann.

I. Si existen dos de las siguientes integrales existe también la tercera y se verifica la relación

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dF(x) + \int_b^c f(x) dF(x) = \int_a^c f(x) dF(x).$$

Se conviene en poner $\int_a^a f(x) dF(x) = 0$

$$(7) \quad \text{II.} \quad \int_b^a f(x) dF(x) = - \int_a^b f(x) dF(x).$$

III. Si α y β son constantes:

$$(8) \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g) dF = \alpha \int_a^b f dF + \beta \int_a^b g dF.$$

IV. Si f es integrable respecto de las dos funciones de distribución F y Φ , y si α y β son constantes, se verifica:

$$(9) \quad \int_a^b f(x) d[\alpha F(x) + \beta \Phi(x)] = \alpha \int_a^b f(x) dF(x) + \beta \int_a^b f(x) d\Phi(x).$$

V. CAMBIO DE VARIABLE.—De modo totalmente análogo al empleado en la integral de Riemann, se demuestra: si $x = \varphi(t)$ es una aplicación biunívoca y continua (por tanto bicontinua) del segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$, se verifica que

$$(10) \quad \int_a^b f(x) dF(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) dF(\varphi(t)).$$

VI. INTEGRACIÓN POR PARTES.—Si existe una de las integrales siguientes, se verifica:

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dF(x) + \int_a^b F(x) df(x) = f(b)F(b) - f(a)F(a).$$

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que exista la primera integral. A las sumas de Riemann-Stieltjes correspondientes a la función de distribución F las representaremos por S , y a las correspondientes a la función de distribución f por S' . Sea ε un número positivo arbitrario. De la hipótesis de trabajo se deduce que, dada una partición P_1 de $[a, b]$, se puede hallar otra P_2 tal que para toda partición $(P, e) \geq (P_2, e_2)$ se verifique que

$$\left| S_{R-S}(P, e) - \int_a^b f(x) dF(x) \right| < \varepsilon.$$

Como P_1 es una partición arbitraria, consideremos la suma S' correspondiente a la partición $P \gg P_1$:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} S'_{R-S}(P, e) &= \sum_{i=1}^n F(e[x_i, x_{i-1}]) [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n F(e[x_{i-1}, x_i]) f(x_i) - \sum_{i=1}^n F(e[x_{i-1}, x_i]) f(x_{i-1}). \end{aligned} \right.$$

Se comprueba, sin más que simplificar, que

$$(13) \quad f(b)F(b) - f(a)F(a) = \sum_{i=1}^n f(x_i)F(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})F(x_{i-1})$$

De (12) y (13) se obtiene

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} f(b)F(b) - f(a)F(a) - S'_{R-S}(P, e) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) [F(x_i) - F(e[x_{i-1}, x_i])] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) [F(e[x_{i-1}, x_i]) - F(x_{i-1})]. \end{aligned} \right.$$

Sea P_3 la partición de $[a, b]$ cuyos puntos de división están formados por todos los puntos de la partición P más todos los puntos $e[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Llamando e_3 a la función de elección $e_3[x_{i-1}, e[x_{i-1}, x_i]] = x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ y $e_3[e[x_{i-1}, x_i], x_i] = x_i$, (14) se puede escribir en la forma

$$(15) \quad f(b)F(b) - f(a)F(a) - S'_{R-S}(P, e) = \sum_{i=1}^m f(e_3[x_{i-1}, x_i]) [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

De aquí resulta que

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left| f(b)F(b) - f(a)F(a) - S'_{R-S}(P, e) - \int_a^b f(x) dF \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m f(e_3[x_{i-1}, x_i]) [F(x_i) - F(x_{i-1})] - \int_a^b f(x) dF \right| < \varepsilon. \end{aligned} \right.$$

puesto que $P_3 \gg P \gg P_2$. Por verificarse (16) para toda partición $P \gg P_2$, siendo $P_2 \gg P_1$ y P_1 una partición arbitraria, se verifica que

$$f(b)F(b) - f(a)F(a) - \int_a^b F(x) df(x) - \int_a^b f(x) dF(x) = 0,$$

q. e. d.

FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN MONÓTONAS NO DECRECIENTES.—El caso particular más sencillo y más importante es aquel en que la función de distribución es monótona no decreciente. En este caso se puede proceder con la integral de Riemann-Stieltjes de un modo totalmente paralelo al empleado para la integral de Riemann. Se comienza por definir las sumas de Darboux correspondientes a una partición, que ahora llamaremos sumas de Darboux-Stieltjes y representaremos por s_{D-S} y S_{D-S} . Llamaremos M_i al extremo superior de $f(x)$ cuando x varía en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, y m_i al extremo inferior de $f(x)$ en dicho segmento. Dada la partición

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

se definen

$$(17) \quad s_{D-S}(P) = \sum_{i=1}^n m_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] \quad \text{y} \quad S_{D-S}(P) = \sum_{i=1}^n M_i [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Exactamente igual que para las sumas de Darboux se demuestra:

VII. Si la función de distribución es monótona no decreciente y si $P' \gg P$, se verifica:

$$s_{D-S}(P) \leq s_{D-S}(P') \leq S_{D-S}(P') \leq S_{D-S}(P).$$

Si $F(x)$ es una función monótona no decreciente, al extremo superior de las $s_{D-S}(P)$ se le llama *integral inferior de Darboux-Stieltjes*, y al extremo inferior de las $S_{D-S}(P)$ se le llama *integral superior de Darboux-Stieltjes*, y se representa del siguiente modo:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(x) dF(x) = \text{ext. sup. } \{ s_{D-S}(P) \}, \\ \int_a^b f(x) dF(x) = \text{ext. inf. } \{ S_{D-S}(P) \}. \end{array} \right.$$

Como para la integral de Riemann, se demuestra:

VIII. Si la función de distribución $F(x)$ es monótona no decreciente se verifica que la condición necesaria y suficiente para que exista la integral de Riemann-Stieltjes es que la integral inferior de Darboux-Stieltjes sea igual a la integral superior; entonces se verifica que

$$(19) \quad \int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) dF(x).$$

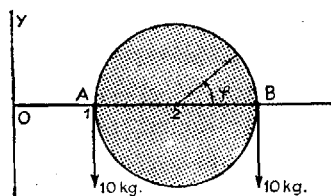


Fig. 126

EJERCICIOS:

1.082. $F(x)$ es la función de distribución de probabilidad correspondiente al juego con un dado ($F(i) = \frac{i}{6}$). Calcular el valor medio y la variancia.

1.083. Calcular el momento de inercia del disco de la figura 126, respecto del eje y , suponiendo que su densidad es 2,4 y que en los puntos A y B actúan unos pesos de diez kilogramos.

§ 3. CONVERGENCIA DE INTEGRALES. INTEGRACION DE SERIES FUNCIONALES

1. Convergencia de integrales con un límite de integración infinito.

DEFINICIÓN 1.—Sea $f(x)$ una función definida para todo $x \geq a$, lo que se acostumbra a expresar diciendo que $f(x)$ está definida en la semirrecta $recta [a, \infty)$; supongamos que $f(x)$ sea integrable en todo segmento $[a, t]$, $a < t$. Sea

$$(1) \quad F(t) = \int_a^t f(x) dx,$$

si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = L < \infty$$

se dice que la integral (1) es convergente cuando t tiende a $+\infty$ y se escribe:

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = L = \int_a^\infty f(x) dx.$$

Análogamente se define

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx = l = \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$

Estas integrales con un límite de integración infinito son llamadas también integrales impropias.

Si la función $f(x)$ está definida en todo el cuerpo real y si es integrable en todo segmento del mismo, se define

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow -\infty}} \int_z^y f(x) dx,$$

en donde el límite es el de una función de dos variables independientes (y, z) .

Las series numéricas aparecen como un caso particular de integrales con el límite superior de integración igual a $+\infty$. En efecto, consideremos la función $u(x) = u_n$ para $n-1 < x \leq n$ (figura 127). Se verifica que

$$(5) \quad \int_0^n u(x) dx = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

de donde

$$(6) \quad \int_0^{\infty} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + \dots + u_n);$$

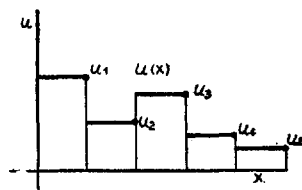


Fig. 127.

por consiguiente, cuanto se diga de las integrales con el límite superior de integración igual a $+\infty$ es válido, en particular, para las series numéricas.

TEOREMA 1.—Si la integral

$$(7) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = L$$

es convergente, lo es también la serie de término general

$$(8) \quad u_n = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, de la hipótesis se deduce que, dado un número positivo arbitrario ε , se puede hallar otro número real M tal que para todo $t > M$ se verifique

$$\left| L - \int_a^t f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Si N es un número natural tal que $a + N > M$, para todo $n > N$ será

$$\left| L - \int_a^{a+n} f(x) dx \right| = \left| L - (u_1 + \dots + u_n) \right| < \varepsilon.$$

El teorema recíproco no es siempre cierto, porque, como es sabido, para la convergencia de una función no basta con la convergencia de una sucesión de valores de la misma.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA.—I. Si existe $\int_a^t f(x) dx$ para todo $t > a$ y si $f(x) \geq 0$ para todo $x > a$, la condición necesaria y suficiente para que $\int_a^\infty f(x) dx$ sea convergente es que exista un número M tal que, para todo t , se verifique $\int_a^t f(x) dx < M$. En efecto, si $t' > t$ se verifica que

$$\int_a^{t'} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx = \int_t^{t'} f(x) dx \geq 0,$$

lo que prueba que la función $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ es una función no decreciente y como, por hipótesis, está acotada superiormente, es convergente, siendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = \text{ext. sup.} \left(\int_a^t f(x) dx \right).$$

La condición necesaria es trivial.

II. Si existe $\int_a^t f(x) dF(x)$ para todo $t > a$, si $f(x) \geq 0$ y si $F(x)$ es monótona no decreciente, la condición necesaria y suficiente para que

$\int_a^{\infty} f(x) dF(x)$ sea convergente es que exista un número real M tal que, para todo t , sea $\int_a^t f(x) dF(x) < M$. La demostración es totalmente análoga a la anterior, correspondiente a la integral de Riemann.

III. Si existe $\int_a^t f(x) dx$ para todo $t > a$ y si para todo $x > a$ es $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y si la integral $\int_a^{\infty} g(x) dx$ es convergente, también lo es $\int_a^{\infty} f(x) dx$. En efecto, para todo t se verifica

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx,$$

y basta aplicar el criterio I.

IV. Si existe $\int_a^t f(x) dF(x)$ para todo $t > a$, si para todo $x > a$ es $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y si para todo $x > a$ es $F(x)$ no decreciente, la convergencia de $\int_a^{\infty} g(x) dF(x)$ implica la de $\int_a^{\infty} f(x) dF(x)$. Es consecuencia de II.

V. Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x > a$ y si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, las integrales $\int_a^{\infty} f(x) dx$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$ son convergentes o divergentes al mismo tiempo; siempre, naturalmente, que existan $\int_a^t f(x) dx$ e $\int_a^t g(x) dx$ para todo $t > a$. En efecto, dado un ϵ positivo arbitrario, suficientemente pequeño para que $l - \epsilon > 0$, existe un M tal que para todo $x > M$ sea

$$l - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \epsilon, \quad \text{o bien,} \quad (l - \epsilon) g(x) < f(x) < (l + \epsilon) g(x),$$

$$\frac{1}{l + \epsilon} f(x) < g(x) < \frac{1}{l - \epsilon} f(x)$$

y basta aplicar el criterio III.

Si $l = 0$, la convergencia de $\int_0^{\infty} g(x) dx$ implica la de $\int_0^{\infty} f(x) dx$, pero la recíproca no es cierta. El criterio V es válido para la integral de Riemann-Stieltjes respecto de una función de distribución no decreciente.

LEMA 1.— Si son convergentes las integrales

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{\infty} g(x) dx,$$

lo es también la siguiente integral del primer miembro y se verifica

$$(9) \quad \int_a^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^{\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{\infty} g(x) dx,$$

siendo α y β números reales arbitrarios. Esto es consecuencia de la linealidad de la operación del paso al límite de funciones y de la relación

$$\int_a^t [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^t f(x) dx + \beta \int_a^t g(x) dx.$$

LEMA 2.—FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.—Si las integrales $\int_a^{\infty} f dg$ y $\int_a^{\infty} g df$ son convergentes se verifica que

$$\int_a^{\infty} f dg + \int_a^{\infty} g df = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)g(t)] - f(a)g(a).$$

Esta propiedad es consecuencia de la fórmula de integración por partes y de la aditividad del paso al límite.

V. Si existe $\int_a^t f(x) dx$ para todo $t > a$, la convergencia de

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

implica la de $\int_a^\infty f(x) dx$. Esto es consecuencia de

$$a \leq x \Rightarrow 0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|.$$

del criterio III y del lema 1.

DEFINICIÓN 2.—Si existe $\int_a^t f(x) dx$ para todo $t > a$ y si la integral $\int_a^\infty |f(x)| dx$ es convergente, se dice que la integral $\int_a^\infty f(x) dx$ es absolutamente convergente.

Todos los criterios anteriores sirven para demostrar la convergencia absoluta de una integral. Para la convergencia no absoluta existen los siguientes, análogos a los de Cauchy y Dirichlet para las series.

VII. CRITERIO DE CAUCHY.—Si existe $\int_a^t f(x) dx$ para todo $t > a$, la condición necesaria y suficiente para que $\int_a^\infty f(x) dx$ sea convergente es que, dado un número positivo arbitrario ϵ , exista un número real M tal que, para todo par de números y, z tales que $M < y < z$, se verifique que

$$(10) \quad \left| \int_y^z f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Este criterio es el mismo que el criterio de Cauchy para la convergencia de la función $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ cuando $t \rightarrow \infty$ (def. 1, 2, § 4, cap. V).

VIII. CRITERIO DE DIRICHLET.—Si $f(x)$ es una función monótona no creciente en la semirrecta $[a, \infty)$ y se verifica que: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; b) $F(x)$ está acotada para $x > a$; c) existe $\int_a^t f(x) dF(x)$ para todo $t > a$; entonces la integral $\int_a^\infty f(x) dF(x)$ es convergente.

EJERCICIOS:

1.084. Comprobar que $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ es absolutamente convergente cuando $a > 0$, y divergente cuando $a < 0$.

1.085. Comprobar la convergencia de. a) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{1+(ax)^2}$. b) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n}$, $n > 1$, $a \geq 1$.

1.086. Comprobar que

$$S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right) = \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

siendo $f(x) = n$ para $n \leq x \leq n + \frac{1}{n 2^n}$; $n = 1, 2, \dots$, y $f(x) = 0$ en los restantes puntos de la recta real.

1.087. Averiguar si es convergente la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{a+x} dx.$$

1.088. Deducir el criterio de convergencia: $\sum n^{-v}$ es convergente para $v > 1$, y divergente para $v \leq 1$.

1.089. Averiguar la convergencia de las siguientes integrales:

$$a) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx; \quad b) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} dx;$$

1.090.

$$\int_1^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx.$$

2. Convergencia de integrales con integrando no acotado.—En todas las definiciones de integral estudiadas en el § 1 del presente capítulo se supone que la función integrando está acotada. Vamos a generalizar ahora la definición al caso en que no se cumpla esta condición.

DEFINICIÓN 1.—Sea $f(x)$ una función definida en el *semi-intervalo* $(a, b]$; esto es, para todo x tal que $a < x \leq b$. Supongamos que exista $\int_t^b f(x) dx$ para todo t tal que $a < t < b$. Se define:

$$(11) \quad \int_{a+0}^b f(x) dx = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \int_t^b f(x) dx.$$

Si existe el límite (11) se dice que la integral del primer miembro es *convergente*. Si la integral $\int_{a+0}^b |f(x)| dx$ es convergente, se dice que la integral

$\int_{a+0}^b f(x) dx$ es *absolutamente convergente*.

Las demostraciones de los siguientes criterios de convergencia son completamente análogas a las vistas en el número anterior, por lo que prescindiremos de ellas.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA.—I. Si existe $\int_a^b f(x) dx$ para todo $a < t < b$ y si $f(x) \geq 0$ para todo $a < x \leq b$, la condición necesaria y suficiente para que $\int_{a+0}^b f(x) dx$ sea convergente es que exista un número M tal que $\int_a^t f(x) dx < M$ para todo $t \in (a, b]$.

II. Si existe $\int_a^b f(x) dx$ para todo $t \in (a, b]$ y si para todo $x \in (a, b]$ se verifica que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces la convergencia de $\int_{a+0}^b g(x) dx$ implica la de $\int_{a+0}^b f(x) dx$.

III. Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b]$ y si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, las integrales $\int_{a+0}^b f(x) dx$ e $\int_{a+0}^b g(x) dx$ son convergentes o divergentes al mismo tiempo, siempre que existan $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ para todo $t \in (a, b]$. Si $l = 0$, la convergencia de $\int_{a+0}^b g(x) dx$ implica la de $\int_{a+0}^b f(x) dx$.

LEMA 1.—Si son convergentes las integrales

$$\int_{a+0}^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{a+0}^b g(x) dx,$$

lo es también la siguiente integral del primer miembro y se verifica:

$$(11) \quad \int_{a+0}^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_{a+0}^b f(x) dx + \beta \int_{a+0}^b g(x) dx,$$

siendo α y β números reales arbitrarios.

LEMA 2.—Fórmula de integración por partes. Si las integrales $\int_{a+0}^b f dg$ e $\int_{a+0}^b g df$ son convergentes, se verifica que

$$(12) \quad \int_{a+0}^b f dg + \int_{a+0}^b g df = f(b)g(b) - f(a+0)g(a+0).$$

IV. Si existe $\int_t^b f(x) dx$ para todo $t \in (a, b]$, la convergencia de $\int_{a+0}^t |f(x)| dx$ implica la de $\int_{a+0}^t f(x) dx$. Esta propiedad justifica la denominación de convergencia absoluta.

V. CRITERIO DE CAUCHY.—Si existe $\int_t^b f(x) dx$ para todo $x \in (a, b]$, la condición necesaria y suficiente para que $\int_{a+0}^b f(x) dx$ sea convergente es que, dado un número positivo arbitrario ϵ , se pueda hallar otro δ tal que, para todo par y, z tales que $a < y < z < a + \delta$, se verifique que

$$\left| \int_y^z f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Todos estos criterios son también válidos para integrales de Riemann-Stieltjes cuando la función de distribución es monótona no decreciente.

DEFINICIÓN 2.—Se define

$$(13) \quad \int_{a+0}^{\infty} f(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx, \quad \text{para cualquier } b \text{ tal que } a < b < \infty.$$

El segundo miembro, si existe, no depende de b , puesto que si, por ejemplo, $b < c$, sería:

$$\begin{aligned} \int_b^{\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_b^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_b^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx \right] \\ &= \int_b^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx = \int_b^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \end{aligned}$$

y este último límite existe siempre que exista el del primer miembro.

Si las dos integrales del segundo miembro de (13) son convergentes, se dice que *la integral del primer miembro es convergente*.

Análogamente se definen las siguientes integrales:

$$(14) \quad \int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \int_{a+0}^c f(x) dx + \int_c^{b-0} f(x) dx, \quad a < c < b.$$

$$(15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

EJERCICIOS:

1.091. Averiguar la convergencia de

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^a} dx.$$

1.092. Demostrar que para $x > 0$ es convergente la siguiente integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1.093. Integrando por partes en el segundo miembro de la igualdad del ejercicio anterior, demostrar que

$$\Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1).$$

1.094. Empleando los resultados de los dos ejercicios anteriores, probar que

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad \text{cuando } x \text{ es natural.}$$

1.095. Demostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sh} x \, dx$ no es convergente y que, sin embargo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \operatorname{sh} x \, dx = 0.$$

Cuando existe el límite de $\int_{-t}^t f(x) \, dx$, cuando $t \rightarrow \infty$, a su valor se le llama valor principal de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$; sin embargo, como se ve en el ejercicio anterior, la existencia del valor principal no implica la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$.

EJERCICIO:

1.096. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx, \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x} \, dx, \quad \text{c) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \, dx, \quad \text{d) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} \, dx.$$

3. Integrales dependientes de un parámetro.

DEFINICIÓN 1.—Sea $f(x, y)$ una función continua de dos variables independientes en el intervalo cerrado $I = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ (*). Si existe la integral

$$(16) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

(*) Para la definición de función continua de dos variables, véase (3, § 4, capítulo V).

para todo y del segmento $[c, d]$, se dice que la integral (16) depende del parámetro y , variable en $[c, d]$.

PROPIEDADES.—I. Si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo I , y si (16) existe para todo y del segmento $[c, d]$, la función $F(y)$ es continua en $[c, d]$. En efecto, si $\mathcal{G}(F(y))$ es un entorno arbitrario de $F(y)$, $c \leq y \leq d$, por ser $f(x, y)$ continua en I es uniformemente continua, luego si ϵ es el radio de un entorno circular contenido totalmente en $\mathcal{G}(F(y))$, se puede hallar un δ tal que para todo par de puntos (x, y) , (x', y') de I tales que su distancia sea inferior a δ , se verifique que $|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Si $|y - y'| < \delta$, será.

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} |F(y') - F(y)| &= \left| \int_a^b [f(x, y') - f(x, y)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b dx = \epsilon. \end{aligned} \right.$$

II. Si $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ es continua en el rectángulo I , existe la derivada de $F(y)$ en todo el segmento $[c, d]$, es continua en él y viene dada por

$$(18) \quad F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

En efecto, de (16) se deduce

$$(19) \quad \left| \frac{F(y') - F(y)}{y' - y} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| dx;$$

ahora bien, por existir $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, dado un número positivo arbitrario ϵ , se puede hallar un δ tal que para todo $|y' - y| < \delta$ sea el integrando del último miembro de (19) inferior a $\frac{\epsilon}{b-a}$, con lo que el primero resulta inferior a ϵ . La continuidad de $F'(y)$ es consecuencia de la continuidad de $f'_y(x, y)$ en I .

La definición 1 y las dos propiedades anteriores son válidas también para la integral de Riemann-Stieltjes cuando la función de distribución es monótona.

DEFINICIÓN 2.—Si existe la integral de $f(x) dx$ en todo segmento contenido en $[a, b]$, y si $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son aplicaciones del segmento $[c, d]$ en $[a, b]$, existe $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x) dx$ para todo $y \in [c, d]$ y se obtiene la función de y :

$$(20) \quad F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x) dx,$$

que es también una integral dependiente del parámetro y .

DEFINICIÓN 3.—Se pueden combinar los dos tipos de integrales dependientes de un parámetro (16) y (20) y se obtiene el tipo más general siguiente:

$$(21) \quad F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx.$$

PROPIEDADES.—I. Si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo I , y si $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ lo son en el segmento $[c, d]$, la función (21) es continua en $[c, d]$. En efecto:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} |F(y + dy) - F(y)| &= \left| \int_{\varphi(y+dy)}^{\psi(y+dy)} f(x, y+dy) dx - \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right| \\ &= \left| \int_{\varphi(y+dy)}^{\varphi(y)} f(x, y+dy) dx + \int_{\psi(y)}^{\psi(y+dy)} f(x, y+dy) dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} [f(x, y+dy) - f(x, y)] dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y)+\Delta\varphi(y)} f(x, y+dy) dx \right| + \left| \int_{\psi(y)}^{\psi(y)+\Delta\psi(y)} f(x, y+dy) dx \right| + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x, y+dy) - f(x, y)| dx \\ &= |\Delta\varphi(y)| |f(x + \theta \Delta\varphi, y + dy)| + |\Delta\psi(y)| |f(x + \theta' \Delta\psi, y + dy)| \\ &\quad + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} |f(x, y+dy) - f(x, y)| dx. \end{aligned} \right.$$

Ahora bien, dado un número positivo arbitrario ε , existen los números positivos δ_1 , δ_2 y δ_3 , tales que: 1) para $|dy| < \delta_1$, sea

$$|\Delta\varphi(y)| = |\varphi(y + dy) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

siendo M un número tal que $|f(x, y)| < M$ para todo $(x, y) \in I$. (El número M existe por ser $f(x, y)$ continua en I .) 2) Para $|dy| < \delta_2$ sea

$$|\Delta \psi(y)| < \frac{\epsilon}{3M}.$$

3) Para $|dy| < \delta_3$ sea

$$|f(x, y + dy) - f(x, y)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}.$$

Si $\delta = \min. \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ se verifica que para todo $|dy| < \delta$ es, en virtud de (22),

$$|F(y + dy) - F(y)| < \epsilon.$$

II. Si existen las derivadas $\varphi'(y)$, $\psi'(y)$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ en $[c, d]$ e I , respectivamente, existe también la derivada de $F(y)$ (21) y se verifica que

$$(23) \quad F'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y).$$

En efecto, $F(y)$ es una función de y por intermedio de las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$, luego aplicando la fórmula de derivación de las funciones compuestas se obtiene

$$F'(y) = \Phi'(\varphi(y), \psi(y), y) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \varphi'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \psi'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\int_{\varphi + \Delta \varphi}^{\psi} f dx - \int_{\varphi}^{\psi} f dx}{\Delta \varphi} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\int_{\varphi + \Delta \varphi}^{\varphi} f dx}{\Delta \varphi} \\ &= - \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi \cdot f(\varphi + \theta \Delta \varphi, y)}{\Delta \varphi} = -f(\varphi, y). \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = f(\psi(y), y)$, y $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$; en virtud del II (def. 1), es igual a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{\varphi}^{\psi} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

La fórmula (23) se conoce con el nombre de *fórmula de derivación bajo el signo* $\int$.

INTEGRACIÓN BAJO EL SIGNO INTEGRAL.—Si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $I = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$, se verifica que

$$(24) \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sustituyendo la constante d por una variable t en el segmento $[c, d]$, vamos a demostrar que la función

$$(25) \quad F(t) = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx$$

es igual a la función

$$(26) \quad G(t) = \int_c^t \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

en todos los puntos del segmento $[c, d]$, con lo que, en particular, se habrá probado (24). Desde luego, $F(c) = G(c) = 0$, por lo que basta probar que $F(t)$ y $G(t)$ poseen la misma derivada. Ahora bien:

$$F'(t) = \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \int_c^t f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b f(x, t) dx$$

y

$$G'(t) = \int_a^b f(x, t) dx,$$

q. e. d.

CONVERGENCIA DE UNA INTEGRAL SIMPLE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES.

TEOREMA.—Si $f(x, y)$ es uniformemente convergente respecto de la variable y , y existe la integral del primer miembro para todo y de $[c, d]$, se verifica que

$$(27) \quad \lim_{y \rightarrow t} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left[\lim_{y \rightarrow t} f(x, y) \right] dx, \quad c \leq t \leq d.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $F(x) = \lim_{y \rightarrow t} f(x, y)$. Por ser f uniformemente convergente respecto de y , dado un número positivo arbitrario ϵ , se puede hallar otro $\delta(\epsilon)$ tal que, para todo y tal que $|y - t| < \delta$, se verifique que

$$|F(x) - f(x, y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Por consiguiente, para todo y tal que $|y - t| < \delta$, será:

$$\left| \int_a^b F(x) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| \leq \int_a^b |F(x) - f(x, y)| dx < \epsilon,$$

lo que prueba que

$$\lim_{y \rightarrow t} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b F(x) dx.$$

DEFINICIÓN 5.—Supongamos que la integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ sea convergente para todo valor de y perteneciente al segmento $[c, d]$. Queda así definida la función

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

en el segmento $[c, d]$. Esto se expresa diciendo que $F(y)$ es el límite de la integral $\int_a^t f(x, y) dx$ cuando t tiende a ∞ , o que la integral converge a $F(y)$ o es convergente. Ahora bien, esta convergencia es demasiado general para estudiar propiedades de la función $F(y)$ así definida. La integral $\int_a^t f(x, y) dx$ converge uniformemente a la función $F(y)$ cuando dado un número positivo arbitrario ϵ existe otro, $M(\epsilon)$, que depende únicamente de ϵ , tal que para todo $t > M(\epsilon)$ se verifique

$$\left| F(y) - \int_a^t f(x, y) dx \right| < \epsilon.$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA UNIFORME. I. CRITERIO DE CAUCHY.—La condición necesaria y suficiente para que $\int_a^\infty f(x, y) dx$ sea uniformemente convergente en $[c, d]$ es que, dado un número positivo arbitrario ϵ , se pueda hallar otro $M(\epsilon)$, que depende únicamente de ϵ , tal que para todo par t, t' mayores que $M(\epsilon)$ sea

$$\left| \int_t^{t'} f(x, y) dx \right| < \epsilon.$$

II. CRITERIO DE LA MAYORANTE DE WEIERSTRASS.—Una condición suficiente para la convergencia uniforme de $\int_a^t f(x, y) dx$ es la existencia de una función mayorante $M(x)$, tal que, para todo $y \in [c, d]$, se verifique

$$|f(x, y)| \leq M(x),$$

y que

$$\int_a^\infty M(x) dx$$

sea convergente.

III. CRITERIO DE DIRICHLET.—La integral $\int_a^t f(x, y) dx$ converge uniformemente en el segmento $c \leq y \leq d$ si se verifican las siguientes condiciones: a) Existe la integral para todo $t > a$ y para todo $y \in [c, d]$. b) La función $f(x, y)$ es no creciente respecto de x . c) Existe una función positiva $g(x)$, definida para $a \leq x < \infty$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, y para todo x y todo $y \in [c, d]$ se verifica que $|f(x, y)| \leq g(x)$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DEFINIDAS COMO LÍMITES DE INTEGRALES.—Supondremos en lo que sigue que existe

$$(28) \quad F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d.$$

I. Si $f(x, y)$ es continua en $R = \{a \leq x < \infty, c \leq y \leq d\}$ y la convergencia de $\int_a^t f(x, y) dx$ a $F(y)$ es uniforme, se verifica que $F(y)$ es continua en $[c, d]$. En efecto, $F(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y)$, siendo

$$\Phi(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx.$$

Sea ε un número positivo arbitrario y $c \leq y \leq d$:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F(y+dy) - F(y)| \\ = |F(y+dy) - \Phi(t, y+dy) + \Phi(t, y+dy) - \Phi(t, y) + \Phi(t, y) - F(y)| \\ \leq |F(y+dy) - \Phi(t, y+dy)| + |\Phi(t, y+dy) - \Phi(t, y)| + |\Phi(t, y) - F(y)|. \end{array} \right.$$

Por ser la convergencia uniforme se puede hallar un $M(\varepsilon)$ tal que, para todo $t > M(\varepsilon)$, sea

$$(30) \quad |F(y+dy) - \Phi(t, y+dy)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad y \quad |\Phi(t, y) - F(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Phi(t, y+dy) - \Phi(t, y)| = \left| \int_a^t f(x, y+dy) dx - \int_a^t f(x, y) dx \right| \\ = \left| \int_a^t (f(x, y+dy) - f(x, y)) dx \right| \leq \int_a^t |f(x, y+dy) - f(x, y)| dx \end{array} \right.$$

y por ser $f(x, y)$ continua, existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que, para $|dy| < \delta$, sea

$$|f(x, y+dy) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3(t-a)}.$$

De esta relación, de (31), (30) y (29) resulta que $|F(y+dy) - F(y)| < \varepsilon$ siempre que $|dy| < \delta$.

II. Si existe y es continua $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ en todo punto de $R = \{a \leq x < \infty, c \leq y \leq d\}$; existe en virtud de II (def. 1),

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^t f(x, y) dx$$

en todo R . Si $\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y}$ converge uniformemente en $[c, d]$, se verifica que existe $F'(y)$ en todo $[c, d]$ y que

$$(32) \quad F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y}.$$

III. Si $f(x, y)$ es continua en $R = \{a \leq x < \infty, c \leq y \leq d\}$, y si

$$\Phi(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$$

converge uniformemente a

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx,$$

se verifica que existe

$$(33) \quad \int_c^z F(y) dy = \int_c^z dy \int_a^\infty f(x, y) dx, \quad c \leq z \leq d.$$

Puesto que, en virtud de las hipótesis y de I, es $F(y)$ una función continua en $[c, d]$.

IV. En las hipótesis de III se verifica que

$$\int_c^z dy \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_c^z f(x, y) dy, \quad c \leq z \leq d.$$

EJERCICIOS:

1.097. ¿Es uniformemente convergente la siguiente integral cuando t tiende a $+\infty$?

$$\int_0^t e^{-yx} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \Phi(t, y).$$

1.098. Calcular la derivada de $F(y)$ siendo:

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

1.099. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, calcular

$$\int_0^\infty e^{-yx} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y}.$$

1.100. Calcular, a partir del ejercicio precedente (tomando límites cuando $y \rightarrow 0$), la siguiente integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

1.101. Comprobar que la función

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yx \, dx}{(x^2 + y^2)^{3/4}}$$

es discontinua para $y = 0$.

1.102. Demostrar que la función euleriana de segunda especie

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

es derivable bajo el signo integral para $x > 0$.

1.103. Hallar la región de la recta real para la que converge uniformemente la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}.$$

1.104. Comprobar que

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n dx.$$

4. Integración de series funcionales.—Una serie funcional es una expresión de la forma

$$(34) \quad u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_1^{\infty} u_i(x),$$

en donde las $u_i(x)$ son funciones reales y uniformes de la variable real x , definidas en un intervalo (a, b) . A partir de (34) se obtiene la *sucesión de las sumas parciales*

$$(35) \quad s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x) = s(x, n), \quad n = 1, 2, \dots$$

que pueden considerarse como funciones de dos variables independientes: la variable real x y la variable natural n .

La serie (34) se dice que es convergente para $x = c$, $a < c < b$, cuando lo es la serie numérica que se obtiene al sustituir x por c en (34). Por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para que (34) sea convergente para $x = c$ es que, dado un número positivo arbitrario ε , exista un número $N(\varepsilon, c)$ que depende de ε y de c tal que para todo par $n', n > N$ se verifique que

$$|s_{n'}(u) - s_n(u)| = |u_{n+1}(c) + \dots + u_{n'}(c)| < \varepsilon.$$

La serie (34) se llama *uniformemente convergente* en (a, b) cuando el número N no depende del punto c de (a, b) que se considere.

Si las funciones $u_i(x)$ son continuas en (a, b) , también lo son las funciones $s_n(u) = s(x, n)$ y, por tanto, son integrables en cualquier segmento $[c, d]$ contenido en (a, b) , esto es, existen las integrales

$$\int_c^d s_n(u) dx = \int_c^d s(x, n) dx.$$

TEOREMA 1.—Si la serie (34) de funciones continuas en (a, b) es uniformemente convergente en (a, b) , se verifica que

$$(36) \quad \int_c^d \sum_1^\infty u_n(x) dx = \sum_1^\infty \int_c^d u_n(x) dx, \quad a < c < d < b.$$

DEMOSTRACIÓN.—El teorema es un caso particular del teorema de la definición 4, ya que se puede escribir, en virtud de (27):

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \int_c^d u_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \int_c^d u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \left(\sum_1^n u_n \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d s(x, n) dx = \int_c^d \lim_{n \rightarrow \infty} s(x, n) dx = \int_c^d \left(\sum_1^\infty u_n(x) \right) dx \end{aligned}$$

Vamos a demostrarlo también directamente. Sea

$$u(x) = \sum_1^\infty u_n(x).$$

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d u(x) dx - \sum_1^n \int_c^d u_i(x) dx \right| &= \left| \int_c^d u(x) dx - \int_c^d \sum_1^n u_i(x) dx \right| \\ &= \left| \int_c^d \left(u(x) - \sum_1^n u_i(x) \right) dx \right| \leq \int_c^d \left| u(x) - \sum_1^n u_i(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Por ser la convergencia uniforme, dado un número positivo arbitrario ε se puede hallar un número natural $N(\varepsilon)$ tal que para todo $n > N$ sea

$$\left| u(x) - \sum_1^n u_i(x) \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

con lo que queda probado el teorema.

TEOREMA 2.—Si la serie (34) de funciones continuas en $[a, \infty)$ es uniformemente convergente en todo segmento $[a, t]$ $a < t < \infty$, y son convergentes las integrales $\int_a^\infty u_n(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$, y si $\int_a^\infty u(x) dx$ es convergente, siendo $u(x) = S\left(\sum_1^\infty u_n(x)\right)$, se verifica que

$$(37) \quad \int_a^\infty \sum_1^\infty u_n(x) dx = \sum_1^\infty \int_a^\infty u_n(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \sum_1^\infty u_n(x) dx - \sum_1^n \int_0^\infty u_n(x) dx \right| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u(x) dx - \sum_1^n \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u_n(x) dx \right| \\ &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u(x) dx - \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_1^n \int_0^t u_n(x) dx \right| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t u(x) dx - \sum_1^n \int_0^t u_n(x) dx \right] \right| \\ &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^t u(x) dx - \int_0^t \sum_1^n u_n(x) dx \right] \right| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[u(x) - \sum_1^n u_n(x) \right] dx \right| \\ &\leq \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\varepsilon}{t} dx \right| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon \right| = \varepsilon \end{aligned}$$

TEOREMA 3.—De Tannery. Hipótesis: a) La sucesión de funciones $u_n(x)$ converge uniformemente en $[a, t]$ para todo $t > a$. b) Existe $\int_a^t u_n(x) dx$ para todo $t > a$ y todo n . c) Existe una función $g(x)$ tal que $|u_n(x)| < g(x)$ para $n = 1, 2, \dots$ y todo $x \geq a$. d) $\int_a^t g(x) dx$ es convergente cuando $t \rightarrow \infty$.

TESIS: $\int_a^t \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx$ converge absolutamente cuando $t \rightarrow \infty$ y existe una sucesión divergente $p_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{p_n} u_n(x) dx = \int_a^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx.$$

EJERCICIOS:

1.105. De $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x$ se deduce que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. Desarrollar $(1+x^2)^{-1}$ en serie y calcular con un error inferior a 10^{-1} el valor de π .

1.106. Calcular $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error inferior a 10^{-3} .

1.107. Averiguar si se pueden integrar término a término las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos mx}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin mx}{n^2} \quad \text{entre } -\pi \text{ y } +\pi.$$

1.108. Calcular, con un error inferior a 10^{-3} , $\int_0^{0.8} \frac{\cos x}{dx}$.

1.109. Calcular con un error inferior a 10^{-2} la integral elíptica $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0.7 \sin^2 2\varphi} d\varphi$

1.110. ¿Se verifica siempre la siguiente relación

$$\int_0^\infty e^{-\rho x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\infty e^{-\rho x} x^n dx?$$

1.111. La función $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ se llama *seno integral*. Calcular el desarrollo en serie de potencias de $Si(x)$ y su campo de convergencia.

1.112. Análogo problema para $Ci(x) = -\log x$, siendo $Ci(x)$ el *coseno integral*:

$$Ci(x) = \int_{+\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt.$$

§ 4. APLICACIONES GEOMETRICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Cálculo de áreas de figuras planas.—El problema de la medida de un conjunto de puntos del plano es un caso particular del problema de la medida de magnitudes (17, 3, § 1, cap. II). La mayor dificultad está en convertir el conjunto $\mathfrak{C}$ de los conjuntos que se consideren en un semigrupo aditivo, ordenado como tal semigrupo y arquimediano. Ahora nos interesa únicamente considerar conjuntos D que sean cerrados y con un único borde formado por una curva que pueda representarse mediante ecuaciones continuas y derivables de la forma $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ cuando

$$0 \leq t \leq 1, \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \psi(0) = \psi(1).$$

Llamaremos $\mathfrak{C}^*$ al conjunto cuyos elementos son de la forma

$$D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_r; \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad D_i \in \mathfrak{C} \quad i = 1, \dots, r.$$

En $\mathfrak{C}^*$ se define la siguiente relación de igualdad: dos conjuntos D y D' de $\mathfrak{C}^*$ se llaman iguales respecto de la relación E , o equivalentes, cuando existe un movimiento que transforma uno en otro, o bien cuando se pueden descomponer en un número finito o infinito numerable de partes iguales en el sentido anterior. En $M := \mathfrak{C}^*/E$ se puede definir una adición del siguiente modo: si $\overline{C}$ y $\overline{C'}$ pertenecen a M se toma un representante C de $\overline{C}$ y otro C' de $\overline{C'}$ tales que C y C' no tengan ningún punto común. Se llama $\overline{C} + \overline{C'}$ al elemento de M engendrado por el representante $C \cup C'$, esto es,

$$(1) \quad \overline{C} + \overline{C'} = \overline{C \cup C'}, \quad C \cap C' = \emptyset.$$

El conjunto M así obtenido es un semigrupo ordenado y arquimediano. Por consiguiente, es una magnitud escalar y puede medirse. Ahora bien, medir M significa simplemente (l. c.) establecer un isomorfismo del semigrupo M en el semigrupo aditivo de los números reales no negativos. A este isomorfismo se le llama *área*; por comodidad se llama también *área* al número real correspondiente. Representaremos esta función por la letra a :

$$(2) \quad M \xrightarrow{a} \mathbb{R}^+$$

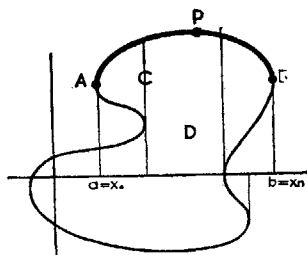


Fig. 127.

en donde $\mathbb{R}^+$ es el semigrupo aditivo de los números reales no negativos. Si $\overline{C} \in M$, $a(\overline{C})$ es un número real no negativo que se llama área de $\overline{C}$. Por ser E una relación de igualdad, se puede decir que $a(\overline{C})$ es el área de cualquiera de las figuras de $\overline{C}$. Por ser a un isomorfismo se verifica

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \overline{C} = \overline{C'} \Leftrightarrow a(\overline{C}) = a(\overline{C'}) \\ \text{II. } a(\overline{C}_1 + \dots + \overline{C}_n) = a(\overline{C}_1) + \dots + a(\overline{C}_n). \end{array} \right.$$

De (3) se deduce que

$$(4) \quad \overline{C} \leq \overline{C'} \Rightarrow a(\overline{C}) \leq a(\overline{C'}).$$

Vamos a ver que el cálculo integral permite calcular $a(\overline{C})$ para todo $\overline{C} \in M$. Para ello basta demostrarlo para los elementos de $\mathbb{C}^*$ que pertenecen a $\mathbb{C}$. Sea, por tanto, un conjunto C de $\mathbb{C}$ tal como el de la figura 127, cuyo borde viene representado por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Si P es un punto del borde en el que no se anule $\varphi'(t)$, se puede invertir la función $x = \varphi(t)$ en un entorno de P : $t = \varphi^{-1}(x)$, y la curva se puede representar, en un cierto entorno de P (el señalado con trazo más negro en la figura), mediante una función de la forma $y = f(x)$, $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Sean A y B los extremos de este entorno, y a y b sus respectivas abscisas. Sea

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

una partición de $[a, b]$. Sea D la región limitada por el eje x , las paralelas al eje y por a y b y el arco $\widehat{AB}$. A la partición P se le pueden hacer corresponder dos polígonos $\mathcal{P}_m(P)$ y $\mathcal{P}_M(P)$. El primero es la suma de los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura m_i ; el segundo es la suma de los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura M_i , siendo m_i y M_i los extremos inferior y superior, respectivamente, de $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$. Se verifica, evidentemente, que

$$(5) \quad \mathcal{P}_m(P) \subset D \subset \mathcal{P}_M(P).$$

De (5), en virtud de (4), se deduce

$$a(\mathcal{P}_m(P)) \leq a(D) \leq a(\mathcal{P}_M(P)),$$

pero como por estar todo el arco $\widehat{AB}$ por encima del eje x ,

$$a(\mathcal{P}_m(P)) = s_D(P) \quad \text{y} \quad a(\mathcal{P}_M(P)) = S_D(P),$$

siendo s_D y S_D las sumas de Darboux de la partición P (1, § 1), resulta que, para cualquier partición P de $[a, b]$, se verifica que

$$(6) \quad s_D(P) \leq a(D) \leq S_D(P).$$

Ahora bien, por ser ψ y φ^{-1} funciones continuas, $f(x)$ es continua y por tanto integrable, luego entre todos los números s_D y S_D sólo hay uno, que es la integral

$$(7) \quad s_D(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_D(P).$$

De (6) y (7) y de la unicidad del número comprendido entre las sumas de Darboux, resulta que

$$(8) \quad a(D) = \int_a^b f(x) dx.$$

La fórmula (8) permite calcular el área de C a trozos.

Es importante observar que la igualdad (8) se ha obtenido en la hipótesis de encontrarse todo el recinto D por encima del eje x . Si no se cumple esta condición, la igualdad (8) no es cierta. Ahora bien, si el eje x corta al recinto cuya área se desea calcular, efectuando una traslación de ejes se puede evitar esta circunstancia. Por otra parte, no es necesario realizar tal traslación si se descompone el recinto C en dos subrecintos C_1 y C_2 , situados el primero sobre el eje x y el segundo por debajo. Se calculan independientemente las áreas de uno y otro, únicamente que para C_2 se verificará

$$(9) \quad a(C_2) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

EJERCICIOS:

1.113. Calcular el área del segmento parabólico limitado por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 1$ (fig. 128).

1.114. Tomar como variable independiente en el ejercicio anterior y .

1.115. Calcular el área limitada por la parábola $y^2 - 2y + 1 - x = 0$, el eje x y la recta $x = 2$ (fig. 129).

1.116. Obsérvese que, por tratarse de curvas con derivadas continuas, los puntos de ramificación deben coincidir con los puntos de tangentes paralelas al eje y . Para calcular un área debe comenzarse por determinar los puntos de ramificación. Se ha visto que si la ecuación de la curva viene dada en la forma $f(x, y) = 0$, los puntos de ramificación respecto de x pertenecen al conjunto de puntos de la curva para los que $f_y(x, y) = 0$. Comprobar esto, respecto de la variable de uniformización x , en el ejercicio anterior.

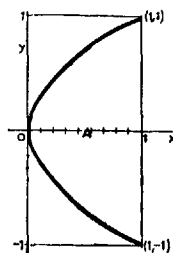


Fig. 128.

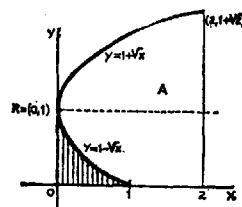


Fig. 129

1.117. Calcular el área limitada por la curva $y^2 - 2y + 1 - x^2 + x^3 = 0$ situada a la derecha del eje y (fig. 130).

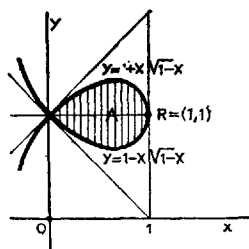


Fig. 130.

1.118. Si la figura cuya área se desea calcular posee un eje de simetría conviene tomarlo como eje de las x , y si posee más de uno conviene tomar los ejes de coordenadas de modo que sean ejes de simetría. Ejemplo: Calcular el área limitada por la curva $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$.

1.119. Calcular el área del recinto limitado por la curva $x = \cos t$, $y = \cos^2 t + \sin t$.

1.120. Calcular el área de la elipse y de un sector de hipérbola.

1.121. Averiguar si es finita el área de la región limitada por una rama de una hipérbola y sus asíntotas.

1.122. Calcular el área de la región finita limitada por la curva $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ y el eje x .

1.123. Calcular el área de la región (fig. 131):

$$y + x \geq 0 \quad x^2 - 2x + y \leq 0.$$

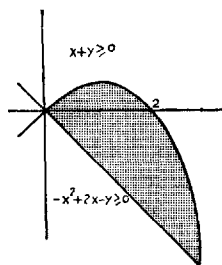


Fig. 131.

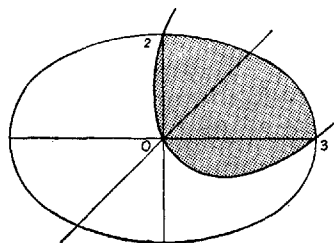


Fig. 132.

1.124. Calcular el área de la región (fig. 132):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \leq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 2y \leq 0. \end{cases}$$

1.125. Calcular el área limitada por la curva: $x = 5 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$.

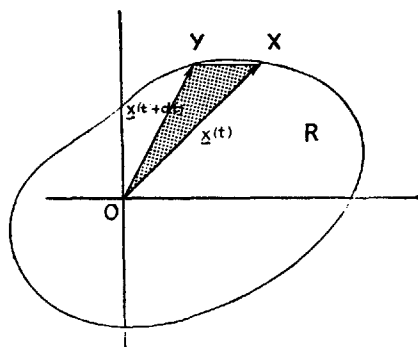


Fig. 133.

126. Calcular el área limitada por la curva: $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$.

127. Calcular el área de la región: $x^3 + y^3 - 3xy < 0$, $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$.

ELEMENTO DE ÁREA EN FORMA PARAMÉTRICA.—Dada la curva que limita el recinto cuya área se quiere calcular en forma explícita: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, conviene calcular el área empleando como variable el parámetro t . Sean X e Y los puntos de la curva correspondientes a

los valores t y $t + dt$ del parámetro. El área del triángulo OXY es:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta a &= \text{ár. } (OXY) = \frac{1}{2} | \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}(t + dt) | \\ &= \frac{1}{2} | \mathbf{x}(t) \times (\mathbf{x}(t) + dt \mathbf{x}'(t + \theta dt)) | \\ &= \frac{1}{2} | \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}'(t + \theta dt) | | dt |. \end{aligned} \right.$$

Si la curva borde se obtiene al variar t en el segmento $[t_1, t_2]$, y si se considera el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las particiones del segmento $[t_1, t_2]$, a cada partición P de $\mathcal{P}$ le corresponde una suma de Riemann:

$$S_R(P) = \frac{1}{2} \sum | \mathbf{x}(t_i) \times \mathbf{x}'(t_i + \theta dt_i) | | dt_i |, \quad dt_i = t_i - t_{i-1}$$

y el límite filtrante de estas sumas, que es la integral de Riemann

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}'(t) | dt$$

es, por otra parte, el área del recinto, luego resulta la siguiente fórmula para calcular el área de un recinto cuyo borde viene dado en forma explícita:

$$(11) \quad \text{ár. } (R) = \left| \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \begin{vmatrix} x_1(t) & x'_1(t) \\ x_2(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} dt \right|.$$

A la diferencial del área se le llama *elemento de área*, y se representa por da , luego de (11), recordando (II, 3, § 3), resulta:

$$(12) \quad da = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1(t) & x'_1(t) \\ x_2(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} dt$$

ELEMENTO DE ÁREA EN COORDENADAS POLARES.—Si el borde del recinto viene dado en coordenadas polares: $\rho = f(\omega)$, la expresión cartesiana paramétrica es:

$$(13) \quad x_1 = f(\omega) \cos \omega, \quad x_2 = f(\omega) \sin \omega,$$

luego el elemento de área será, en virtud de (12):

$$(14) \quad da = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f(\omega) \cos \omega & f'(\omega) \cos \omega - f(\omega) \sin \omega \\ f(\omega) \sin \omega & f'(\omega) \sin \omega + f(\omega) \cos \omega \end{vmatrix} d\omega = \frac{1}{2} f^2(\omega) d\omega$$

y el área del recinto:

$$(15) \quad \text{ár.}(R) = \int_R d\alpha = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f^2(\omega) d\omega.$$

EJERCICIOS:

1.128. Calcular el área de la región limitada por el caracol de Pascal: $\rho = 2 + \cos \omega$.

1.129. Calcular el área limitada por la curva $x^4 + y^4 - (x^2 + y^2) = 0$.

2. Longitud de un arco de curva.—Sea el arco AB (fig. 134) definido por las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

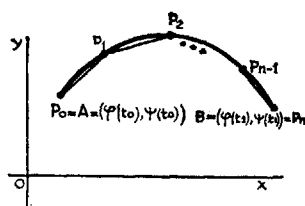


Fig. 134.

en donde φ y ψ son dos funciones con derivada continua. Sea P una partición del segmento $[t_0, t_1]$:

$$P = \{t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t_1\}.$$

La partición P proporciona otra partición, que representaremos por la misma letra, $P = \{A = P_0, P_1, \dots, P_n = B\}$ del arco AB , $P_i = (\varphi(s_i), \psi(s_i))$, $i = 0, \dots, n$.

Sea $l(P)$ la longitud de la poligonal inscrita en el arco de curva $\widehat{AB}$:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} l(P) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(s_i) - \varphi(s_{i-1})]^2 + [\psi(s_i) - \psi(s_{i-1})]^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(s_{i-1} + \theta_i(s_i - s_{i-1}))^2 + \psi'^2(s_{i-1} + \theta_i(s_i - s_{i-1}))} (s_i - s_{i-1}) \end{aligned} \right.$$

DEFINICIÓN 1.—Si el conjunto de números $l(P)$ correspondiente a todas las particiones P del segmento $[t_0, t_1]$ posee un extremo superior, a este extremo superior se le llama *longitud del arco AB de la curva (10)*, y se dice que dicho arco es *rectificable*.

Ahora bien, el segundo miembro de (11) es una suma de Riemann correspondiente a la función

$$(12) \quad \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)},$$

definida en el segmento $[t_0, t_1]$. Como, por hipótesis, las funciones $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ son continuas, la función (12) es continua y posee una integral de Riemann:

$$(13) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Se vio al estudiar la integral de Riemann que

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt - S_R(P) \right|$$

dependía únicamente del diámetro de la partición P y no de la función de distribución; como $l(P)$ es una suma de Riemann correspondiente a la partición P , resulta que (13) es el extremo superior de (11); luego en virtud de la definición 1 se puede enunciar el siguiente:

TEOREMA.—Si (10) es un arco de curva definida por las funciones, con derivada continua en $[t_0, t_1]$, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, el arco AB es rectificable y su longitud viene dada por

$$(14) \quad \text{longitud } \widehat{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

En virtud de las propiedades de la integral de Riemann se puede admitir que $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ posean un número finito de discontinuidades en $[t_0, t_1]$.

En el caso particular en que las ecuaciones (10) sean $x = t$, $y = f(t)$, o lo que es lo mismo,

$$(15) \quad y = f(x),$$

si las coordenadas de A y B son $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, la expresión (14) se escribe del siguiente modo:

$$(16) \quad \text{longitud de } \widehat{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

EJERCICIOS:

- 1.130. Calcular la longitud de la circunferencia.
- 1.131. Calcular la longitud de la elipse.
- 1.132. Calcular la longitud de un arco de parábola.

1.133. Calcular la longitud de un arco de hipérbola. [Conviene emplear las ecuaciones paramétricas $y = a \operatorname{ch} t$, $x = b \operatorname{sh} t$.]

1.134. Calcular la longitud del arco de curva logarítmica $y = \log x$ de extremos $x = 1$, $x = 1.5$.

De (10) se deduce que $dx = \varphi'(t) dt$ y $dy = \psi'(t) dt$, lo que permite escribir (14) de la forma más general:

$$(17) \quad \text{longitud } \widehat{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Fijando t_0 y tomando t variable en $[t_0, t_1]$, se obtiene la longitud s de cualquier subarco:

$$(18) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Diferenciando en (18)

$$(19) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

A (19) se le llama *elemento de arco de la curva (10) en coordenadas cartesianas ortogonales*. Calculado el elemento de arco, la longitud del arco AB viene dada por

$$(20) \quad \text{longitud } \widehat{AB} = \int_{t_0}^{t_1} ds.$$

Conocido el elemento de arco en coordenadas cartesianas, y las fórmulas de transformación, se puede calcular el elemento de arco respecto de cualquier otro sistema de coordenadas y, por tanto, la longitud de un arco de curva. Así, por ejemplo, de las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas a polares:

$$(21) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

se deduce el elemento de arco en coordenadas polares:

$$(22) \quad ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}.$$

EJERCICIOS:

1.135. Calcular la longitud del arco de la espiral $\rho = \varphi$ desde $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$.

1.136. Idem de la curva $\rho = e^\varphi$ entre φ_0 y φ_1 .

1.137. Calcular la longitud de la curva: $x = \frac{9}{5} \cos 3t$, $y = \frac{9}{4} \sin^3 t$.

1.138. Calcular la longitud de la cardioide: $\rho = 1 + \cos \theta$.

3. Área de una superficie de rotación.—Sea la superficie S obtenida por rotación de la curva (10) alrededor del eje de las x . Sea P una partición del segmento $[t_0, t_1]$. La cuerda $P_{i-1}P_i$, al girar alrededor de x , engendra la superficie lateral de un tronco de cono, cuya área es igual a 2π por la generatriz $\overline{P_{i-1}P_i}$ multiplicada por el radio medio:

$$\frac{y_i + y_{i-1}}{2} = \frac{\psi(s_i) + \psi(s_{i-1})}{2} = \psi(s_{i-1} + \theta'_i(s_i - s_{i-1})),$$

ya que la media aritmética de dos números está comprendida entre ellos, y por ser ψ continua toma todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo de los que toma en un segmento cerrado. El área lateral de todos los troncos de cono correspondientes a la partición P viene dada, por tanto, por

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \sum_{i=1}^n \psi(s_{i-1} + \theta'_i(s_i - s_{i-1})) \times \\ \sqrt{\varphi'^2(s_{i-1} + \theta_i(s_i - s_{i-1})) + \psi'^2(s_{i-1} + \theta_i(s_i - s_{i-1}))} (s_i - s_{i-1}). \end{array} \right.$$

Esta suma no es una suma de Riemann correspondiente a la función

$$(24) \quad 2\pi \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)},$$

porque θ'_i y θ_i son, en general, números distintos. Sin embargo, no ofrece dificultad probar que el extremo superior de (23) respecto de todas las particiones es el mismo que el extremo superior de (22) correspondiente a todas las particiones del segmento $[t_0, t_1]$, siempre que exista este último; pero este último es la integral de Riemann:

$$(25) \quad 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

luego si existe (25), y esto sucede cuando $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ son continuas o poseen un número finito de discontinuidades en $[t_0, t_1]$, (25) es el extremo superior de (23) y a éste se le llama área de la superficie engendada por la

curva (10) al girar alrededor del eje x , luego el área de la superficie de rotación es

$$(28) \quad \text{área de la sup. rot. alrededor del eje } x = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) ds = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y ds.$$

EJERCICIOS:

- 1.139. Calcular el área de la superficie esférica. [Tomar $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.]
 1.140. Calcular el área lateral de la superficie tórica obtenida al girar la circunferencia $x = r \cos t$, $y = 2r + r \sin t$ alrededor del eje x .
 1.141. Calcular el área del elipsoide de rotación. [Ecuación de la elipse: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.]
 1.142. Idem de un segmento de hiperboloide o de paraboloides obtenidos al cortarlo por dos planos paralelos al plano yz .
 1.143. Idem de la superficie obtenida al girar el arco de espiral logarítmica $\rho = e^\varphi$ comprendido entre $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$ alrededor del eje x .
 1.144. Calcular el área engendrada por un arco de catenaria $y = \cosh x$ al girar alrededor del eje x .
 1.145. Calcular el área de la superficie tórica engendrada por la circunferencia $x^2 + (y-2)^2 = 1$, al girar alrededor del eje x .
 1.146. Área de la superficie obtenida al girar la cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ alrededor del eje x .

4. Volumen de un cuerpo de rotación.—Sea el cuerpo de rotación C engendrado por el trapecio mixtilíneo limitado por el arco AB (fig. 135), el eje x y las paralelas al eje trazadas por A y B al girar alrededor del eje x . Si P es una partición del segmento $[t_0, t_1]$ se pueden asociar a ella las sumas de Darboux correspondientes a la función $\pi \psi^2(t)$ respecto de la función de distribución $\varphi(t)$:

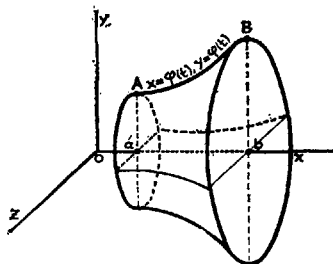


Fig. 135.

$$s_D(P) = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 [\varphi(s_i) - \varphi(s_{i-1})],$$

$$S_D(P) = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 [\varphi(s_i) - \varphi(s_{i-1})],$$

en donde m_i y M_i son los extremos inferior y superior de $\psi(t)$ $[t_{i-1}, t_i]$. Ahora bien, $s_D(P)$ es el volumen de un cuerpo formado por cilindros y contenido en C ,

mientras que $S_0(P)$ es el volumen de otro cuerpo formado por cilindros que contienen a C . Si existe la integral

$$(27) \quad V(C) = \pi \int_{t_0}^{t_1} \psi^2(t) d\varphi(t),$$

a esta integral se le llama *volumen del cuerpo C* . La integral (27) existe si φ y ψ son continuas o tienen un número finito de discontinuidades no coincidentes.

Conviene observar que en el área intervienen las derivadas de las funciones φ y ψ , mientras que no es así para el volumen. La fórmula (27) se puede escribir de un modo más general así:

$$(28) \quad V(C) = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx.$$

EJERCICIOS:

- 1.147. Calcular el volumen de la esfera.
- 1.148. Idem del elipsoide de revolución.
- 1.149. Idem de segmentos de hiperboloide o paraboloides producidos por planos perpendiculares al eje de rotación.
- 1.150. Calcular el volumen del conoide recto limitado por el círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$ del plano $z = 0$ y por las rectas que, apoyándose en su circunferencia, son perpendiculares y cortan a la recta $z = a$, $x = 0$.

5. Cálculo numérico de integrales.—De la función $y = f(x)$ se conocen los valores y_i correspondientes a los valores x_i , $i = 0, \dots, n$, de la variable independiente. Se trata de calcular aproximadamente la integral de $f(x) dx$ en el intervalo (a, b) , siendo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y una cota del error cometido.

Si se toma como polinomio aproximado de la función $f(x)$ el polinomio $P_n(x)$ de Lagrange, (6) 1, § 2, cap. VII, un valor aproximado de la integral vendrá dado por

$$(29) \quad \int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=0}^n y_i I_i^{(n)}, \quad I_i^{(n)} = \int_a^b L_i^{(n)}(x) dx.$$

Como se ve, en la fórmula (29) los coeficientes $I_i^{(n)}$ son números que no dependen de la función $f(x)$. Llamando $R(f)$ al error cometido al tomar como

valor de la integral del primer miembro de (29) el segundo miembro, se podrá escribir, poniendo, por brevedad, $I_1^{(n)} := a_1$:

$$(30) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + R(f), \quad R(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n a_i f(x_i).$$

Ahora bien, como tanto la integral definida como el operador Σ son dos operadores lineales, resulta que $R(f)$ es un operador lineal de f ; es decir, si $f = \lambda g(x) + \mu h(x)$ se verifica que $R(f) = \lambda R(g) + \mu R(h)$. Para acotar este resto $R(f)$ procederemos del siguiente modo. Supongamos que la función $f(x)$ posea derivada $f^{(n+1)}(x)$ continua en el segmento $J = [a, b]$. Integrando por partes sucesivamente, se obtiene:

$$\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = -\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n - \dots - f'(a) (x-a) - f(a) + f(x),$$

de donde obtenemos:

$$(31) \quad \begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots \\ + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt, \end{cases}$$

que es la fórmula de Taylor con otra expresión del término complementario. Ahora bien, obsérvese que si en la segunda ecuación (30) se pone en lugar de f un polinomio de grado no superior a n , se obtiene que $R(f) = 0$; esto se expresa diciendo que R es un operador lineal de grado n . Por consiguiente, aplicando R a los dos miembros de (31), se obtiene:

$$(32) \quad R(f) = \frac{1}{n!} R \left(\int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \right).$$

Conviniendo en poner $[x-t]^n = (x-t)^n$ cuando $x \geq t$ y $[x-t]^n = 0$ cuando $x < t$, la expresión (32) se puede escribir en la siguiente forma:

$$(33) \quad R(f) = \frac{1}{n!} R \left(\int_a^{\infty} f^{(n+1)}(t) [x-t]^n dt \right).$$

de donde, por el carácter lineal de R y de la integral definida:

$$(34) \quad R(f) = \int_a^\infty f^{(n+1)}(t) G(t) dt, \quad G(t) = \frac{1}{n!} R[x-t]^n.$$

La fórmula (34) permite calcular en muchos casos una acotación del error.

EJERCICIOS:

1.151. Calcular el error que se comete al emplear la siguiente fórmula de integración numérica:

$$I = \int_{-2h}^{+2h} f(x) dx = \frac{4h}{3} (2f(h) - f(0) + 2f'(-h)) + R(f),$$

siendo R de grado 4. (De (9) se deduce que

$$G(t) = \frac{1}{4!} \left[\int_{-2h}^{2h} [x-t]^4 dx - \frac{4h}{3} (2[h-t]^4 - [-t]^4 + 2[-h-t]^4) \right]$$

Si $t > 0$, teniendo en cuenta el significado de $[x-t]$, será:

$$G(t) = \frac{1}{4!} \left(\frac{[2h-t]^5}{5} - \frac{8h}{3} [h-t]^4 \right).$$

MÉTODO TRAPEZOIDAL.—Si los puntos x_i son equidistantes, $x_{i-1} - x_i = h$, el método trapezoidal consiste en tomar como valor de la integral la suma de las áreas de los trapecios obtenidos al trazar por los puntos x_i paralelas al eje y hasta que corten a la curva $y = f(x)$ y unir mediante segmentos rectilíneos estos puntos. Se obtiene así la fórmula:

$$(35) \quad \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right] + R.$$

Aplicando el método general anterior y teniendo en cuenta que R es ahora de grado dos, se obtiene:

$$R = - \frac{\pi \cdot f''(\xi) h^3}{12}, \quad x_0 < \xi < x_n.$$

MÉTODO DE SIMPSON.—Consiste este método en emplear parábolas de segundo orden para aproximar la curva de modo que cada una de ellas pase por tres puntos consecutivos de la misma. Se obtiene así la siguiente fórmula:

$$(36) \quad \left\{ \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \right. \\ \left. + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] + R; \quad R = - \frac{n f^{(4)}(\xi) h^5}{90} . \right.$$

INDICE ALFABETICO DE PROPOSICIONES

A

Abacos, 611.
 Abierto de E_n , 486.
 — en el cuerpo de los números complejos, 481.
 Abscisas en la recta, 241.
 Absurdo, 46.
 Adherencia, 413.
 — de C , 487.
 Adición de matrices, 196.
 — — series, 448.
 — — sucesiones, 396.
 — — vectores libres, 103.
 Adjunto, 207.
 Afijo de un número complejo, 475.
 Ajuste de funciones, 599.
 — mediante polinomios ortogonales, 603.
 — por el método de los mínimos cuadrados, 600.
 Algebra de Boole, 15.
 — — las partes de un conjunto, 6.
 Algoritmo de Euclides, 85.
 Alternación, 169.
 Angulo de planos, 319.
 — — recta y plano, 320.
 — — rectas, 307, 318.
 Angulos de Euler, 328.
 Anillo, 73.
 — entero, 80.
 — euclideo, 85.
 — de los números enteros, 81.
 Aplicación, 21.
 — bilineal, 161.
 — inversa, 21.
 — inyectiva, 21.
 — suprayectiva, 21.
 Aproximación lineal de una aplicación, 508.
 Area de recintos planos, 715.

Area de una superficie de rotación, 723.
 — — un triángulo, 312, 322.
 Argumentos de un número complejo, 475.
 Arista de retroceso, 652.
 Asíntotas, 630.
 Automorfismo, 65, 79.
 Axioma de Zermelo, 41.

B

Base de un espacio vectorial, 123, 130.
 Biyección, 21.
 Buena ordenación, 40.

C

Cálculo de límites, 495.
 — — raíces reales de una ecuación, 584.
 — — tablas de logaritmos, 553.
 — del área de recintos planos, 707.
 — — rango de una matriz, 218.
 — numérico de integrales, 725.
 Cambio de base en el plano vectorial, 244.
 — — coordenadas cartesianas en el espacio, 275, 324.
 — — — — — plano, 313.
 — — sistema de abscisas, 242.
 Cambio de variables, 572.
 — — — en la integral de Riemann, 679.
 — — — en la integral de Riemann-Stieltjes, 689.
 Categoría, 32.
 Centro de un grupo, 68.
 Cierre de un conjunto, 413.
 — convexo de un conjunto, 35.
 Cilindro parabólico, 381.
 Cilindros no parabólicos, 379.

- Clase adjunta, 57.
 - Clasificación, 24.
 - afin de las cónicas, 371.
 - — — — cuádricas, 385.
 - Complección del cuerpo de los números reales, 421.
 - Cónicas, 361.
 - Conjunto, 1.
 - abierto, 411.
 - acotado, 36.
 - adherente, 413.
 - bien ordenado, 40.
 - cerrado, 413, 487.
 - cociente, 27.
 - compacto, 415, 487.
 - complementario, 11.
 - convexo, 35, 265.
 - filtrante, 37.
 - inductivo, 41.
 - ordenado, 36.
 - totalmente ordenado, 39.
 - Conjuntos idénticos, 3.
 - Conos cuadráticos, 377.
 - Coordenadas afines en el espacio, 291.
 - cartesianas, 273.
 - cilíndricas, 328.
 - de un vector, 123, 132.
 - polares en el espacio, 328.
 - — — — plano, 315.
 - Concavidad y convexidad, 628.
 - Continuidad, 498.
 - por la derecha y por la izquierda, 502.
 - uniforme, 503.
 - Convergencia de integrales con integrando no acotado, 698.
 - — — — límite de integración, ∞ , 692.
 - uniforme, 491.
 - Correspondencia, 18.
 - biunívoca, 21.
 - unívoca, 21.
 - Cota inferior, 36.
 - superior, 36.
 - Criterio de Abel, 464.
 - — Cauchy de convergencia de series, 445.
 - — Dirichlet, 463.
 - — igualdad de clases, 27.
 - Criterios de convergencia de integrales, 694, 699.
 - — — — para series de términos positivos, 452.
 - Cuádricas, 373.
 - ordinarias, 378.
 - Cuantificador universal y existencial, 48.
 - Cuerpo de fracciones, 88.
 - Curva intersección de superficies, 648.
 - — — — del anillo de polinomios, 91.
 - — — — los números complejos, 471.
 - — — — racionales, 88.
 - — — — reales, 403.
 - Curva, 617.
 - intersección de superficies, 648.
 - Curvas planas definidas implícitamente, 633.
 - — en coordenadas polares, 627.
 - unicursales, 666.
 - Curvatura en un punto, 624.
- D**
- Dependencia lineal de vectores, 126.
 - Derivación numérica, 595.
 - Derivada de una función, 510.
 - Desarrollo en serie de una función, 549.
 - Descomposición de Witt, 352.
 - Determinante de una matriz, 179, 205.
 - del producto de dos matrices, 209.
 - Diagramas de Venn, 5.
 - para la relación de orden, 36.
 - Diferenciación bajo el signo integral, 705.
 - Diferencial continua, 560.
 - de la aplicación inversa, 518,
 - — una $A \rightarrow E_m$, 511.
 - — — función de una variable real, 508.
 - del producto de dos aplicaciones, 516.
 - — — escalar, 616.
 - — — mixto, 617.
 - — — vectorial, 616.
 - generalizada, 657.
 - reversible, 560.
 - Diferenciales binomias, 667.
 - de las funciones elementales, 520.
 - sucesivas de una aplicación, 524.
 - Diferencias, 54, 589.
 - Dimensión de un espacio vectorial, 137.
 - — una variedad afín, 234.
 - Dirección de un vector libre, 119.
 - Discriminante, 577.
 - Distancia, 306.
 - de un punto a un plano, 322.
 - — — — — una recta, 309.
 - Divisor de 0, 78.

E

Ecuación algebraica, 576.
 — cartesiana del plano, 276.
 — implícita de la recta, 252.
 — normal del plano, 321.
 — — de la recta, 309.
 — vectorial — — —, 248, 272
 — — del plano, 272.
 Ecuaciones cartesianas de la recta, 278.
 — de una diferencial, 516.
 — — explícitas de la recta, 250.
 — — de una variedad afín, 233
 — — — — — lineal, 228.
 — implícitas — — — afín, 233.
 — — — — — lineal, 157, 226.
 — linealmente independientes, 229.
 — principales, 222.
 — reducidas de las cuádricas, 376.
 Elemento de arco, 621.
 — — área, 718.
 — — un conjunto, 1.
 — idempotente, 78.
 — inverso, 53.
 — maximal, minimal, 41.
 — máximo, 39.
 — mínimo, 39.
 — neutro, 53.
 — nilpotente, 78.
 — opuesto, 53.
 — simétrico, 53.
 Eliminación, 580.
 — de parámetros, 230.
 — en el espacio afín, 237.
 Elipse, 367.
 Elipsoides, 376.
 Endomorfismo, 66.
 Entorno de un número complejo, 481.
 — intervalo, 485.
 — simétrico, 395, 411.
 Entornos de ∞ , 489.
 Epimorfismo, 52, 62.
 Equipolencia, 101.
 Equivalencia alternada, 44.
 — lógica, 47.
 Escalas funcionales, 609.
 Espacio afín, 271.
 — dual, 155.
 — euclideo, 316, 484.
 — vectorial, 101, 125.

Espacio cuadrático, 547.
 Expresión analítica de una diferencial, 513.
 — decimal de un número real, 406.
 — módulo-argumental de un número complejo, 475.
 — trigonométrica de un número complejo, 475.
 Extremo inferior de un conjunto, 38.
 — superior — — —, 38.

F

Factores invariantes de un grupo, 72.
 Factoriales generalizadas, 590.
 Final de una aplicación, 18.
 Forma cuadrática definida, 348.
 — — degenerada, 348.
 — — ordinaria, 348.
 Formas bilineales, 339.
 — cuadráticas, 345.
 Fórmula de integración por partes, 679.
 Fórmula de Moivre, 477.
 — — Newton, 594.
 — — Taylor, 538, 540, 542.
 Fórmulas del cambio de base, 139.
 — de Frénet, 621.
 — — Gauss, Stirling y Everet, 594.
 Fracción, 86.
 Fracciones simples, 97.
 Función, 18.
 — de conjunto, 684.
 — — distribución, 686
 — de variable compleja, 24.
 — — — entera, 24.
 — — — natural, 24.
 — — — real, 24.
 — experimental, 23.
 — exponencial real, 424, 435.
 — integrable Riemann, 673.
 — logarítmica, 435.
 — matemática, 23.
 — primitiva, 657.
 — proposicional, 48.
 — tabulada, 23.
 — uniforme, 21.
 Funciones continuas variables reales, 498.
 — crecientes y decrecientes, 554.
 — de distribución monótonas, 691.
 — implícitas, 596.
 — reales de variables reales, 487.

G

- Grafo, 18.
- Grupo, 53.
 - abeliano, 68.
 - de automorfismos, 192.
 - finito, 55, 66.
- Grupoide, 49.
- Grupos de tipo finito, 71.
 - libres, 71.

H

- Haz de rectas paralelas, 258.
 - lineal de rectas, 256.
- Hipérbola, 368.
- Hiperboloides, 377.
- Hoja de una superficie, 646.
- Homeomorfismo, 503.
- Homomorfismo, 51, 60.
 - asociado a una forma bilineal, 340.
 - entre anillos, 75.
 - inyectivo, 52.
- Homomorfismos entre espacios vectoriales, 140.

I

- Ideal, 77.
 - primo, 80.
 - principal, 81.
- Identidad de conjuntos, 3.
 - — Lagrange, 305.
- Igualdad de funciones, 23.
- Implicación lógica, 47.
- Incidencia en el espacio, 280.
- Inclusión, 3.
- Integración bajo el signo integral, 706.
 - de funciones racionales, 663.
 - de series funcionales, 711.
 - por cambio de variable, 659.
 - por partes, 661, 689.
- Integral de Darboux, 668.
 - — Riemann, 672, 673.
 - — Riemann-Stieltjes, 682, 687.
 - indefinida, 658, 671.
- Integrales dependientes de un parámetro, 702.

- Integrales inmediatas, 658.
- Interpolación, 586.
- Intersección, 38.
 - de conjuntos, 9.
 - — ideales, 83.
 - — recta y plano, 288.
 - — subgrupos, 69.
 - en el espacio, 282.
 - — — plano, 257.
- Intervalo, 35.
- Invariantes métricos de una cónica, 365.
 - — — cilindros, 384.
 - — — las cuádricas, 382.
- Inversa de una matriz, 194.
- Inyección, 52, 62.
- Isomorfismo, 52, 62.
 - de anillos, 79.

L

- Lema de Abel, 463.
- Ley asociativa de una serie, 447.
 - conmutativa de una serie, 448.
- Límite de una función de variables reales, 488.
 - — — sucesión, 399, 420.
 - inferior, 418.
 - superior, 418.
- Límites filtrantes, 671.
 - por la derecha y por la izquierda, 490.
- Línea de estricción, 651.
- Longitud de un arco de curva, 720.

M

- Matrices hemisimétricas, 204.
 - iguales, 195.
 - simétricas, 204.
- Matriz, 194.
 - inversa, 210.
 - jacobiana, 516.
- Máximo absoluto de una función, 503.
 - común divisor, 85.
- Máximos y mínimos relativos, 555.
 - — — condicionados, 569.
- Medida aproximada de segmentos, 115.
 - de la aproximación de dos aplicaciones, 508.

Medida de segmentos, 114.
 Menor complementario, 207.
 — de una matriz, 207.
 Método de Aitken, 586.
 — — la función inversa, 597.
 — — Lagrange, 588.
 — — Simpson, 728.
 — del simplex, 332.
 — trapezoidal, 727.
 Mínimo común múltiplo, 85.
 Módulo, 92.
 — de un número complejo, 473.
 — — — vector libre, 119.
 Multiplicación de matrices, 198.
 — — — por cajas, 200.
 — — de series, 449.
 — — sucesiones, 397.
 — escalar de vectores, 297.
 — vectorial de vectores, 300.
 Multivectores, 171.

N

Nomografía, 609.
 Norma de un homomorfismo, 533.
 — — — número complejo, 473.
 Número adherente, 412.
 — complejo, 471.
 — de acumulación, 417.
 — e , 440.
 — real, 403.

O

Operaciones con homomorfismos, 149.
 Orden, 13.
 — de un grupo, 55.
 Ordenación en el cuerpo real, 407.
 — filtrante, 37.
 — total, 39.
 Orientación del plano afín, 268.
 — — — vectorial, 270.
 — en el espacio afín, 295.
 — — — vectorial, 296.
 Original, 18.

P

Parábola, 369.
 — aproximada, 641.

Paraboloides, 378.
 Paralelismo de rectas, 258.
 Partición de un conjunto, 25.
 Perpendicularidad de rectas, 307.
 Pertenece a, 2.
 Plano afín, 243.
 — euclídeo, 305.
 — tangente a una superficie, 643, 645, 646.
 Planos osculador, normal y rectificante, 623.
 Polinomio de Boole, 45.
 — secular de una forma cuadrática, 359.
 — — — — cuádrica, 383.
 Posición relativa de rectas, 289.
 Postulado de continuidad de la recta, 484.
 — — Pappus, 107.
 Preorden, 34.
 Primer elemento de un conjunto, 40.
 Primitiva, 678.
 Principio de inducción transfinita, 40.
 Producto exterior de vectores, 168, 171.
 — de aplicaciones, 29.
 — — conjuntos, 16.
 — — homomorfismos, 65.
 — — límites, 491.
 — — matrices, 191.
 — — un número por una matriz, 197.
 — mixto de vectores, 303.
 — tensorial, 160.
 Programación lineal, 329.
 Propiedades de los determinantes, 180.
 — — la integral de Riemann, 675.
 — — — — Riemann-Stieltjes, 688.
 Proporcionalidad, 109.
 Proposiciones, 42.
 Proyector, 70.
 Punto adherente, 487.
 — de acumulación, 487.
 — — retroceso, 620.
 — ordinario de una superficie, 643, 646.
 — singular — — —, 646, 647.
 Puntos de inflexión de una curva, 627.
 — singulares de las curvas, 619, 637.

R

Racionalización de diferenciales, 665.
 Radiación de planos, 281, 287.
 — — rectas, 280.
 Raíces racionales de una ecuación, 581.

Raíz múltiple de una ecuación, 577.

Rama de una curva, 634, 640.

Rango de una cuádrica, 377.

— — — forma cuadrática, 360.

— — — matriz, 214.

Razón, 107. ,

Recta afin, 240.

— general, 255.

Recubrimiento de abiertos, 415, 487.

Reducción de la ecuación de una cónica, 361.

— — — — — cuádrica, 384.

Región angular, 263.

— diédrica, 294.

Regla de l'Hôpital, 532.

— — Cramer, 213.

Relación, 18.

— de igualdad, 24.

— — implicación, 44.

— — orden, 34.

Relaciones de un conjunto convexo, 266.

— explícitas e implícitas de conjuntos convexos, 294.

Representante de un vector libre, 119.

Resolver un sistema, 212.

Resultante, 578.

Reticulo, 12, 38.

— distributivo, 14.

S

Segmento, 35, 262, 293.

Segmentos iguales, 105.

Semigrupo, 50.

Semiespacio, 294.

Semiplano, 263.

Semirrecta, 262.

Semirretículo, 38.

Sentido de un vector libre, 120.

Serie absolutamente convergente, 459.

— de números complejos, 482.

— — — — — absolutamente convergente, 483.

— — — reales, 444.

— — términos reales cualesquiera, 458.

Series alternadas, 465.

— convergentes, divergentes y oscilantes, 444.

— funcionales, 546.

Series potenciales, 547.

— recurrentes, 466.

— de términos positivos, 450.

Signatura lineal de una forma cuadrática, 358.

Sistema de ecuaciones lineales, 212.

— — generadores, 71, 128.

— — referencia afín, 246.

Sistemas compatibles e incompatibles, 212.

— homogéneos, 223.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales, 212.

— — — — — homogéneo, 224.

Subanillo, 73.

Subconjunto, 2.

Subgrupo, 50.

Subgrupos normales, 58.

Submatriz, 207.

Subsistema principal, 222.

Sucesión de diferenciales, 544.

— — números complejos, 481.

— — — racionales, 695.

— — — reales, 420, 436.

— divergente, 436.

— monótona, 440.

— nula, 401, 420.

— oscilante, 437.

— secular, 360.

Sucesiones convergentes, 398, 420.

— de puntos, 489.

— funcionales, 543.

— múltiples, 493.

Suma directa de subgrupos, 70.

— de subgrupos, 69.

— — homomorfismos, 65.

— — ideales, 81.

— — una serie de números reales, 444.

Sumación de series, 464.

Superficie, 641.

— alabeada, 649.

— cilíndrica, 651.

— cónica, 651.

— desarrollable, 644, 651.

— en forma implícita, 645.

— reglada, 649.

— rotación, 653.

— tangencial, 652.

— traslación, 654.

T

- Tangente a una curva, 617.
 Tautología, 46.
 Tensor, 166.
 — hemisimétrico, 169.
 Teorema de Bolzano-Weierstrass, 418.
 — — Borel-Lebesgue, 415.
 — — Budan-Fourier, 583.
 — — Charles, 650.
 — — definición por isomorfía, 186.
 — — Desargues, 101, 105.
 — — Descartes, 583.
 — — Dirichlet para series, 461.
 — — existencia de funciones implícitas, 561.
 — — la base, 135.
 — — isomorfía, 64.
 — — la buena ordenación, 41.
 — fundamental de la dependencia lineal, 215.
 — — del álgebra, 576.
 — — valor medio, 429, 534, 535.
 — de isomorfía para espacios vectoriales, 145.
 — — Rolle, 529.
 — — Rouché Fröbenius, 220.
 — — Riemann para series, 460.
 — — Schwarz, 528.
 — — Sturm, 582.
 — — Taylor, 536.
 — — Zorn, 42.
 — del valor medio para la integral de Riemann, 677.
 — general de la eliminación, 567.
 Topología del cuerpo de los números complejos, 481.
 — — — racional, 393.
 — — — real, 407.
 Torsión, 626.

U

- Unidad de medida, 115.
 — parcial, 78.
 Unión, 38.
 — de conjuntos, 6.

V

- Valor absoluto, 394, 410.
 Valoración de las proposiciones, 45.
 Valores propios de una forma cuadrática, 359.
 Variable independiente, 22.
 Variables de uniformización de una superficie, 646.
 Variedad lineal afin, 232.
 — — de vectores, 128.
 — — isótropa, 344.
 — — singular, 348.
 — ortogonal, 156.
 Vector, 101, 125.
 — de posición, 241.
 — derivado parcial, 515.
 — libre, 102.
 — de dirección de la recta, 249, 283, 306, 317.
 — isótropo, 344.
 — normal a un plano, 318.
 — — — una recta, 307.
 — que depende linealmente de otros, 126.
 — singular, 348.
 Vectores linealmente dependientes, 126.
 — — independientes, 127.
 — tangente, normal principal y binormal, 622.
 Volumen de un cuerpo de rotación, 725.

ELEMENTOS
DE
MATEMATICA

TERCERA PARTE
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

INDICE POR MATERIAS

PRIMERA PARTE

ALGEBRA LINEAL

CAPITULO PRIMERO

Páginas

Estructuras algebraicas básicas:

§ 1. Teoría de conjuntos (1-35)	1
§ 2. Producto de conjuntos. Aplicación. Función. Relación (36-145)	6
§ 3. Grupos (146-219)	24
§ 4. Anillos (220-259)	37
§ 5. Cuerpos (260-266)	45

CAPITULO SEGUNDO

El espacio vectorial:

§ 1. El espacio vectorial (267-357)	48
§ 2. Matrices. Cálculo con matrices (358-418)	83
§ 3. Sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación lineal (419-453)	95

CAPITULO TERCERO

El espacio euclídeo:

§ 1. El plano afín (454-520)	107
§ 2. El espacio afín (521-557)	123
§ 3. El espacio vectorial euclídeo ordinario (558-566)	135
§ 4. El espacio euclídeo (567-639)	138

CAPITULO CUARTO

Formas cuadráticas. Cónicas. Cuádricas:

§ 1. Formas bilineales. Formas cuadráticas (640-653)	157
§ 2. Cónicas (654)	162
§ 3. Cuádricas (655)	163

SEGUNDA PARTE

ANÁLISIS INFINITESIMAL

CAPÍTULO QUINTO

Topología del cuerpo de los números reales. Funciones continuas:

§ 1. El número real (656-709)	167
§ 2. Sucesiones y series de números reales (710-746)	174
§ 3. El número complejo (747-777)	179
§ 4. Topología del espacio euclídeo (778-832)	184

CAPÍTULO SEXTO

Cálculo diferencial de funciones de variables reales:

§ 1. Diferenciales y derivadas (833-853)	193
§ 2. Estudio local de las funciones de variables reales (854-897)	197
§ 3. Funciones implícitas e inversas (898-928)	204

CAPÍTULO SEPTIMO

Cálculo numérico:

§ 1. Resolución de ecuaciones (929-933)	211
§ 2. Cálculo numérico (934-971)	212

CAPÍTULO OCTAVO

Curvas y superficies:

§ 1. Curvas (972-1.029)	221
§ 2. Superficies (1.030-1.052)	227

CAPÍTULO NOVENO

Integración:

§ 1. Integrales indefinidas (1.053-1.066)	229
§ 2. Integral de Riemann (1.067-1.083)	231
§ 3. Convergencia de integrales. Integración de series funcionales (1.084-1.112)	234
§ 4. Aplicaciones geométricas de la integral definida (1.113-1.151)	237

PRIMERA PARTE

ALGEBRA LINEAL

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Capítulo primero

§ 1. TEORÍA DE CONJUNTOS

1. a) $\{a, e, i, o, u\} = \{x \mid x \text{ es vocal}\}$
 b) $\{1, -3\} = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$
 c) Si x representa un segmento: $A = \{x \mid x = \overline{AB}\}$
 d) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{x \mid |x| < 3,5\}$
2. a) i ; b) -3 ; c) $\overline{AB}$; d) 0 .
3. a) $B \subset A$; b) $B \subset A$; c) $C \subset A$, $C \subset B$; $A \not\subset B$; $B \not\subset A$; d) $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $N \subset Q$; e) $A \not\subset B$, $B \not\subset A$; f) $A \subset B$, $B \subset A$.
4. No. Se verifica que $A \subset B$, pero no se verifica $B \subset A$, porque los puntos M y N , que pertenecen a B , no pertenecen a A .
5. Evidentemente $A \subset B$. Sea y un número arbitrario de B y sea $y = 3m + r$, $r < 3$. Si $r = 2$, será $y = 3m + 2$. $1 \in A$. Si $r = 1$ y $m \geq 2$, será $y = 3(m-1) + 4 = 3(m-1) + 2 + 2$. $2 \in A$. Si $r = 1$ y $m = 1$, será $y = 4 = 2 + 2$. $2 \in A$. No puede ser $m = 0$ y $r = 1$, para $y > 1$. Finalmente, si $r = 0$ será $y = 3m \in A$. Por consiguiente, $B \subset A$, luego $A = B$.

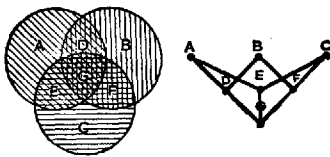


Fig. 1'.

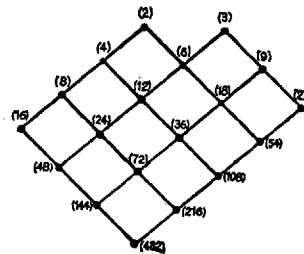


Fig. 2'.

6. A es el conjunto rayado oblicuamente (fig. 1'), B el rayado verticalmente, C el rayado horizontalmente, D con rayado vertical e inclinado, E con rayado horizontal e inclinado, F con rayado vertical y horizontal, G con los tres rayados. El grafo correspondiente es el de la figura 1'.
7. La solución es la de la figura 2'.

8. Solución en la figura 3'.

9. a) $R(U) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

b) $R(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

10. El número N de elementos de $R(U)$ es:

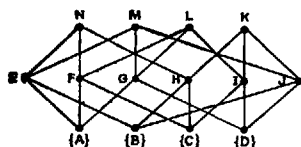


Fig. 3'.

$$N = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$= (1 + 1)^n = 2^n.$$

11. $A \in R(U), B \in R(U)$.

12. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

13. a) *Propiedad asociativa*.—Se sabe que para demostrar la igualdad (3) del texto es preciso demostrar las dos relaciones siguientes:

$$(1) \quad (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$$

$$(2) \quad A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$$

Demostración de (1): Sea x un elemento arbitrario de $(A \cup B) \cup C$. Esto significa: $x \in A \cup B$, o $x \in C$. Si lo primero, será $x \in A$, o $x \in B$. Si $x \in A$, será $x \in A \cup (B \cup C)$; si $x \in B$, será $x \in B \cup C$ y, por tanto, $x \in A \cup (B \cup C)$. Finalmente, si $x \in C$, será $x \in B \cup C$ y, por tanto, $x \in A \cup (B \cup C)$; luego, en cualquier caso, ha quedado demostrada (1). Sea ahora x un elemento arbitrario de $A \cup (B \cup C)$. De la definición de unión se deduce que $x \in A$, o $x \in B \cup C$. En el primer caso, será $x \in A \cup B$ y, por tanto, $x \in (A \cup B) \cup C$. En el segundo, será $x \in B$, o $x \in C$. Si $x \in B$ será $x \in A \cup B$ y, por tanto, $x \in (A \cup B) \cup C$. Si $x \in C$ es $x \in (A \cup B) \cup C$; luego ha quedado demostrado (2), y con ello la propiedad asociativa.

b) *Propiedad conmutativa*.—Demostrar la igualdad (4) del texto equivale a probar las dos relaciones siguientes:

$$(3) \quad A \cup B \subset B \cup A.$$

$$(4) \quad B \cup A \subset A \cup B.$$

Demostración de (3). Sea x un elemento arbitrario de $A \cup B$. Esto significa que $x \in A$ o $x \in B$ y, en cualquiera de los dos casos, $x \in B \cup A$. Demostración de (4). Sea x un elemento arbitrario de $B \cup A$; esto significa que $x \in B$, o $x \in A$ y en ambos casos $x \in A \cup B$.

c) *Propiedad idempotente*.—Demostrar la relación (5) del texto equivale a probar las dos relaciones:

$$(5) \quad A \cup A \subset A,$$

$$(6) \quad A \subset A \cup A.$$

Demostración de (5). Si x es un elemento arbitrario de $A \cup A$, será $x \in A$, o $x \in A$, y en ambos casos es $x \in A$. Demostración de (6). Si $x \in A$ se verifica, en virtud de la definición de unión, que $x \in A \cup A$.

14. Sea M la unión de A y B según la definición 3. En virtud de la relación (2) del texto, se verifica que:

$$(7) \quad A \subset M \quad \text{y} \quad B \subset M,$$

luego, si existe un elemento N , que sea unión según la definición 4, será:

$$N \subset M.$$

Ahora bien, de $A \subset N$ y $B \subset N$ resulta que

$$M \subset N,$$

luego, si existe N ha de ser igual a M . Queda únicamente por ver que M verifica la definición 4. En virtud de (7) se cumplen las primeras condiciones de la definición. Si $A \subset X$ y $B \subset X$ se verifica que si $x \in M$, será $x \in A$, o $x \in B$, y en ambos casos $x \in X$, luego $M \subset X$, luego M verifica la definición 4.

15. Es consecuencia del ejercicio anterior.

16. Sea M el conjunto intersección de A y B según la definición 5. Si existe un conjunto N , intersección de A y B según la definición 6, se verifica, en virtud de la consecuencia b) de la definición 5, que $M \subset A$, $M \subset B$, luego, por la definición 6:

$$M \subset N.$$

Pero, por la definición 6 es $N \subset A$, $N \subset B$, luego $N \subset M$. Por consiguiente, si existe un N , intersección de A y B según la definición 6, este N es igual al M , intersección de A y B según la definición 5. Pero, de $M \subset A$, $M \subset B$, y M contenido en cualquier conjunto que contenga a A y a B , resulta que M verifica la definición 6, luego $M = N$.

17. Si se verifica $A \cup B = B$, será $A \cap B = A \cap (A \cup B) = (A \cup B) \cap A = A$. Recíprocamente, si se verifica $A \cap B = A$, será: $A \cup B = (A \cap B) \cup B = (B \cap A) \cup B = B$.

18. De la definición 4 de unión se deduce $B \subset B \cup C$, y por la transitividad de la inclusión $A \subset B \cup C$, luego por la definición 4, $A \cup B \subset B \cup C$. Análogamente, de $A \cap C \subset A$ y $A \subset B$, se deduce que $A \cap C \subset A \cap B$.

19. Si se verifica que $A \cup B = B$, de $A \subset A \cup B$ se deduce $A \subset B$. Recíprocamente, si se verifica que $A \subset B$ será $A \cup B \subset B \cup B$, en virtud de 18, y como $B \subset A \cup B$, resulta 3).

20. El elemento ínfimo se ha caracterizado en el texto por una cualquiera de las condiciones (6) o (13), que en virtud del ejercicio 17 son equivalentes. Bastará ver que es único. Si existiese otro, J , se verificaría: $J \cup I = J = I$.

21. Demostración análoga a la anterior.

22. a) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. En efecto, $x \in A \cap (B \cup C)$ implica $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in C$. En el primer caso $x \in A \cap B$ y, en el segundo, $x \in A \cap C$, luego, en ambos, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. En efecto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ implica $x \in A \cap B$, o $x \in A \cap C$. En el primer caso $x \in A$, $x \in B$, luego $x \in B \cup C$ y, por tanto, $x \in A \cap (B \cup C)$. En el segundo, $x \in A$, $x \in C$, luego $x \in B \cup C$ y $x \in A \cap (B \cup C)$.

c) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Sea $x \in A \cup (B \cap C)$. Esto implica que $x \in A$, o $x \in B \cap C$. En el primer caso $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, luego $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. En el segundo, $x \in B$ y $x \in C$, luego $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$; por tanto, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Esto implica que $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, de donde $x \in A$, o $x \in B$ y $x \in A$ o $x \in C$. Si $x \in A$, «a fortiori», $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \notin A$, se verificará $x \in B$ y $x \in C$, luego $x \in B \cap C$ y, «a fortiori», $x \in A \cup (B \cap C)$.

23. El complementario de A viene representado por la parte rayada de la figura 4', A.

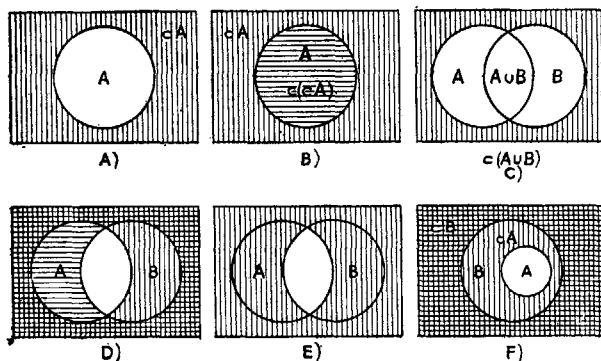


Fig. 4'.

El complementario de $c(A)$ es la parte rayada horizontalmente en 4', B, que coincide con A . El complementario de $A \cup B$ es la parte rayada de 4', C. La intersección de $c(A)$ con $c(B)$ es la parte cuadriculada de 4', D. El complementario de $A \cap B$ es la parte rayada de 4', E y la unión de $c(A)$ con $c(B)$ es la parte rayada o cuadriculada de 4', D. El complementario de B es la parte cuadriculada de 4', F y el complementario de A la parte rayada o cuadriculada de 4', F.

24. 1) Evidentemente: $c(\emptyset) \subset U$. Si $x \in U$, $x \notin \emptyset$, luego $x \in c(\emptyset)$; por consiguiente, $U \subset c(\emptyset)$.

Evidentemente, $\emptyset \subset c(U)$. Si hubiese un elemento que perteneciese a $c(U)$ ese elemento no pertenecería a U y todos los elementos considerados pertenecen a U , luego no existe ninguno que pertenezca a $c(U)$.

2) Si $x \in X$ se deduce que $x \notin c(X)$, luego $x \in c(c(X))$; por consiguiente, $X \subset c(c(X))$. Si $x \in c(c(X))$ se verifica que $x \notin c(X)$, luego $x \in X$, y por tanto $c(c(X)) \subset X$.

3) Si $x \in c(A \cup B)$ se verifica que $x \notin (A \cup B)$, luego $x \notin A$ y $x \notin B$, y, por tanto, $x \in cA$ y $x \in cB$, luego $x \in cA \cap cB$. Por tanto, $c(A \cup B) \subset cA \cap cB$.

Si $x \in cA \cap cB$ se verifica que $x \notin A$ y $x \notin B$, luego $x \notin A \cup B$, luego $x \in c(A \cup B)$. Esto implica que $cA \cap cB \subset c(A \cup B)$.

4) Si $x \in c(A \cap B)$ se verifica que $x \notin A \cap B$, luego $x \notin A$, o $x \notin B$, que se puede expresar así: $x \in cA$, o $x \in cB$, que equivale a $x \in cA \cup cB$. Por consiguiente, $c(A \cap B) \subset cA \cup cB$.

Si $x \in cA \cup cB$, se verifica que $x \in cA$, o $x \in cB$, que equivale a: $x \notin A$, o $x \notin B$, que puede expresarse por $x \notin A \cap B$, que es lo mismo que $x \in c(A \cap B)$. Por consiguiente, $cA \cup cB \subset c(A \cap B)$.

5) Si $x \in c(B)$ se verifica que $x \notin B$, luego $x \notin A$, luego $x \in cA$.

6) Evidentemente que $A \cup c(A) \subset U$. Si $x \in U$ y $x \notin A$ es $x \in c(A)$, luego siempre $x \in A \cup c(A)$, luego $U \subset A \cup c(A)$.

De la definición de complementario se deduce que si $x \in c(A)$ entonces $x \notin A$, luego $A \cap cA = \emptyset$.

25. Si $x \in B$, de $A \cap B = \emptyset$ se deduce que $x \notin A$, luego $x \in cA$, y, por tanto, $B \subset cA$.

Si $x \in cA$ se verifica que $x \notin A$ y $x \in U = A \cup B$, luego $x \in A$, o $x \in B$. Por tanto, $x \in B$, de donde $cA \subset B$.

26. Sea a un elemento de U . Supongamos que $\emptyset \neq B \subset \{a\}$. De $\emptyset \neq B$ se deduce que existe en B un elemento, por lo menos, $b \in B$ y de $B \subset \{a\}$ se deduce que $b \in \{a\}$, de donde $b = a$, luego $\{a\} \subset B$. Si A es un átomo de $\mathbf{R}(U)$, de $A \neq \emptyset$ se deduce que existe un elemento, por lo menos, a , que pertenece a A . Si fuese $A \neq \{a\}$, se verificaría $\emptyset \neq \{a\} \subset A$ y $\{a\} \neq A$, luego A no sería átomo.

27. Limitaremos la demostración al caso en que los sucesos considerados pertenezcan al subconjunto de $\mathbf{H}$ formado por $H_1, \dots, H_6$.

1. $H_i \cup (H_j \cup H_k)$ es el suceso que consiste en que salga alguno de los números i, j, k , lo mismo que el suceso $(H_i \cup H_j) \cup H_k$. El suceso $(H_i \cap H_j) \cap H_k$ y el suceso $H_i \cap (H_j \cap H_k)$ son ambos el suceso imposible; cuando los tres sucesos son distintos, también son iguales cuando coinciden algunos de ellos.

El suceso $H_i \cup H_j$ y el $H_j \cup H_i$ son ambos el mismo suceso, que consiste en que en un suceso dado salga el número i o el número j . Lo mismo sucede con $H_i \cap H_j$ y $H_j \cap H_i$.

El suceso $H_i \cup H_i$ es el suceso que consiste en que en un dado salga el número i , luego es el suceso H_i . El suceso $H_i \cap H_i$ consiste en que salgan los números i, i , luego coincide con H_i .

El suceso $(H_i \cup H_j) \cap H_i$ consiste en que salga el i o el j y el i , luego es el suceso H_i . Lo mismo sucede con $(H_i \cap H_j) \cup H_i$.

28. La demostración es totalmente análoga a la anterior.

29. La propiedad 1 es la propiedad idempotente: $A \cup A = A$.

Las relaciones $A \subset B$ y $B \subset A$ equivalen, según la definición 10, a $A \cup B = B$ y $B \cap A = A$, de donde $B = A \cup B = A \cup (B \cap A) = A$.

De $A \subset B$ y $B \subset C$ se deduce $A \cup B = B$, $B \cup C = C$, luego: $A \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = B \cup C = C$, que equivale a $A \subset C$.

30. La asociatividad viene probada por la igualdad de los circuitos de las figuras 5', A y 5', B. La conmutatividad es trivial. La idempotencia se ve en las figuras 5', C y 5', D, y la ley de simplificación en las 5', E y 5', F.

31. a) *Propiedad distributiva*.—La proposición: estudia y (aprenderás o aprobarás) es equivalente a la proposición estudia y aprenderás o estudia y aprobarás. Análogamente, la

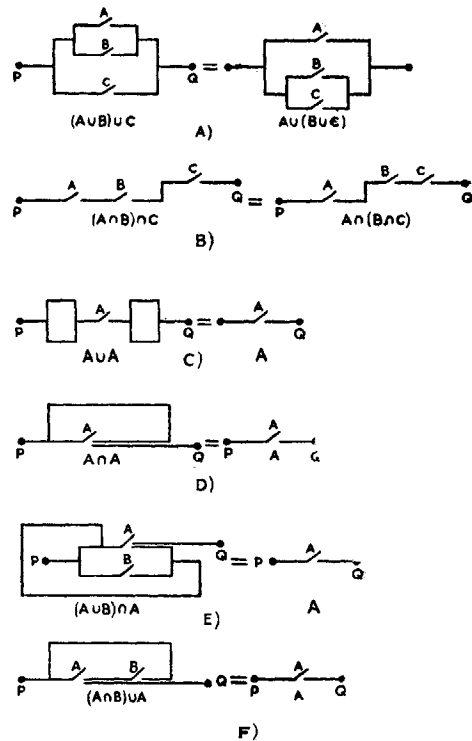


Fig. 5'.

proposición: (hoy es lunes o llueve) y hace sol es equivalente a (hoy es lunes o llueve) y (hoy es lunes o hace sol).

b) A la proposición complementaria de la proposición P se le llama su *contraria* y se representa por $\neg P$ (otros autores la representan por $\sim P$). Se verifica que si P es la proposición: llueve, $\neg P$ es la proposición no llueve, y $P \vee \neg P$ es la proposición llueve o no llueve, que es la proposición siempre cierta, que corresponde al elemento universal y se acostumbra a representar por $\vee$. Análogamente, la proposición: llueve y no llueve, es constantemente falsa y corresponde al elemento ínfimo del retículo, que se representa por $\wedge$.

$$32. a) (A - B) \cap B = (A \cap c B) \cap B = A \cap (c B \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$b) (A - B) \cup B = (A - B) \cup B = (A \cap c B) \cup B = (A \cup B) \cap (c B \cup B) = (A \cup B) \cap U = A \cup B.$$

$$33. (A - B) \cap (B - A) = (A \cap c B) \cap (B \cap c A) = (A \cap c A) \cap (B \cap c B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset.$$

34. En virtud de lo demostrado en el ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} 35. a) \text{ Asociatividad: } (A \Delta B) \Delta C &= ((A - B) + (B - A)) - C + (C - ((A - B) + (B - A))) \\ &= ((A \cap c B) + (B \cap c A)) \cap c C + C \cap ((c A \cup B) \cap (c B \cup A)) \\ &= A \cap c B \cap c C + B \cap c A \cap c C + C \cap c A \cap c B + C \cap c A \cap A \\ &+ C \cap B \cap c B + C \cap B \cap A = [A \cap (c B \cap c C + B \cap C)] + [c A \cap ((B \cap c C) + (C \cap c B))] \\ &= A \cap c ((B \cup C) \cap (c B \cup c C)) + [c A \cap ((B \cap c C) + (C \cap c B))] \\ &= [A \cap c ((B \cap c C) + (C \cap c B))] + [(B \cap c C) + (C \cap c B)] \cap c A \\ &= [A - ((B - C) + (C - B))] + (((B - C) + (C - B)) - A) \\ &= A \Delta [(B - C) + (C - B)] = A \Delta (B \Delta C). \end{aligned}$$

$$b) A \Delta B = (A - B) + (B - A) = (B - A) + (A - B) = B \Delta A.$$

c) El elemento neutro de la operación Δ es el elemento ínfimo $\emptyset$. En efecto:
 $A \Delta \emptyset = (A - \emptyset) + (\emptyset - A) = (A \cap c \emptyset) + (\emptyset \cap c A) = (A \cap U) + \emptyset = A.$

d) Vamos a determinar X por la condición $A \Delta X = \emptyset$, de donde:
 $(A - X) + (X - A) = \emptyset, (A \cap c X) + (X \cap c A) = \emptyset, X \cap c A = \emptyset, A \cap c X = \emptyset,$
 $X \cup c A = U$, luego X es $c(c A) = A$. Luego el opuesto de todo elemento A es el propio elemento A .

§ 2. PRODUCTO DE CONJUNTOS. APLICACIÓN. FUNCIÓN. RELACIÓN

$$36. A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}, B \times A = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b), (1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}.$$

37. Siendo el signo de igualdad el correspondiente a la igualdad de conjuntos, la respuesta es negativa, ya que los pares son ordenados y no es lo mismo el par ordenado (a, b) que el (b, a) .

$$38. A \times B \text{ tiene } 8 \times 5 = 40 \text{ elementos.}$$

39. Basta observar que cada elemento de A da lugar a m pares de $A \times B$.

$$40. 1) \text{ Si } (x, y) \in A' \times B', \text{ será } x \in A', y \in B', \text{ luego } x \in A, y \in B \text{ y } (x, y) \in A \times B.$$

2) Si $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, será $x \in A, y \in B \cup C$. Si $y \in B, (x, y) \in (A \times B)$ y, a fortiori, $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Si $y \in C$, será $(x, y) \in A \times C$ y, por tanto, $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Recíprocamente, si $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ y $(x, y) \in A \times B$ será $x \in A, y \in B$, luego $y \in B \cup C$ y $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Si $(x, y) \in A \times C$, será $x \in A, y \in C$ y, por tanto, $y \in B \cup C$ y $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

3) Si $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ será $x \in A$, $y \in B$, $y \in C$, luego $(x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in A \times C$, luego $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Recíprocamente, si $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$, será $(x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in A \times C$, de donde $x \in A$, $y \in B$, $y \in C$, luego $y \in B \cap C$ y $(x, y) \in A \times (B \cap C)$.

4) Es trivial.

41. La representación gráfica queda a cuidado del lector. proy (3,7) es la puntuación obtenida por el alumno representado por el número 3.

42. a) $\text{in}(f) = A$. b) $\text{fin}(f) = B$. c) $f(1) = \{a, c\}$. d) $f(2) = \{b\}$. e) $\text{im}(f) = \{a, b, c\}$. f) $\text{or}(f) = \{1, 2, 3\}$. g) $f^{-1}(a) = \{1, 3\}$. h) $f^{-1}(c) = \{1, 3\}$. i) $f^{-1}(d) = \emptyset$. Se verifica que $1 f c$ y no se verifica $2 f c$.

43. Uno. El conjunto vacío. El conjunto A .

44. La contestación a a), b), c) depende del conjunto h que se obtenga en cada caso. Ahora bien, se puede predecir que la contestación a las tres preguntas será casi siempre negativa. La última propiedad se enuncia así: si x es amigo de y , e y es amigo de x , ¿se verifica que x es amigo de x ?

45. Tanto $r(x)$ como $r^{-1}(y)$ tienen únicamente un elemento.

46. a) $f(p)$ es el segmento $q q'$. b) $f(m)$ es el punto m' . c) $f^{-1}(g')$ es el segmento $h l$. d) $f(k) = \emptyset$.

47. $g(p) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $g(a) = \{c\}$, $g^{-1}(n) = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $\text{im}(g) = \text{segmento } a b$. or $(g) = \text{segmento } h k$.

48. La gráfica de f es la recta f de la figura 6'. $f(0) = \{-2\}$. $f^{-1}(0) = \{3\}$, $\text{im}(f) = B$, $\text{or}(f) = A$. $f(x)$ consta de un único número, cualquiera que sea x . $f^{-1}(y)$ consta de un único número, cualquiera que sea y .

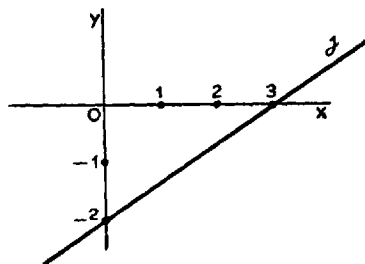


Fig. 6'.

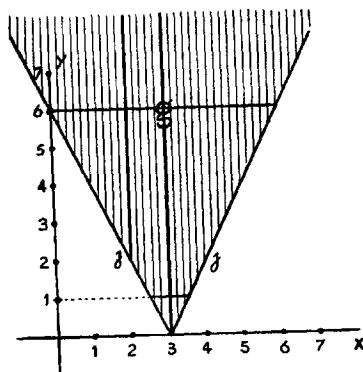


Fig. 7'.

49. La gráfica está formada por las dos semirrectas de la figura 7', en donde la bisectriz del ángulo que forman es la paralela al eje y trazada por el origen común. $f(5) = |-6 + 2 \cdot 5| = |4| = 4$. $f(0) = |-6| = 6$. $f^{-1}(0)$ es tal que $0 = |-6 + 2 f^{-1}(0)|$, de donde $-6 + 2 f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(0) = 3$. $2 = |-6 + 2 f^{-1}(2)|$, de donde $-6 + 2 f^{-1}(2) = \pm 2$, $2 f^{-1}(2) = 6 \pm 2$, $f^{-1}(2) = 3 \pm 1 = \{4, 2\}$. $10 = |-6 + 2 f^{-1}(10)|$, de donde $\pm 10 = -6 + 2 f^{-1}(10)$, $2 f^{-1}(10) = 6 \pm 10$, $f^{-1}(10) = 3 \pm 5 = \{8, -2\}$. $f^{-1}(-1) = \emptyset$. $\text{im}(f)$

$= Q^+$, siendo Q^+ el conjunto de todos los números racionales no negativos. or $(f) = Q$. $f(x)$ posee un único elemento. $f^{-1}(y)$ posee dos elementos siempre que $y > 0$, uno cuando $y = 0$, ninguno cuando $y < 0$.

50. La representación de g es la región angular rayada en la figura 7'. $g(2) \geq |-6 + 4| = |-2| = 2$, luego $g(2)$ es el conjunto de los números racionales ≥ 2 . $g(3) \geq |-6 + 6| = 0$, luego $g(3)$ es el conjunto de los números racionales no negativos. $g(10) \geq |-6 + 20| = 14$.

$0 \geq |-6 + 2g^{-1}(0)|$, de donde $-6 + 2g^{-1}(0) = 0$, $g^{-1}(0) = \{3\}$.

$1 \geq |-6 + 2g^{-1}(1)|$, $-1 \leq -6 + 2g^{-1}(1) \leq 1$, $5 \leq 2g^{-1}(1) \leq 7$, $\frac{5}{2} \leq g^{-1}(1) \leq \frac{7}{2}$, luego $g^{-1}(1)$ es el segmento de extremos $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$.

$6 \geq |-6 + 2g^{-1}(6)|$, $-6 \leq -6 + 2g^{-1}(6) \leq 6$, $0 \leq 2g^{-1}(6) \leq 12$, $0 \leq g^{-1}(6) \leq 6$.
 $10 \geq |-6 + 2g^{-1}(10)|$, $-10 \leq -6 + 2g^{-1}(10) \leq 10$, $-4 \leq 2g^{-1}(10) \leq 16$, $-2 \leq g^{-1}(10) \leq 8$.

$\text{im}(g) = Q^+$, or $(g) = Q$.

51. La gráfica de F es la de la figura 8', en donde el punto de la izquierda de los segmentos indica que ese extremo pertenece a la gráfica, y no pertenece el extremo cuyo punto no se ha señalado.

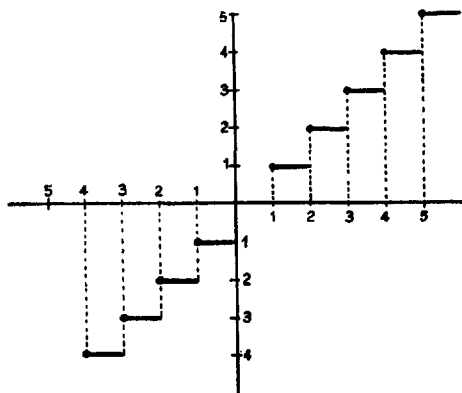


Fig. 8'.

$$F(1, 7) = 1, \quad F\left(\frac{7}{5}\right) = 1, \quad F\left(-\frac{1}{3}\right) = -1,$$

$$F\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \quad F^{-1}(4) = \{x \mid 4 \leq x < 5\},$$

esto es $F^{-1}(4)$ es el conjunto de todos los números racionales comprendidos entre cuatro y cinco y el número cuatro.

$$F^{-1}(-3) = \{x \mid -3 \leq x < -2\},$$

$$F^{-1}(0) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}.$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \emptyset. \quad \text{im}(F) = Z, \text{ siendo } Z$$

el anillo de los números enteros. or $(F) = Q$.

52. Supongamos que se han obtenido los siguientes resultados, en donde s indica la suma de los números de los dados e y el número de veces que se ha obtenido dicha suma:

$s =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y =$	11	21	27	44	49	62	46	35	20	25	10

La gráfica es la indicada en la figura 9'.

$$\Phi(3) = 11 + 21 = 32, \quad \Phi(3, 7) = \Phi(3) = 32, \quad \Phi(12) = 360, \quad \Phi(13) = \Phi(12) = 360,$$

$$\Phi^{-1}(32) = \{x \mid 3 \leq x < 4\}, \quad \Phi^{-1}(25) = \emptyset,$$

or $(\Phi) = \mathbb{Q}^+$ conjunto de los números racionales no negativos. im $(\Phi) = \{0, 11, 32, 59, 103, 152, 214, 260, 295, 325, 350, 360\}$.

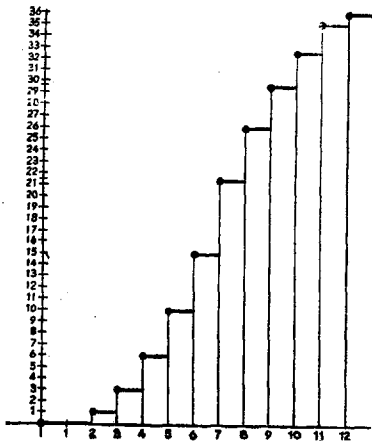


Fig. 9'.

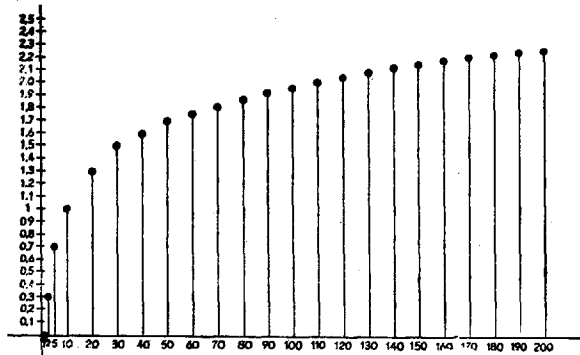


Fig. 10'.

53. La gráfica es la de la figura 10'. or $(L) = \{1, 2, 5, 10, \dots, 190, 200\}$. im $(L) = \{L 1, L 2, L 5, L 10, \dots, L 190, L 200\}$.

54. La gráfica es la indicada en la figura 11'. Por pertenecer a la gráfica todos los puntos de $A \times A$ situados en la bisectriz de los ejes, se verifica $x R x$, $\forall x \in A$. Por ser la gráfica simétrica respecto de la bisectriz de los ejes se verifica la propiedad II. Por estar todos los puntos de los cuadrados cuya diagonal es la mencionada bisectriz, se verifica la propiedad III.

55. La primera propiedad es consecuencia de figurar en la gráfica de R todos los puntos de la bisectriz de los ejes. La segunda propiedad es consecuencia de no figurar en la gráfica de R dos puntos simétricos respecto de la bisectriz. La tercera propiedad es consecuencia de que si en la gráfica figura el punto (a, b) figuran también todos los puntos (a, x) cuando x recorre todos los puntos (b, x) de la gráfica.

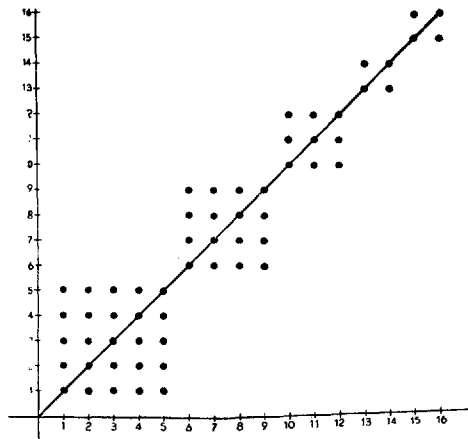


Fig. 11'.

56. a) No. Ya que or $(f) \neq A$. b) Es una correspondencia unívoca, posiblemente suprayectiva. En efecto, or $(g) = A$. El resultado de cada tirada es un cero o un uno. Posiblemente habrá tiradas en que salga cara y otras en que salga cruz. c) Si uno de los alumnos ha escrito más de un nombre de amigo la correspondencia no es unívoca. d) La correspondencia es biunívoca y sobre, siempre que todos los números x_i sean distintos entre sí y lo

mismo suceda con los números y . e) No. f) No. g) La correspondencia es biunívoca y sobre, ya que para cualquier número racional x se verifica que $\frac{2x-6}{3}$ es otro número racional; para todo número racional y se verifica que $\frac{6+3y}{2}$ es otro número racional; de $\frac{2x-6}{3} = \frac{2y-6}{3}$ se deduce que $x = y$, y de $\frac{6+3y}{2} = \frac{6+3x}{2}$ se deduce $y = x$. h) f es una correspondencia unívoca, pero no sobre. En efecto, $\text{or}(f) = A$, $\text{im}(f) \neq B$, de $y = |-6 + 2x|$, $x = |-6 + 2x|$ se deduce $y = x$. Sin embargo, no es biunívoca ya que de $|-6 + 2x| = |-6 + 2y|$, se deduce $-6 + 2x = -6 + 2y$, de donde $x = y$, y $-6 + 2x = -(-6 + 2y) = 6 - 2y$, de donde $x + y = 6$, $y = 6 - x$. i) No. j) Es una correspondencia unívoca, pero no suprayectiva. k) La correspondencia es unívoca, pero no sobre ni bi-unívoca. l) No es unívoca, ya que $\text{or}(L) \neq A$. m) No es unívoca. n) No es unívoca.

57. a) Si x es un número racional, $x^2 - 5x + 6$ es también número racional, luego $\text{or}(f) = A$. Dado el número racional x el número $x^2 - 5x + 6$ es único, luego se trata de una aplicación. Para ver si se trata de una aplicación suprayectiva sea y un número racional cualquiera y veamos si existe siempre un número racional x tal que $y = x^2 - 5x + 6$. De

aquí se deduce $x = \frac{5 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$. Por consiguiente, para que x sea racional debe ser

$y \geq -\frac{1}{4}$ y, además, $1+4y$ debe ser cuadrado de un número racional, luego no es suprayección. La misma expresión anterior prueba que tampoco es inyección.

b) Para cualquier número natural x , 2^x es también número natural y único, luego se trata de una aplicación. Dado el número 3 no existe ningún número natural x tal que $3 = 2^x$, luego no es suprayección. Si x e y son dos números naturales tales que $2^x = 2^y$, y si $x \geq y$, será $2^{x-y} = 1$, luego $x - y = 0$, $x = y$. Se trata, por tanto, de una inyección.

c) Para $x = 3$ no existe el número $\frac{2x+1}{x-3}$, luego $\text{or}(h) \neq A$ y no se trata de una aplicación.

58. No. Se puede completar la definición de los siguientes modos: a) $\text{or}(f) = N$, $\text{fin}(f) = N$, puesto que para todo número natural x es $2x+1$ otro número natural. b) $\text{or}(f) = Z$, $\text{fin}(f) = Z$. c) $\text{or}(f) = Q$, $\text{fin}(f) = Q$.

59. No, porque cualesquiera que sean los números racionales x y $f(x)$, se verifica que $x^2 + [f(x)]^2$ no es negativo.

60. Pongamos $f(x) = y$. Hallado el m. c. d. de 28 y 45 se obtiene:

	1	1	1	1	1	5	de donde
45	28	17	11	6	5	1	$6 = 5 + 1$
17	11	6	5	1	0		$11 = 6 + 5$
							$17 = 11 + 6$
							$28 = 17 + 11$
							$45 = 28 + 17$

y de éstos resulta:

$$\begin{aligned}
 1 &= 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2 \cdot 6 - 11 = 2(17 - 11) - 11 = 2 \cdot 17 - 3 \cdot 11 \\
 &= 2 \cdot 17 - 3(28 - 17) = 5 \cdot 17 - 3 \cdot 28 = 5(45 - 28) - 3 \cdot 28 = 5 \cdot 45 - 8 \cdot 28
 \end{aligned}$$

y de la igualdad formada por el primer miembro y el último:

$$(1) \quad 28 \cdot (-88) + 45 \cdot 55 = 11,$$

luego no existe la función, ya que -88 no es número natural.

61. En virtud de la igualdad (1) del número anterior, el par $(-88, 55) \in g$ y cumple la condición $-88 \in \mathbb{Z}$, $55 \in \mathbb{N}$. Poniendo $x = -88 + x'$, $y = 55 + y'$ y sustituyendo en la ecuación dada, resulta:

$$28x' + 45y' = 0, \quad \text{de donde} \quad x' = -45\lambda, y' = 28\lambda,$$

siendo λ una variable natural, esto es, tal que su campo de variabilidad es $\mathbb{N}$. Por consiguiente, cuando λ varía en $\mathbb{N}$, los pares de números

$$(x = -88 - 45\lambda, y = 55 + 28\lambda)$$

definen la función g .

62. Función tabulada, función experimental, matemática, matemática, matemática.

63. La condición necesaria y suficiente para que las funciones sean iguales es que $a d = b c$. Si $m = \text{m. c. m.}(b, d)$, será $(m) \subset (b)$, $(m) \subset (d)$, y si $p m \in (m)$, será $p m = b d' = d b'$, $b = [\text{m. c. d.}(b, d)] \cdot b'$, $d = [\text{m. c. d.}(b, d)] \cdot d'$, luego $\frac{a}{b} (p m) = \frac{x}{b} (p d' b) = p d' a = p b' c = \frac{c}{d} (p b' d) = \frac{c}{d} (p m)$. El conjunto máximo sobre el que son iguales las dos funciones es (m) .

64. I. Todo número tiene la última cifra igual a la última cifra de él mismo.

II. Si a tiene la última cifra igual a b , éste tiene la última cifra igual a a .

III. Si a tiene la última cifra igual a b y b tiene la última cifra igual a c , a tiene la última cifra igual a c .

65. I. $x + y = y + x$ implica $(x, y) R (x, y)$.

II. Si $(x, y) R (z, t)$, será $x + t = y + z$, relación equivalente a $z + y = t + x$, que a su vez es equivalente a $(z, t) R (x, y)$.

III. Si $(x, y) R (z, t)$ y $(z, t) R (u, v)$, se verifica que $x + t = y + z$ y $z + v = t + u$, de donde $x + t + v = y + z + v = y + t + u$, de donde $x + v = y + u$, que implica $(x, y) R (u, v)$.

66. I. La identidad es un movimiento que transforma cada segmento en sí mismo.

II. Si $a R b$ y M es el movimiento que transforma a en b , el movimiento inverso, M^{-1} , transforma b en a , luego $b R a$.

III. Si $a R b$ y $b R c$, siendo M el movimiento que transforma a en b y M' el que transforma b en c , el movimiento que se obtiene al efectuar primero M y después M' transforma a en c , luego $a R c$.

67. I. Todo triángulo es semejante a sí mismo.

II. Si el triángulo T es semejante al triángulo T' , éste lo es a aquél.

III. Si T es semejante a T' y T' lo es a T'' , T es semejante a T'' .

68. a) No. Porque $6 R 2$, ya que $6 = 3 \cdot 2$, sin embargo no es cierto que $2 R 6$, ya que no existe ningún número entero x tal que $2 = x \cdot 6$.

b) I. Para todo número racional a se verifica $a = 1 \cdot a$, luego $a R a$.

II. Si $a R b$, será $a = m b$, $m \neq 0$, luego $b = 1/m a$, y, por tanto, $b R a$.

III. Si $a R b$ y $b R c$, será $a = m b$, $b = n c$, luego $a = (m n) c$, que implica que $a R c$.

69. a) I. Toda bola tiene el mismo color que ella misma. II. Si a tiene el mismo color que b , b tiene el mismo color que a . III. Si a tiene el mismo color que b y b tiene el mismo color que c , a tiene el mismo color que c . La clasificación producida por R está formada por las clases R, A, B, V, N , de las bolas de color rojo, azul, blanco, verde, naranja, respectivamente. Por consiguiente, el número de clases es cinco.

b) Sí, puesto que cada bola es de un único color y no hay más colores de bolas que los del enunciado. La relación de igualdad es la relación R de a).

c) Sí, puesto que cada bola tiene un único número. La relación de igualdad es la de tener el mismo número.

70. Dos. La clase formada por el cero y la formada por los restantes números racionales.

71. Sí, puesto que todo número natural es par o impar y no puede ser las dos cosas. La relación de igualdad correspondiente es ser de la misma paridad.

72. a) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n = \mathbb{Q}$ y $C_n \cap C_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$, luego $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una clasificación.

La relación de igualdad correspondiente es la de tener la misma parte entera.

b) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n \neq \mathbb{Q}$, ya que los números enteros no pertenecen al conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n$, por consiguiente no es una clasificación.

c) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n = \mathbb{Q}$, pero $C_n \cap C_{n+1} = \{n+1\} \neq \emptyset$, luego no es una clasificación.

73. Como $C_i \subset \mathcal{P}$, se verifica que $\bigcup_{i \in \mathbb{R}^+} C_i \subset \mathcal{P}$. Sea P un polígono cualquiera de $\mathcal{P}$

y sea j su área, entonces será $j > 0$ y $P \in C_j \subset \bigcup_{i \in \mathbb{R}^+} C_i$, luego $\mathcal{P} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{R}^+} C_i$. Por consiguiente,

$\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \mathbb{R}^+} C_i$. Si $i \neq j$ $C_i \cap C_j = \emptyset$, ya que un polígono no puede tener dos

áreas distintas. La relación de igualdad correspondiente se llama equivalencia de polígonos.

74. $C(x) = C(y)$ significa que las bolas x e y pertenecen a la misma clase y, por tanto, tienen el mismo color, esto es $x R y$. Recíprocamente si $x R y$, las bolas tienen el mismo color, luego la clase $C(x)$ es la misma que la $C(y)$.

75. Las clases de la clasificación son subconjuntos de A , las mismas clases consideradas como pertenecientes al conjunto cociente son elementos de $\mathbf{R}(A)$. Por consiguiente, en el primer caso cada clase es un conjunto, en el segundo caso cada clase es un elemento.

76. a) Una clasificación. b) Un conjunto cociente de A .

77. Paquete de cajas azules. Bulto azul.

78. La primera parte es trivial. La clase formada por todos los polinomios de grado n se puede representar por el número n y la representación así obtenida es una biyección.

79. El que hace corresponder a cada bola la bolsa que la contiene.

80. Basta estudiar la correspondencia $x R \rightarrow$ casa habitada por x y ver que es una biyección.

$$f) f(x) = x + 3, g(z) = \log z, gf(x) = g(x + 3) = \log(x + 3).$$

$$g) f(x) = 2x + 1, g(z) = 2^z, gf(x) = g(2x + 1) = 2^{2x+1}.$$

$$h) f(x) = (\cos x, \sin x), g(z, t) = z + t, gf(x) = g(\cos x, \sin x) = \cos x + \sin x.$$

$$88. a) f(x) = (2x, 1), g(z, u) = z + u, h(v) = v^3, \\ hgf(x) = hg(2x, 1) = h(2x + 1) = (2x + 1)^3.$$

$$b) f(x) = (\sin x, \cos x, x^3), g(z, u, v) = (z + u, v), h(s, t) = st \\ hgf(x) = hg(\sin x, \cos x, x^3) = h(\sin x + \cos x, x^3) = (\sin x + \cos x) x^3.$$

$$c) f(x) = (x^2, \sin x, 2^x), g(z, u, v) = (z, u + v), h(s, t) = \frac{s}{t}.$$

$$hgf(x) = hg(x^2, \sin x, 2^x) = h(x^2, \sin x + 2^x) = \frac{x^2}{\sin x + 2^x}.$$

$$d) f(x) = (x^2, 3x, 1), g(z, u, v) = z + u + v, h(t) = \sin t. \\ hgf(x) = hg(x^2, 3x, 1) = h(x^2 + 3x + 1) = \sin(x^2 + 3x + 1).$$

$$e) f(x) = 3x + 2, g(z) = \sin z, h(u) = 2^u. \\ hgf(x) = hg(3x + 2) = h \sin(3x + 2) = 2^{\sin(3x+2)}.$$

$$f) f(x) = (x^2, 2^x, x; \cos x, \log x, \sin x), g(z_1, z_2, z_3, u_1, u_2, u_3) \\ = (z_1 u_1, z_2 u_2, z_3 u_3), h(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2 + t_3. \\ hgf(x) = hg(x^2, 2^x, x; \cos x, \log x, \sin x) = h(x^2 \cos x, 2^x \log x, x \sin x) \\ = x^2 \cos x + 2^x \log x + x \sin x.$$

$$g) f(x) = (x^3 + 1, 2x + 1, x), g(z_1, z_2, z_3) = (\sin z_1, \cos z_2, \sqrt{z_3}), \\ h(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3. \\ hgf(x) = hg(x^3 + 1, 2x + 1, x) = h(\sin(x^3 + 1), \cos(2x + 1), \sqrt{x}) \\ = \sin(x^3 + 1) \cos(2x + 1) \sqrt{x}.$$

$$h) f(x) = (x^2, 3x + 2), g(z_1, z_2) = z_1 + \sqrt{z_2}, h(t) = \sqrt[3]{t}. \\ hgf(x) = hg(x^2, 3x + 2) = h(x^2 + \sqrt{3x + 2}) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{3x + 2}}.$$

$$89. a) f(x) = (x^2, 3x + 2), g(z_1, z_2) = (z_1, \sqrt{z_2}), h(t_1, t_2) = t_1 + t_2, k(u) = \sqrt[3]{u}. \\ khgf(x) = khg(x^2, 3x + 2) = kh(x^2, \sqrt{3x + 2}) \\ = k(x^2 + \sqrt{3x + 2}) = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{3x + 2}}.$$

$$b) f(x) = (x, \sqrt{x}), g(z_1, z_2) = (z_1, \sqrt{z_1 + z_2}), h(t_1, t_2) = t_1 + t_2, k(u) = \sqrt{u}. \\ khgf(x) = khg(x, \sqrt{x}) = kh(x, \sqrt{x + \sqrt{x}}) = k(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) \\ = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$c) f(x) = \cos x, g(z) = \sqrt{z}, h(t) = \sin t, k(u) = 2^u. \\ khgf(x) = khg(\cos x) = kh(\sqrt{\cos x}) = k \sin \sqrt{\cos x} = 2^{\sin \sqrt{\cos x}}.$$

$$d) f(x) = (x, \log x, \sqrt{x}), g(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1, \frac{1}{z_2 + z_3}\right), h(t_1, t_2) = t_1 + t_2, \\ k(u) = \frac{1}{u}.$$

$$\begin{aligned} k h g f(x) &= k h g(x, \log x, \sqrt{x}) = k h \left(x, \frac{1}{\log x + \sqrt{x}} \right) \\ &= k \left(x + \frac{1}{\log x + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{x + \frac{1}{\log x + \sqrt{x}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= (x^3, \sin x, \sqrt{x}), \quad g(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, \cos z_3) \\ h(t_1, t_2, t_3) &= t_1 + t_2 t_3, \quad k(u) = \sqrt[3]{u} \\ k h g f(x) &= k h g(x^3, \sin x, \sqrt{x}) = k h(x^3, \sin x, \cos \sqrt{x}) = k(x^3 + \sin x \cdot \cos \sqrt{x}) \\ &= \sqrt[3]{x^3 + \sin x \cdot \cos \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f(x) &= (x, \cos x), \quad g(z_1, z_2) = (z_1, \log z_2), \quad h(t_1, t_2) = t_1 + t_2, \quad k(u) = \sin u \\ k h g f(x) &= k h g(x, \cos x) = k h(x, \log \cos x) = k(x + \log \cos x) \\ &= \sin(x + \log \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } f(x) &= (x^2 + 1, x^3 + 2x), \quad g(z_1, z_2) = (\sin z_1, \cos z_2), \quad h(t_1, t_2) = t_1 t_2, \\ k(u) &= \operatorname{tg} u \\ k h g f(x) &= k h g(x^2 + 1, x^3 + 2x) = k h(\sin(x^2 + 1), \cos(x^3 + 2x)) \\ &= k(\sin(x^2 + 1) \cdot \cos(x^3 + 2x)) = \operatorname{tg}[\sin(x^2 + 1) \cos(x^3 + 2x)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } f(x) &= (x, x, x, x), \quad g(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\sin z_1, 3^{z_2}; \cos z_3, \log z_4) \\ h(t_1, t_2; t_3, t_4) &= t_1 t_3 + t_2 t_4, \quad k(u) = \log u \\ k h g f(x) &= k h g(x, x, x, x) = (k h \sin x, 3^x; \cos x, \log x) \\ &= k(\sin x \cdot \cos x + 3^x \log x) = \log[\sin x \cos x + 3^x \log x]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 90. \text{ a) } f(x) &= (x^2, 3x, 2), \quad g(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2 + z_3), \\ h(t_1, t_2) &= (t_1, \sqrt{t_2}), \quad k(u_1, u_2) = u_1 + u_2, \quad l(v) = \sqrt[3]{v} \\ l k h g f(x) &= l k h g(x^2, 3x, 2) = l k h(x^2, 3x + 2) = l k(x^2, \sqrt{3x + 2}) \\ &= l(x^2 + \sqrt{3x + 2}) = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{3x + 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= (x, x, x), \quad g(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, \sqrt{z_3}), \\ h(t_1, t_2, t_3) &= (t_1, t_2 + t_3), \quad k(u_1, u_2) = (u_1, \sqrt{u_2}), \quad l(v_1, v_2) = v_1 + v_2, \quad m(w) = \sqrt{w} \\ m l k h g f(x) &= m l k h g(x, x, x) = m l k h(x, x, \sqrt{x}) \\ &= m l k(x, x + \sqrt{x}) = m l(x, \sqrt{x + \sqrt{x}}) = m(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) \\ &= \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= (x^3, \sin x, \sqrt{x}), \quad g(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, \cos z_3) \\ h(t_1, t_2, t_3) &= (t_1, t_2 t_3), \quad k(u_1, u_2) = u_1 + u_2, \quad l(v) = \sqrt[3]{v} \\ l k h g f(x) &= l k h g(x^3, \sin x, \sqrt{x}) = l k h(x^3, \sin x, \cos \sqrt{x}) \\ &= l k(x^3, \sin x \cdot \cos \sqrt{x}) = l(x^3 + \sin x \cdot \cos \sqrt{x}) = \sqrt[3]{x^3 + \sin x \cos \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= (x - 1, x^2, 2^x), \quad g(u_1, u_2, u_3) = (u_1, \sqrt[3]{u_1}, u_2 + 1, u_2 + u_3) \\ h(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \left(\sqrt{v_3}, v_2, \frac{v_1}{v_4} \right), \quad k(s_1, s_2, s_3) = (s_1 - s_2, \sin s_3) \quad l(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l k h g f(x) &= l k h g(x-1, x^2, 2^x) = l k h(x-1, \sqrt[3]{x-1}, x^2+1, x^2+2^x) \\
 &= l k \left(\sqrt{x^2+1}, \sqrt[3]{x-1}, \frac{x-1}{x^2+2^x} \right) \\
 &= l \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x-1}, \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2+2^x} \right) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x-1}}{\operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2+2^x}}.
 \end{aligned}$$

$$e) f(x) = x^2, g(u) = (u+1, u), h(v_1, v_2) = \left(\frac{1}{v_1}, \cos v_2 \right),$$

$$k(z_1, z_2) = (\operatorname{sen} z_1, 2^{z_2}), l(t_1, t_2) = t_1 + t_2, m(w) = \operatorname{tg} w.$$

$$\begin{aligned}
 m l k h g f(x) &= m l k h g(x^2) = m l k h(x^2+1, x^2) = m l k \left(\frac{1}{1+x^2}, \cos x^2 \right) \\
 &= m l \left(\operatorname{sen} \frac{1}{1+x^2}, 2^{\cos x^2} \right) = m \left(\operatorname{sen} \frac{1}{1+x^2} + 2^{\cos x^2} \right) \\
 &= \operatorname{tg} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{1+x^2} + 2^{\cos x^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) f(x) &= (x-1, x+1, 2x, x^3), g(u_1, u_2, u_3, u_4) \\
 &= \left(\frac{u_1}{u_2}, u_3-1, u_3+1, u_4+2, u_4+u_3 \right) \\
 h(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) &= (\operatorname{tg} v_1, \cos v_2, \operatorname{sen} v_3, \log v_4, \operatorname{sen} v_5), \\
 k(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= (z_1, z_2 z_3, z_4, \sqrt{z_5}), \\
 l(w_1, w_2, w_3, w_4) &= (w_1, w_3 - w_2, 3^{w_4}), m(t_1, t_2, t_3) = (t_3 + t_1, t_2) \\
 n(s_1, s_2) &= \frac{s_2}{s_1}. \\
 n m l k h g f(x) &= n m l k h g(x-1, x+1, 2x, x^3) \\
 &= n m l k h \left(\frac{x-1}{x+1}, 2x-1, 2x+1, x^3+2, 2x+x^3 \right) \\
 &= n m l k \left(\operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}, \cos(2x-1), \operatorname{sen}(2x+1), \log(x^3+2), \operatorname{sen}(2x+x^3) \right) \\
 &= n m l \left(\operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}, \cos(2x-1), \operatorname{sen}(2x+1), \log(x^3+2), \sqrt{\operatorname{sen}(2x+x^3)} \right) \\
 &= n m \left(\operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}, \log(x^3+2) - \cos(2x-1) \operatorname{sen}(2x+1), 3^{\sqrt{\operatorname{sen}(2x+x^3)}} \right) \\
 &= n \left(3^{\sqrt{\operatorname{sen}(2x+x^3)}} + \operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}, \log(x^3+2) - \cos(2x-1) \operatorname{sen}(2x+1) \right) \\
 &= \frac{\log(x^3+2) - \cos(2x-1) \operatorname{sen}(2x+1)}{3^{\sqrt{\operatorname{sen}(2x+x^3)}} + \operatorname{tg} \frac{x-1}{x+1}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) f(x) &= (x+1, x-1, x+2, x-2, x+3, x-3), g(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \\
 &= (\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}, \sqrt{u_3}, \sqrt{u_4}, \sqrt{u_5}, \sqrt{u_6}), h(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \\
 &= (v_1 - v_2, v_3 - v_4, v_5 - v_6), k(z_1, z_2, z_3) = \left(z_1, \frac{z_2}{z_3} \right), \\
 l(w_1, w_2) &= (w_1, \sqrt{w_2}), m(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}, n(s) = \sqrt{s}. \\
 n m l k h g f(x) &= n m l k h g(x+1, x-1, x+2, x-2, x+3, x-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n m l k h (\sqrt{x+1}, \sqrt{x-1}, \sqrt{x+2}, \sqrt{x-2}, \sqrt{x+3}, \sqrt{x-3}) \\
&= n m l k (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}, \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}, \sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) \\
&= n m l \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}, \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}} \right) \\
&= n m \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}, \sqrt{\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}} \right) \\
&= n \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}}} \right) = \sqrt{\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}}}} .
\end{aligned}$$

91. a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 x_2, x_3, x_4)$, $g(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_2 z_3, z_4)$, $h(u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_1, u_2, u_3, u_3 u_4)$,
 $k(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, $l(w) = w^n$.
 $l k h g f(x_1, x_2, x_3, x_4) = l k h g(x_1, x_1 x_2, x_3, x_4) = l k h(x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, x_4)$
 $= l k(x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 x_3 x_4) = l(x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4)$
 $= (x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4)^n$.
- b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_2, \frac{x_1}{x_3}, x_4 x_5, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$
 $g(u_1, u_2, u_3, u_4) = (\sin u_1, \log u_2, \cos u_3, 2u_4)$.
 $h(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1 - v_2, v_3 - v_4)$, $k(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}$
 $k h g f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = k h g \left(x_1 + x_2, \frac{x_1}{x_3}, x_4 x_5, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \right)$
 $= k h \left(\sin(x_1 + x_2), \log \frac{x_1}{x_3}, \cos x_4 x_5, 2^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \right)$
 $= k \left(\sin(x_1 + x_2) - \log \frac{x_1}{x_3}, \cos x_4 x_5 - 2^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \right)$
 $= \frac{\sin(x_1 + x_2) - \log \frac{x_1}{x_3}}{\cos x_4 x_5 - 2^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}} .$
- c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_4)$, $g(z_1, z_2, z_3) = (\log z_1, \sin z_2, \cos z_3)$
 $h(t_1, t_2, t_3) = (t_1, t_2, t_3)$, $k(u_1, u_2) = u_1 - u_2$, $l(v) = \sqrt[n]{v}$.
 $l k h g f(x_1, x_2, x_3, x_4) = l k h g(x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_4) = l k h(\log(x_1 + x_2), \sin(x_1 - x_3), \cos(x_2 - x_4))$
 $= l(\log(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_3) \cos(x_2 - x_4))$
 $= \sqrt[n]{\log(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_3) \cos(x_2 - x_4)}$
- d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_3, 1 + x_2, x_3 + x_4)$
 $g(z_1, \dots, z_7) = \left(\frac{z_1}{z_2}, 2^{z_3}, \cos z_4, \operatorname{tg} z_5, \frac{z_6}{z_7} \right)$,
 $h(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$, $k(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2, \sqrt{u_3})$
 $l(v_1, v_2) = \frac{v_1}{v_2} .$

$$\begin{aligned}
l k h g f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= l k h g(x_1, x_2 + x_3, x_1 + x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_3, \\
&\quad 1 + x_2, x_3 + x_4) \\
&= l k h \left(\frac{x_1}{x_2 + x_3}, 2^{x_1 + x_4}, \cos(x_2 - x_3), \operatorname{tg}(x_1 - x_3), \frac{1 + x_2}{x_3 + x_4} \right) \\
&= l k \left(\frac{x_1}{x_2 + x_3}, 2^{x_1 + x_4} \cos(x_2 - x_3), \operatorname{tg}(x_1 - x_3) \frac{1 + x_2}{x_3 + x_4} \right) \\
&= l \left(\frac{x_1}{x_2 + x_3} - 2^{x_1 + x_4} \cos(x_2 - x_3), \sqrt{\operatorname{tg}(x_1 - x_3) \frac{1 + x_2}{x_3 + x_4}} \right) \\
&= \frac{\frac{x_1}{x_2 + x_3} - 2^{x_1 + x_4} \cos(x_2 - x_3)}{\sqrt{\operatorname{tg}(x_1 - x_3) \frac{1 + x_2}{x_3 + x_4}}}.
\end{aligned}$$

92. a) $z_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, \sqrt{x_3}, \operatorname{sen} x_1, \log x_2, x_1, x_2 + x_3, \cos x_1, 2x_2)$
 $z_2(t_1, \dots, t_8) = \left(\frac{t_1}{t_2}, t_3 t_4, t_5, \log t_6, t_7, t_5 - t_8 \right),$
 $z_3(u_1, \dots, u_6) = \left(u_1 + u_2, \frac{u_3}{u_4}, u_5, \operatorname{sen} u_6 \right)$
 $z_4(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_2, v_3, v_4), z_5(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2 - z_3)$
 $z_5 z_4 z_3 z_2 z_1(x_1, x_2, x_3)$
 $= z_5 z_4 z_3 z_2(x_1 - x_2, \sqrt{x_3}, \operatorname{sen} x_1, \log x_2, x_1, x_2 + x_3, \cos x_1, 2x_2)$
 $= z_5 z_4 z_3 \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3}}, \operatorname{sen} x_1 \log x_2, x_1, \log(x_2 + x_3), \cos x_1, x_1 - 2x_2 \right)$
 $= z_5 z_4 \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3}} + \operatorname{sen} x_1 \log x_2, \frac{x_1}{\log(x_2 + x_3)}, \cos x_1, \operatorname{sen}(x_1 - 2x_2) \right)$
 $= z_5 \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3}} + \operatorname{sen} x_1 \log x_2, \frac{x_1}{\log(x_2 + x_3)}, \cos x_1 \operatorname{sen}(x_1 - 2x_2) \right)$
 $= \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3}} + \operatorname{sen} x_1 \log x_2, \frac{x_1}{\log(x_2 + x_3)} - \cos x_1 \operatorname{sen}(x_1 - 2x_2) \right).$
- b) $z_1(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2, x_2, x_1 + x_2, x_2^2),$
 $z_2(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (t_1, t_1 - t_5, \operatorname{sen} t_4, t_3, 3t_5),$
 $z_3(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (u_1, 1 + u_2, u_4 + u_3, u_1 + u_5),$
 $z_4(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_2, v_1, \sqrt{v_3}, \sqrt{v_4}),$
 $z_5(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(z_1, \frac{z_2}{z_3}, 2^{z_4} \right).$
 $z_5 z_4 z_3 z_2 z_1(x_1, x_2) = z_5 z_4 z_3 z_2(x_1, x_1^2, x_2, x_1 + x_2, x_2^2)$
 $= z_5 z_4 z_3(x_1, x_1 - x_2^2, \operatorname{sen}(x_1 + x_2), x_2, 3x_2^2)$
 $= z_5 z_4(x_1, 1 + x_1 - x_2^2, x_2 + \operatorname{sen}(x_1 + x_2), x_1 + 3x_2^2)$
 $= z_5(x_1(1 + x_1 - x_2^2), x_1, \sqrt{x_2 + \operatorname{sen}(x_1 + x_2)}, \sqrt{x_1 + 3x_2^2})$
 $= \left(x_1(1 + x_1 - x_2^2), \frac{x_1}{\sqrt{x_2 + \operatorname{sen}(x_1 + x_2)}}, 2^{x_1 + 3x_2^2} \right).$
- c) $z_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_1 - x_3, 2x_1, x_2^2, x_2^3, x_3, 4x_1)$
 $z_2(t_1, \dots, t_9) = (\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}, \operatorname{sen} t_4, t_5 + t_6, t_7 - 1, t_8 - t_9)$
 $z_3(u_1, \dots, u_7) = (u_1 - u_2, u_3 u_4, u_5^3, \cos u_6, \operatorname{tg} u_7)$

$$\begin{aligned}
z_4(v_1, \dots, v_5) &= (\sqrt{v_1}, v_2, v_3, v_4, v_5) \\
z_5(s_1, s_2, s_3) &= (z_1 + s_2, s_3) \\
z_5 z_4 z_3 z_2 z_1(x_1, x_2, x_3) \\
&= z_5 z_4 z_3 z_2(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_1 - x_3, 2x_1, x_2^2, x_3^2, x_3, 4x_1) \\
&= z_5 z_4 z_3(\sqrt{x_1 + x_2}, \sqrt{x_1 - x_2}, \sqrt{x_1 + x_3}, \text{sen}(x_1 - x_3), \\
&\quad 2x_1 + x_2^2, x_2^2 - 1, x_3 - 4x_1) \\
&= z_5 z_4(\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1 - x_2}, \sqrt{x_1 + x_3} \text{sen}(x_1 - x_3), (2x_1 + x_2^2)^2, \\
&\quad \cos(x_2^2 - 1), \text{tg}(x_3 - 4x_1)) \\
&= z_5 \sqrt{\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1 - x_2}}, \sqrt{x_1 + x_3} \text{sen}(x_1 - x_3), \\
&\quad (2x_1 + x_2^2)^2 \cos(x_2^2 - 1) \text{tg}(x_3 - 4x_1) \\
&= \sqrt{\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1 - x_2}} + \sqrt{x_1 + x_3} \text{sen}(x_1 - x_3), \\
&\quad (2x_1 + x_2^2)^2 \cos(x_2^2 - 1) \text{tg}(x_3 - 4x_1).
\end{aligned}$$

93. a) $i = h g$, $j i f = k$. b) $n f = f' m$, $p g = g' n$. c) $c a = f$.

94. A/f se obtiene metiendo todas las bolas del mismo color en una bolsa, de modo que A/f es el conjunto formado por: la bolsa de bolas rojas, la bolsa de bolas azules, la bolsa de bolas blancas, la bolsa de bolas verdes y la bolsa de bolas negras. El epimorfismo natural, n , consiste en transformar cada bola en la bolsa que la contiene. La biyección φ consiste en transformar la bolsa de bolas rojas en el color rojo, la bolsa de bolas azules en el color azul, etc. La inmersión i es, en este caso, la identidad.

95. Q/f está formado por los infinitos segmentos, cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, $s_i = \{i \leq x < i+1\}$. El homomorfismo natural n hace corresponder a cada número racional x , el segmento s_i que lo contiene. La biyección φ hace corresponder a cada segmento s_i su único extremo i . Finalmente, la inmersión i hace corresponder al número entero i él mismo, pero considerado como número racional.

96. I. Si P es una clasificación arbitraria se verifica $P R P$.

II. Si se verifica $P R Q$ y $Q R P$ y si s es una clase arbitraria de P , será $s \subset s'$, siendo s' una clase de Q , pero como, por la segunda relación, existe una clase s_1 de P tal que $s' \subset s_1$, será $s \subset s_1$ y como s y s_1 son clases de P , $s = s_1$, luego de $s \subset s' \subset s$, resulta $s = s'$. Análogamente, se ve que toda clase de Q lo es de P , luego P y Q son iguales.

III. Si se verifica $P R Q$ y $Q R M$ y si s es una clase arbitraria de P será $s \subset s'$, $s' \in Q$, luego $s' \subset s''$, $s'' \in M$, luego $s \subset s''$ para toda clase s de P , luego $P R M$.

97. Se ha demostrado en el texto.

98. I. Trivial. II. De $x R y$ y $y R x$, se deduce $x = y$, o bien $x + m = y$, $y + n = x$, de donde $x + (m + n) = x$, contradicción.

III. De $x R y$ y $y R z$ se deduce $x + m = y$, $y + n = z$, de donde $x + (m + n) = z$, que implica $x R z$; o bien $x = y$, $y + n = z$, de donde $x + n = z$; o bien $x + m = y$, $y = z$, de donde $x + m = z$; o bien, finalmente, $x = y$, $y = z$. En cualquier caso resulta $x R z$.

99. En Z : $x R y$ es equivalente a $y = x + m$, siendo m un número entero no negativo.

En Q : $x R y$ es equivalente a $y = x + m$, siendo m un número racional no negativo.

100. Sea R una relación de preorden en C . Sea R' la relación definida en C del siguiente modo: $x R' y$ es equivalente a $x R y$ y $y R x$. R' es una relación de igualdad. En efecto: I es consecuencia de $x R x$ y $x R x$. II es consecuencia de la equivalencia de $x R y$ y $y R x$ con $y R x$ y $x R y$. La III es consecuencia de que $x R y$ y $y R x$ e $y R z$ y $z R y$ implican $x R z$ y $z R x$. En el conjunto cociente C/R' se define la relación R'' del siguiente modo: $(x R') R'' (y R')$ es equivalente a $x R y$. La relación R'' es una relación de orden. Las pro-

iedades I y III son inmediatas. Veamos la II. Sea $(x R') R'' (y R') e (y R') R'' (x R')$, que equivale a $x R y$ y $y R x$, que dice que $x R' = y R'$.

101. Si a y b son números enteros y $b = a + m$, m es también número entero, luego la relación de orden en $\mathbb{Q}$ subordina la de $\mathbb{Z}$. Si $b = a + m$, siendo a , b y m naturales, m es entero positivo, y recíprocamente, si a , b y m son enteros positivos, m es natural, luego la definición de $\mathbb{Z}$ subordina la de $\mathbb{N}$.

102. I. Si $x \in A$, $[x, x] \subset \widehat{A}$ y $[x, x] = \{x\}$, luego $x \in \widehat{A}$.

II. Sea A convexo y sea z un elemento cualquiera de $\widehat{A}$. Será $z \in [x, y]$, $x, y \in A$, luego $[x, y] \subset A$ y $z \in A$. Recíprocamente, si $A = \widehat{A}$ y x, y son dos elementos arbitrarios de A , será $[x, y] \subset \widehat{A}$, luego $[x, y] \subset A$.

III. En virtud de I es $\widehat{A} \subset \widehat{\widehat{A}}$. Sea x un elemento arbitrario de $\widehat{\widehat{A}}$, será $x \in [a, b]$; $a, b \in \widehat{A}$, de donde $a \in [m, n]$, $b \in [p, q]$, $m, n, p, q \in A$. Por consiguiente, es $m \leq a \leq b \leq q$, y como $a \leq x \leq b$, será $m \leq x \leq q$, $m, q \in A$, luego $x \in [p, q] \subset \widehat{A}$.

IV. En efecto, si $x \in \widehat{A}$, será $x \in [a, b]$, $a, b \in A$, luego $a, b \in B$, luego $[a, b] \subset \widehat{B}$ y $x \in \widehat{B}$.

V. $x \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$ implica que $x \in \widehat{A}$, o $x \in \widehat{B}$, luego $x \in [a, b]$ y $\{a, b\} \subset A$. o $\{a, b\} \subset B$, luego $\{a, b\} \subset A \cup B$ y $[a, b] \subset \widehat{A \cup B}$, luego $x \in \widehat{A \cup B}$.

VI. a) $x \in \widehat{A \cap B}$ implica que $x \in [a, b]$, $\{a, b\} \in A$, $\{a, b\} \subset B$, luego $\{a, b\} \subset A \cap B$ y $[a, b] \subset \widehat{A \cap B}$, luego $x \in \widehat{A \cap B}$.

b) $x \in \widehat{A \cap B}$ implica que $x \in [a, b]$; $\{a, b\} \subset A \cap B$, luego $\{a, b\} \subset A$, $\{a, b\} \subset B$, de donde $[a, b] \subset \widehat{A}$, $[a, b] \subset \widehat{B}$ y $[a, b] \subset \widehat{A \cap B}$, $x \in \widehat{A \cap B}$.

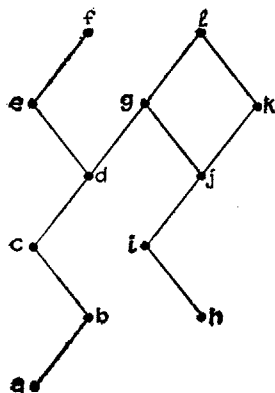


Fig. 13'.

103. Sí.

104. a) No. b) Sí. c) No. d) No. e) Sí: el m . f) No.

105. El diagrama puede ser el de la figura 13'. El diagrama muestra la transitividad de $\leq$.

106. a) No. b) No. c) Sí. Las cotas son m y j . d) No.

107. El conjunto $B = \{d, e, i, j\}$ está acotado superiormente, siendo g y l dos cotas superiores. El conjunto $C = \{e, c, g, l\}$ está acotado inferiormente, siendo c , b y a cotas inferiores del mismo. Tanto B como C son no acotados. El conjunto $D = \{b, c, g\}$ está acotado superior e inferiormente, luego está acotado.

108. Sí. Sí. Puede serlo o no.

109. a) Equivalentes. b) $S(B) = \{e, f, g, i, j, l\}$. c) $I(C) = \{d, m\}$. d) $S(E) = \{l\}$, $I(E) = \{j, i, h\}$.

110. I. Si $x \in S(N)$ será $y \leq x$, para todo y de N , luego también para todo y de M , luego $x \in S(M)$. Análogamente para la operación I.

II. Sea $x \in M$, para todo $y \in S(M)$ se verifica $x \leq y$, luego $x \in I S(M)$.

Sea $x \in M$, para todo $y \in I(M)$ se verifica $y \leq x$, luego $x \in S I(M)$.

III. De I y de II se deduce que $S I S(M) \subset S(M)$ y de II que $S(M) \subset S I S(M)$. Análogamente se prueba la segunda igualdad.

111. a) Para toda partición se verifica que $(a = x_0 < \dots < x_n = b) \leq (a = x_0 < \dots < x_n = b)$.

b) Si $(a = x_0 < \dots < x_n = b) \leq (a = y_0 < \dots < y_m = b)$ y $(a = y_0 < \dots < y_m = b) \leq (a = x_0 < \dots < x_n = b)$, será $x_i = y_i$; $i = 1, \dots, n$; y $m = n$, pues si fuese, por ejemplo, $y_i \neq x_i$, siendo i el primer número para el que esto ocurre, uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{i-1}, y_i]$ no estaría contenido en un único segmento de la otra partición.

c) Si $(a = x_0 < \dots < x_n = b) \leq (a = y_0 < \dots < y_m = b)$ y $(a = y_0 < \dots < y_m = b) \leq (a = x_0 < \dots < x_n = b)$, todo segmento $[x_{i-1}, x_i]$ está totalmente contenido en un segmento $[y_{j-1}, y_j]$ y éste en un segmento $[x_{h-1}, x_h]$, luego $[x_{i-1}, x_i]$ está totalmente contenido en $[x_{h-1}, x_h]$.

d) Dadas las particiones $(a = x_0 < \dots < x_n = b)$ y $(a = y_0 < \dots < y_m = b)$, la partición obtenida con todos los puntos de división x_i y todos los y_j sigue a ambas. La partición $[a, b]$ precede a todas.

112. No ofrece dificultad probar que es una relación de ordenación. Dados dos triángulos se eligen dos rectas que se corten y que contengan en el interior de uno de sus ángulos a todos los vértices de los dos triángulos y se cortan los lados de este ángulo por una recta que deje en el mismo semiplano a los vértices del ángulo y de los triángulos. Sin embargo, si dos triángulos no tienen ningún punto común no existe ningún triángulo contenido en ambos.

113. El conjunto del ejercicio 111 es un semirretículo $\vee$, ya que la superposición de dos particiones precede a cualquier partición que siga a ambas. El conjunto del ejercicio 112 no es semirretículo $\vee$ ni $\wedge$.

114. Es un semirretículo $\wedge$, pero no lo es $\vee$.

115. Puede conseguirse de muchas formas. Por ejemplo, añadiendo el nudo que se obtiene prolongando las semirrectas $a_1 a_2$ y $b_1 c_1$ hacia arriba.

116. a) Sea $S(x, y) = S(u)$, $S(x, y) = S(u')$. De $u \leq u$ se deduce que $u \in S(x, y)$, luego $u \in S(u')$ y $u' \leq u$. Análogamente, $u \leq u'$, luego $u = u'$. Análoga demostración sirve para i .

b) *Propiedad asociativa.* Sea $S(x, y) = S(u)$, $S(u, z) = S(w)$, $S(y, z) = S(v)$, $S(x, v) = S(w')$. Se verifica que $x \leq u$, $y \leq u$, $u \leq w$, $z \leq w$, de donde $x \leq w$, $y \leq w$, $z \leq w$, luego $x \leq w$, $v \leq w$, luego $w' \leq w$. Recíprocamente, de $y \leq v$, $z \leq v$, $x \leq w'$, $v \leq w'$ se deduce $x \leq w'$, $y \leq w'$, $z \leq w'$, luego $u \leq w'$, $z \leq w'$, de donde $w \leq w'$; por consiguiente, $w = w'$. Análogamente se demuestra la propiedad asociativa para la relación I .

c) *Propiedad conmutativa.* Si $S(x, y) = S(u)$, evidentemente $S(y, x) = S(u)$.

d) *Idempotencia.* $S(x, x) = S(x)$ e $I(x, x) = I(x)$, para todo x de A .

f) *Ley de simplificación.* Sea $I(u) = I(x, y)$, $S(v) = S(x, u)$. Por consiguiente, $u \leq x$, $u \leq y$, $x \leq v$, $u \leq v$. De donde $x \leq x$, $u \leq x$, luego $x \in S(x, u) = S(v)$ y $v \leq x$, que juntamente con $x \leq v$ da $x = v$.

Sea $S(u) = S(x, y)$, $I(v) = I(x, u)$. Por consiguiente, $x \leq u$, $y \leq u$, $v \leq x$, $v \leq u$. De $x \leq u$, $x \leq x$, se deduce que $x \in I(x, u) = I(v)$, luego $x \leq v$ y $x = v$.

117. En efecto, sea $S(C) = S(e)$, $S(C) = S(e_1)$. De la primera igualdad se deduce, en virtud de $e \leq e$, que $e \in S(C)$, luego $e \in S(e_1)$, luego $e_1 \leq e$. Análogamente, de la segunda se deduce que $e \leq e_1$, luego $e_1 = e$. Un razonamiento semejante prueba la unicidad de e' .

118. No. Se verifica que I implica II, pero II no implica I, como muestra el semirretículo del ejercicio 114 respecto del subconjunto $\{a_1, a_2, \dots\}$.

119. No. Por ejemplo, a_2 y b_2 no están relacionados, esto es, no se verifica ninguna de las dos relaciones: $a_2 \leq b_2$, $b_2 \leq a_2$.

120. Los conjuntos $\{a_1, a_2, \dots\}$, $\{b_1, b_2, \dots\}$, ..., $\{a_1, b_2, c_2, d_2, \dots\}$, $\{a_2, b_3, c_3, d_3, \dots\}$, ..., $\{a_1, b_2, b_3, c_3, c_4, d_4, d_5, e_5, \dots\}$, etc.

121. Sí. No. No.

122. C es un segmento. D no es segmento, pero posee máximo (b_2) y mínimo (d_4). E posee mínimo, pero no posee máximo.

123. No. Sí.

124. Sí. Fijado un punto A, como origen, se dice que X precede a Y, y se escribe $X \leq Y$, en el sentido ABC, cuando el sentido ABC es igual al sentido AXY. Esta relación es de ordenación total. Además, el elemento A no tiene ningún otro que le preceda.

125. La respuesta es afirmativa en el caso de los números enteros y negativa en el caso de los números racionales.

126. Sí. No. No.

127. En efecto, si x, y son dos elementos cualesquiera del conjunto, el conjunto $\{x, y\}$ posee un elemento mínimo; si este elemento es x se verifica que $x \leq x$ y $x \leq y$, luego x e y son comparables.

128. Sí.

129. No. Por ejemplo, el subconjunto de B formado por todos los números x tales que $3 \geq x > 2$, no posee un elemento mínimo.

130. No. Sí.

131. Si B es un subconjunto del conjunto de los números naturales, N, tal que 1.º) El número uno pertenece a B. 2.º) Si $n \in B$ se verifica que $n + 1 \in B$, entonces se verifica que $B = N$.

132. Sí.

133. No. Un elemento máximo es maximal, pero no viceversa.

134. Sí. Los elementos a_1 y b_1 son elementos maximales. No posee elemento máximo.

135. No, porque si m fuese máximo para todo elemento x de X sería $x \leq m$, $a \leq m$, $b \leq m$, y por ser a y b maximales sería $a = m = b$.

$$136. I'. (P \wedge Q) \wedge R = \neg [(\neg (P \wedge Q)) \vee (\neg R)] = \neg [(\neg (\neg ((\neg P) \vee (\neg Q)))) \vee (\neg R)]$$

$$P \wedge (Q \wedge R) = \neg [(\neg P) \vee (\neg (Q \wedge R))] = \neg [(\neg P) \vee (\neg (\neg ((\neg Q) \vee (\neg R))))]$$

De la primera se deduce:

$$\begin{aligned} \neg [(\neg (\neg ((\neg P) \vee (\neg Q)))) \vee (\neg R)] &= \neg [(\neg P) \vee (\neg Q)] \vee (\neg R) \\ &= \neg [(\neg P) \vee ((\neg Q) \vee (\neg R))] \end{aligned}$$

y de la segunda:

$$\neg [(\neg P) \vee (\neg (\neg ((\neg Q) \vee (\neg R))))] = \neg [(\neg P) \vee ((\neg Q) \vee (\neg R))].$$

$$\text{II}'. P \wedge Q = \neg [(\neg P) \vee (\neg Q)] = \neg [(\neg Q) \vee (\neg P)] = Q \wedge P.$$

$$\text{III}'. P \wedge P = \neg [(\neg P) \vee (\neg P)] = \neg (\neg P) = P.$$

IV'. Recordando III' se obtiene:

$$\begin{aligned} P \wedge (P \vee Q) &= \neg [(\neg P) \vee (\neg (P \vee Q))] = \neg [(\neg P) \vee [(\neg P) \wedge (\neg Q)]] \\ &= \neg (\neg P) = P. \end{aligned}$$

137. a) La matemática es poesía o no es el Ebro un río australiano. b) Dos igual a uno o no es uno igual a cero. c) El profesor es injusto o no me han suspendido en matemáticas.

$$\begin{aligned} 138. P \vee (Q \wedge R) &= (\neg \neg P) \vee [(\neg \neg Q) \wedge (\neg \neg R)] = \neg (\neg P) \vee [\neg [(\neg Q) \vee (\neg R)]] \\ &= \neg [(\neg P) \wedge ((\neg Q) \vee (\neg R))] = \neg [((\neg P) \wedge (\neg Q)) \vee ((\neg P) \wedge (\neg R))] \\ &= \neg [(\neg (P \vee Q)) \vee (\neg (P \vee R))] = \neg [\neg [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]] = (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \end{aligned}$$

139. Significa que en cualquier proposición en que figura como componente la proposición A, podemos sustituirla por la proposición B y colocar el signo = entre las proposiciones que resultan. Así, por ejemplo, si «nubes blancas = ladrillos rojos», se puede escribir: el cielo está cubierto de nubes blancas = el cielo está cubierto de ladrillos rojos.

140. a) Sustituyendo x, y, z, t por la siguiente proposición: $1 + 1 = 3$, dos ángulos rectos son iguales, hace calor, llueve, resulta: $(1 + 1 = 3$ o dos ángulos rectos son iguales) y hace calor implica no llueve o $1 + 1 = 3$.

b) Empleando las mismas proposiciones anteriores: no $1 + 1 = 3$ y dos ángulos rectos son iguales implica hace calor.

$$141. a) v(P \vee (\neg P)) = v(P) + v(\neg P) = v(P) + c v(P) = 1.$$

$$b) v(P \wedge (\neg P)) = v(P) \cdot v(\neg P) = v(P) \cdot c v(P) = 0.$$

$$\begin{aligned} c) v(A \longleftrightarrow B) &= v[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)] = v[A \rightarrow B] \cdot v[B \rightarrow A] \\ &= v(B \vee \neg A) \cdot v(A \vee \neg B) = [v(B) + c v(A)] \cdot [v(A) + c v(B)] \\ &= v(A) \cdot v(B) + c v(A) \cdot c v(B), \end{aligned}$$

luego si $v(A) = v(B)$ se verifica que $v(A \longleftrightarrow B) = 1$ y si $v(A) \neq v(B)$, se verifica que $v(A \longleftrightarrow B) = 0$.

d) $v(A \vee B \longleftrightarrow B \vee A) = v(A \vee B) \cdot v(B \vee A) + c v(A \vee B) \cdot c v(B \vee A)$. Ahora bien, $v(A \vee B) = v(A) + v(B) = v(B) + v(A)$, luego $v(A \vee B \longleftrightarrow B \vee A) = 1$.

e) De $v[(A \vee B) \vee C] = v(A \vee B) + v(C) = [v(A) + v(B)] + v(C) = v(A) + [v(B) + v(C)] = v(A) + v(B \vee C) = v[A \vee (B \vee C)]$, resulta que $v[(A \vee B) \vee C \longleftrightarrow A \vee (B \vee C)] = 1$.

f) De $v(A \vee A) = v(A) + v(A) = v(A)$ se deduce $v(A \vee A \longleftrightarrow A) = 1$.

g) De $v(A \vee (A \wedge B)) = v(A) + v(A \wedge B) = v(A) + v(A) \cdot v(B) = v(A) [1 + v(B)] = v(A)$ se deduce que $v(A \vee (A \wedge B) \longleftrightarrow A) = 1$.

h) De $v[A \wedge (B \vee C)] = v(A) \cdot v(B \vee C) = v(A) \cdot [v(B) + v(C)] = v(A) v(B) + v(A) v(C) = v(A \wedge B) + v(A \wedge C) = v[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$, resulta $v(A \wedge (B \vee C) \longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)) = 1$.

142. I ha sido demostrada en el ejercicio 141 e). II ha sido demostrada en 141 d). III ha sido probada en 141 f). IV en 141 g). V en 141 h). VI en 141 a). VII. $v(\neg (P \vee Q)) = c v(P \vee Q) = c(v(P) + v(Q))$, luego $v(\neg (P \vee Q))$ es igual a uno únicamente cuando

$v(P) = v(Q) = 0$ y $v(\neg P \wedge \neg Q) = cv(P) \cdot cv(Q)$ es igual a uno únicamente cuando $v(P) = v(Q) = 0$. Análogamente, $v(\neg(P \wedge Q)) = cv(P \wedge Q) = c(v(P)) \cdot v(Q)$ y este valor es igual a cero únicamente cuando $v(P) = v(Q) = 1$, y lo mismo sucede con $v(\neg P \vee \neg Q)$. VIII. $v(P \rightarrow Q) = v(Q \vee \neg P) = v(Q) + cv(P)$, luego, $v(P \rightarrow Q) = 1$ equivale a que uno, por lo menos de los dos valores $v(Q)$ y $cv(P)$ sea igual a uno. Si $v(Q) = 0$ deberá ser, por tanto, $cv(P) = 1$, luego $v(P) = 0$.

143. a) verdad. b) verdad. c) falso. d) verdad.

144. a) verdad. b) falso. c) verdad.

145. I. $P \Rightarrow P$. En efecto $v(P \rightarrow P) = v(P \vee \neg P) = 1$.

II. $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$ equivale a $P = Q$. En efecto, $v(P \rightarrow Q) = 1$, $v(Q \rightarrow P) = 1$, de donde $v(P \leftrightarrow Q) = v((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) = v(P \rightarrow Q) \cdot v(Q \rightarrow P) = 1$.

III. Si $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow R$ se verifica que $P \Rightarrow R$. En efecto, $v(P \rightarrow Q) = v(Q \vee \neg P) = v(Q) + cv(P) = 1$, $v(Q \rightarrow R) = v(R \vee \neg Q) = v(R) + cv(Q) = 1$, de estas dos igualdades resulta que uno, por lo menos, de $cv(P)$ y $v(R)$ debe ser uno, luego $v(R) + cv(P) = 1$, luego $v(R \vee \neg P) = 1$, $v(P \rightarrow R) = 1$.

§ 3. GRUPOS

146. a) $a(y, z) = 2y + z$. b) $a(a(x, y), z) = a(2x + y, z) = 4x + 2y + z$. c) $a(x, a(y, z)) = 2x + a(y, z) = 2x + 2y + z$. d) $a(a(x, y), z) = (x + y) + z$. f) $a(x, a(y, z)) = x + (y + z)$. g) $a(a(x, y), a(z, t)) = ((x + y) + (z + t))$. h) $a(a(a(x, y), z), t) = [(x + y) + z] + t$.

$$\begin{aligned} 147. \quad a(y, x) &= \sqrt[3]{y} \cdot a(a(x, y), z) = \sqrt[3]{a(x, y)} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}, \\ a(x, a(y, z)) &= \sqrt[3]{\frac{a(y, z)}{x}} = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \cdot a(a(x, y), a(z, t)) = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a(z, t)}{x}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a(a(x, y), z), t}{x}} = \sqrt[3]{\frac{y}{x} \cdot \frac{a(a(x, y), z), t}{x}} \end{aligned}$$

148. Sí. No, porque al par $(2, -1)$ no le corresponde ningún número, ya que $a(2, -1) = \sqrt{-1}$ no es un número racional, por consiguiente a no es aplicación. No, porque al par $(1, 5)$ no le corresponde ningún número natural, ya que $a(1, 5) = 1 - 3$. Sí.

149. No. No. Sí. Sí. estas dos últimas afirmaciones se justifican viendo que cualesquiera que sean los números racionales x e y , $a(x, y) = x + y + 4$ es una aplicación y que $a(a(x, y), z) = (x + y + 4) + z + 4 = x + y + z + 8$, y $a(x, a(y, z)) = x + (y + z + 4) + 4 = x + y + z + 8$.

150. La respuesta es afirmativa en todos los casos.

151. No. En efecto, $a^* f(x, y) = a^* \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y \right) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}y + 1$

$$f(a(x, y)) = f(3x + y) = x + \frac{1}{3}y.$$

152. Sí. En efecto: $a^* f(x, y) = a^*(mx, my) = mx + my = m(x + y) = ma(x, y) = f(a(x, y))$.

153. a) $a^* f(x, y) = a^*(m x, m y) = m^2 x y$, $f a(x, y) = f(x y) = m x y$, luego la respuesta es negativa.

b) Si. $a^* f(x, y) = a^*(x^m, y^m) = x^m y^m = (x y)^m = f(x y) = f a(x, y)$.

c) Si. $a^* f(x, y) = a^*(\sqrt[m]{x}, \sqrt[m]{y}) = \sqrt[m]{x} \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{x y} = f(x y) = f a(x, y)$.

d) Si. $a^* f(x, y) = a^*(\log x, \log y) = \log x + \log y = \log x y = \log a(x, y) = f a(x, y)$.

154. Si. En efecto, $f a(x, y) = n d$, siendo $d = \text{m. c. d.}(x, y)$ y $a^* f(x, y) = a^*(f(x), f(y)) = \text{m. c. d.}(n x, n y) = n d$.

155. Si. Puesto que $a(\varphi, \psi)(x) = \psi \varphi(x) = p(m x + n) + q = p m x + (p n + q) \in A$.

Si. Puesto que $a(a(\varphi, \psi), \xi) = \xi(\psi \varphi)$, y si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tienen el significado del enunciado y $\xi(x) = r x + s$, $\xi(\psi \varphi)(x) = \xi(p m x + (p n + q)) = r p m x + r p n + r q + s = r p(m x + n) + (r q + s) = (\xi \psi)(m x + n) = (\xi \psi) \varphi(x)$.

No, puesto que $f a(\varphi, \psi)(x) = f(\psi \varphi)(x) = f(p m x + (p n + q)) = \lambda p m x + \lambda(p n + q) + \mu$ y $a f(\varphi, \psi)(x) = a(f \varphi, f \psi)(x) = (f \psi)(f \varphi)(x) = (f \psi)(\lambda m x + \lambda n + \mu)$, pero $f \psi(x) = \lambda p x + \lambda q + \mu$, luego $(f \psi)(\lambda m x + \lambda n + \mu) = \lambda p(\lambda m x + \lambda n + \mu) + \lambda q + \mu = \lambda^2 p m x + \lambda^2 p n + \lambda p \mu + \lambda q + \mu$. Para que f sea un homomorfismo se debe verificar:

$$\lambda^2 p m x + \lambda^2 p n + \lambda p \mu + \lambda q + \mu = \lambda p m x + \lambda p n + \lambda q + \mu,$$

de donde:

$$(\lambda - 1) \lambda p m x + (\lambda - 1) \lambda p n + \lambda p \mu = 0,$$

para cualquier valor de m, n, p, q y x . Esto se puede conseguir únicamente si $\lambda = 1$, $\mu = 0$, que proporciona la identidad.

156. Si. No porque $g(1) = m \notin N'$.

157. 1.º Uniformidad. Sea $x + f = x' + f$, $y + f = y' + f$. Esto significa que $x R x'$ e $y R y'$, o bien $f(x) = f(x')$, $f(y) = f(y')$, de donde $f(x) + f(y) = f(x') + f(y')$, o bien, por ser f homomorfismo, $f(x + y) = f(x' + y')$, que implica que $x + y + f = x' + y' + f$.

2.º Si G es un semigrupo, se verifica:

$$\begin{aligned} [(x + f) + (y + f)] + (z + f) &= (x + y + f) + (z + f) = (x + y) + z + f \\ &= x + (y + z) + f = (x + f) + [y + z + f] = (x + f) + [(y + f) + (z + f)]. \end{aligned}$$

158. Si, puesto que si $x, y \in G$, $1 - y \in G$, $x(1 - y) \in G$ y $\sqrt{x(1 - y)} \in G$.

No, puesto que $(x + y) + z = \sqrt{x(1 - y)} + z = \sqrt{\sqrt{x(1 - y)}(1 - z)}$

$$= \sqrt[4]{x(1 - y)(1 - z)^2} \text{ y } x + (y + z) = x + \sqrt{y(1 - z)} = \sqrt{x(1 - \sqrt{y(1 - z)})}$$

159. No, puesto que si $x' \neq m$ no existe ningún x tal que $f(x) = m x = x'$.

Si, puesto que de $f(x) = f(y)$ se deduce que $m x = m y$, de donde $x = y$.

160. Si. En efecto, a) $f(m y + m z) = f[m(y + z)] = y + z = f(m y) + f(m z)$

161. 1) a) n es una aplicación, puesto que $x + f$ está unívocamente determinado por x . b) $n(x + y) = x + y + f = (x + f) + (y + f) = n(x) + n(y)$. c) Dada la clase $x + f$ se verifica que $n(x) = x + f$.

2) a) b es una aplicación, ya que, si $x + f = x' + f$, se verifica que $f(x) = f(x')$.

b) b es un homomorfismo, ya que $b((x + f) + (y + f)) = b((x + y) + f) = f(x + y)$

$= f(x) + f(y) = b(x + f) + b(y + f)$. c) b es epimorfismo, ya que dado $f(x)$ se verifica que $b(x + f) = f(x)$. d) b es isomorfismo, ya que de $b(x + f) = b(y + f)$ se deduce que $f(x) = f(y)$, luego $x + f = y + f$.

3) Es trivial.

162. En efecto, si u y u' fuesen dos elementos neutros, sería:

$$a(u, u') = u = u'.$$

163. En efecto, si existen x' y x'' tales que $a(x, x') = a(x'', x) = u$, para todo x , será $a(x'', a(x, x')) = x''$, $a(a(x'', x), x') = x''$, $a(u, x') = x''$, $x' = x''$.

164. a) No. b) No. c) Sí. d) No, porque el cero no posee inverso.

165. Se trata de biyecciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ sobre sí mismo. Como el producto de aplicaciones es asociativo, basta observar que la biyección $(1, 2, 3, 4)$ es la identidad y que toda biyección posee una inversa.

166. A es un semigrupo con elemento unidad y B es un grupo.

167. $n!$

168. $((1\ 2\ 3\ 4)) = (1)(2)(3)(4)$, $((1\ 2\ 4\ 3)) = (1)(2)(3\ 4)$, $((1\ 4\ 2\ 3)) = (1)(2\ 4\ 3)$, $((4\ 1\ 2\ 3)) = (1\ 4\ 3\ 2)$, $((1\ 3\ 2\ 4)) = (1)(2\ 3)(4)$, $((1\ 3\ 4\ 2)) = (1)(2\ 3\ 4)$, $((1\ 4\ 3\ 2)) = (1)(2\ 4)(3)$, $((4\ 1\ 3\ 2)) = (1\ 4\ 2)(3)$, $((3\ 1\ 2\ 4)) = (1\ 3\ 2)(4)$, $((3\ 1\ 4\ 2)) = (1\ 3\ 4\ 2)$, $((3\ 4\ 1\ 2)) = (1\ 3)(2\ 4)$, $((4\ 3\ 1\ 2)) = (1\ 4\ 2\ 3)$, $((2\ 1\ 3\ 4)) = (1\ 2)(3)(4)$, $((2\ 1\ 4\ 3)) = (1\ 2)(3\ 4)$, $((2\ 4\ 1\ 3)) = (1\ 2\ 4\ 3)$, $((4\ 2\ 1\ 3)) = (1\ 4\ 3)(2)$, $((2\ 3\ 1\ 4)) = (1\ 2\ 3)(4)$, $((2\ 3\ 4\ 1)) = (1\ 2\ 3\ 4)$, $((2\ 4\ 3\ 1)) = (1\ 2\ 4)(3)$, $((4\ 2\ 3\ 1)) = (1\ 4)(2)(3)$, $((3\ 2\ 1\ 4)) = (1\ 3)(2)(4)$, $((3\ 2\ 4\ 1)) = (1\ 3\ 4)(2)$, $((3\ 4\ 2\ 1)) = (1\ 3\ 2\ 4)$, $((4\ 3\ 2\ 1)) = (1\ 4)(2\ 3)$.

169. Teniendo en cuenta la descomposición en ciclos del ejercicio anterior, se obtiene: $((1\ 2\ 3\ 4)) = (1)(2)(3)(4)$, $((1\ 2\ 4\ 3)) = (1)(2)(3\ 4)$, $((1\ 4\ 2\ 3)) = (1)(2\ 4)(2\ 3)$, $((4\ 1\ 2\ 3)) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$, $((1\ 3\ 2\ 4)) = (1)(2\ 3)(4)$, $((1\ 3\ 4\ 2)) = (1)(2\ 3)(2\ 4)$, $((1\ 4\ 3\ 2)) = (1)(2\ 4)(3)$, $((4\ 1\ 3\ 2)) = (1\ 4)(1\ 2)(3)$, $((3\ 1\ 2\ 4)) = (1\ 3)(1\ 2)(4)$, $((3\ 1\ 4\ 2)) = (1\ 3)(1\ 4)(1\ 2)$, $((3\ 4\ 1\ 2)) = (1\ 3)(2\ 4)$, $((4\ 3\ 1\ 2)) = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)$, $((2\ 1\ 3\ 4)) = (1\ 2)(3)(4)$, $((2\ 1\ 4\ 3)) = (1\ 2)(3\ 4)$, $((2\ 4\ 1\ 3)) = (1\ 2)(1\ 4)(1\ 3)$, $((4\ 2\ 1\ 3)) = (1\ 4)(1\ 3)(2)$, $((2\ 3\ 1\ 4)) = (1\ 2)(1\ 3)(4)$, $((2\ 3\ 4\ 1)) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)$, $((2\ 4\ 3\ 1)) = (1\ 2)(1\ 4)(3)$, $((4\ 2\ 3\ 1)) = (1\ 4)(2)(3)$, $((3\ 2\ 1\ 4)) = (1\ 3)(2)(4)$, $((3\ 2\ 4\ 1)) = (1\ 3)(1\ 4)(2)$, $((3\ 4\ 2\ 1)) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 4)$, $((4\ 3\ 2\ 1)) = (1\ 4)(2\ 3)$.

170. El número de permutaciones que se descomponen en producto de un número par de transposiciones es igual al número de las que se descomponen en un número impar; ambos números son, por tanto, igual a la mitad del número de permutaciones. La descomposición no es única ya que, por ejemplo, $(1)(2)(3\ 4) = (1\ 3)(1\ 4)(1\ 3)(2)$, o bien, $(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(2\ 3)$. Toda transposición $(a\ b)$ se puede descomponer en producto de tres trasposiciones cuyo primer elemento sea el 1: $(a\ b) = (1\ a)(1\ b)(1\ a) = (1\ b)(1\ a)(1\ b)$; como la descomposición en ciclos es única y la descomposición de ciclos en transposiciones en la forma canónica indicada en el ejercicio anterior también y la descomposición de una transposición en producto de otras proporciona un número impar de ellas y para poder simplificar es preciso que aparezcan consecutivas dos transposiciones iguales, resulta que, mediante todas estas operaciones, no se altera la paridad del número de transposiciones.

171. El número de transposiciones del producto es la suma de los números de transposiciones de los factores.

172. La tabla es la siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
(1)(2)(3)(4) = 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
(12)(34) = 2	2	1	4	3	12	10	11	9	8	6	7	5	23	21	18	22	20	15	24	17	14	16	13	19
(13)(24) = 3	3	4	1	2	8	11	10	5	12	7	6	9	17	22	19	21	13	24	15	23	16	14	20	18
(14)(23) = 4	4	3	2	1	9	7	6	12	5	11	10	8	20	16	24	14	23	19	18	13	22	21	17	15
(1)(234) = 5	5	9	12	8	6	1	3	10	11	4	2	7	16	18	17	24	22	23	20	21	19	15	14	13
(1)(243) = 6	6	11	7	10	1	5	12	4	2	8	9	3	24	23	22	13	15	14	21	19	20	17	18	16
(2)(134) = 7	7	10	6	11	4	9	8	1	3	12	5	2	15	17	21	20	24	16	22	18	13	23	19	14
(2)(143) = 8	8	12	9	5	11	3	1	7	6	2	4	10	21	24	13	18	14	20	23	16	15	19	22	17
(3)(124) = 9	9	5	8	12	7	4	2	11	10	1	3	6	14	19	23	15	21	17	13	22	18	24	16	20
(3)(142) = 10	10	7	11	6	2	12	5	3	1	9	8	4	19	13	16	23	18	21	14	24	17	20	15	22
(4)(123) = 11	11	6	10	7	3	8	9	2	4	5	12	1	18	20	14	17	19	22	16	15	23	13	24	21
(4)(132) = 12	12	8	5	9	10	2	4	6	7	3	1	11	22	15	20	19	16	13	17	14	24	18	21	23
(1234) = 13	13	20	17	23	18	22	16	24	15	21	14	19	3	6	12	10	1	8	9	4	7	11	2	5
(1342) = 14	14	22	21	16	17	24	15	20	23	18	19	13	8	4	6	1	9	11	10	12	2	3	5	7
(1423) = 15	15	18	24	19	16	23	20	14	21	13	17	22	6	9	2	12	7	1	3	11	8	5	10	4
(1243) = 16	16	21	22	14	23	15	24	13	17	19	18	20	12	1	7	4	5	10	11	8	3	2	9	6
(1432) = 17	17	23	13	20	24	14	21	18	19	16	22	15	1	11	9	7	3	5	12	2	10	6	4	8
(1324) = 18	18	15	19	24	22	13	17	21	14	23	20	16	10	8	1	5	11	2	4	7	9	12	6	3
(34) = 19	19	24	18	15	21	20	23	22	16	17	13	14	11	12	4	9	10	3	1	6	5	8	7	2
(24) = 20	20	13	23	17	19	21	14	15	24	22	16	18	2	7	8	11	4	12	5	1	6	10	3	9
(23) = 21	21	16	14	22	20	19	18	17	13	15	24	23	9	3	10	2	8	7	6	5	1	4	12	11
(14) = 22	22	14	16	21	13	18	19	23	20	24	15	17	5	2	11	3	12	6	7	9	4	1	8	10
(13) = 23	23	17	20	13	15	16	22	19	18	14	21	24	4	10	5	6	2	9	8	3	11	7	1	12
(12) = 24	24	19	15	18	14	17	13	16	22	20	23	21	7	5	3	8	6	4	2	10	12	9	11	1

173. a) No, porque el producto del primer elemento por sí mismo: $[(1\ 2\ 3)(4)] [(1\ 2\ 3)(4)] = (1\ 3\ 2)(4)$, no pertenece al conjunto H. b) No, porque el producto de los dos elementos de K no pertenece a K. c) Sí, porque el producto de dos elementos cualesquiera de L pertenecen a L, además pertenece el elemento unidad, y los inversos de cada uno de ellos también pertenecen al conjunto L.

174. Los subgrupos del grupo S de todas las permutaciones con cuatro elementos son los siguientes: $A = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1)(2\ 3\ 4), (1)(3\ 2\ 4), (2)(1\ 3\ 4), (2)(3\ 1\ 4), (3)(1\ 2\ 4), (3)(2\ 1\ 4), (4)(1\ 2\ 3), (4)(2\ 1\ 3)\}$; $B = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$; $C = \{(1)(2)(3)(4), (1)(2\ 3\ 4), (1)(3\ 2\ 4)\}$; $D = \{(1)(2)(3)(4), (2)(1\ 3\ 4), (2)(3\ 1\ 4)\}$; $E = \{(1)(2)(3)(4), (3)(1\ 2\ 4), (3)(2\ 1\ 4)\}$; $F = \{(1)(2)(3)(4), (4)(1\ 2\ 3), (4)(2\ 1\ 3)\}$; $G = \{(1)(2)(3)(4), (1)(2\ 3\ 4), (1)(3\ 2\ 4), (1)(2)(3\ 4), (1)(3)(2\ 4), (1)(4)(2\ 3)\}$; $H = \{(1)(2)(3)(4), (2)(1\ 3\ 4), (2)(3\ 1\ 4), (2)(1)(3\ 4), (2)(3)(1\ 4), (2)(4)(1\ 3)\}$; $I = \{(1)(2)(3)(4), (3)(1\ 2\ 4), (3)(2\ 1\ 4), (3)(1)(2\ 4), (3)(2)(1\ 4), (3)(4)(1\ 2)\}$; $J = \{(1)(2)(3)(4), (4)(1\ 2\ 3), (4)(2\ 1\ 3), (4)(1)(2\ 3), (4)(2)(1\ 3), (4)(3)(1\ 2)\}$; $K = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3)(4), (1)(2)(3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4)\}$; $L = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3)(2)(4), (1)(3)(2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$; $M = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 4)(2)(3), (2\ 3)(1\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2)\}$; $S; \{(1)(2)(3)(4)\} = 1$; $N = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)\}$; $P = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 3)\}$; $Q = \{(1)(2)(3)(4), (1\ 4)\}$; $R = \{(1)(2)(3)(4), (2\ 3)\}$; $T = \{(1)(2)(3)(4), (2\ 4)\}$; $U = \{(1)(2)(3)(4), (3\ 4)\}$

175. 1. Para que el subconjunto H de un grupo multiplicativo G sea un subgrupo de G es necesario y suficiente que:

1. Para todo par de elementos x, y de H se verifique que $xy \in H$.
2. El elemento unidad de G pertenece a H.
3. Para todo elemento x de H se verifica que $x^{-1} \in H$.

2. Para que el subconjunto H de un grupo multiplicativo G sea un subgrupo de G es necesario y suficiente que, para todo par de elementos x, y de H, se verifique que $xy^{-1} \in H$.

176. M^+ es subgrupo de M. En efecto, si $x, y \in M^+$, se verifica que $x = s_1 \dots s_{2k}$, $y = s'_1 \dots s'_{2h}$, siendo s_i, s'_j simetrías axiales. Como el cuadrado de una simetría es la identidad, esto es, $s_i^2 = s_j'^2 = 1$, resulta que

$$y^{-1} = s'_{2h} s'_{2h-1} \dots s'_1 \quad y \quad xy^{-1} = s_1 \dots s_{2k} s'_{2h} \dots s'_1,$$

que es un producto de $2(h+k)$ simetrías axiales, luego xy^{-1} es un movimiento directo.

T es un subgrupo de M^+ . Puesto que toda traslación se puede descomponer en producto de dos simetrías, las traslaciones son movimientos directos. Si τ_a y τ_b son traslaciones definidas por los vectores libres a y b , la traslación inversa de τ_b es τ_{-b} y $\tau_a \tau_{-b} = \tau_{a-b}$ es también una traslación.

G no es subgrupo. Ya que el producto de dos giros puede ser una traslación.

G_0 es subgrupo de M^+ . Ya que el inverso del giro ξ_φ es el $\xi_{-\varphi}$ y $\xi_\varphi \xi_{-\varphi} = \xi_{\varphi-\varphi}$ es también giro de centro O.

C no es subgrupo de M^+ . Las simetrías centrales son movimientos directos, ya que las simetrías centrales son producto de dos simetrías axiales de ejes ortogonales. Como la inversa de una simetría es ella misma y el producto de dos simetrías centrales de centros O y O' se pueden descomponer en producto de una simetría respecto a la perpendicular a OO' trazada por O, por el cuadrado de la simetría OO' y por la simetría de eje perpen-

dicular a OO' por O' , resulta que el producto de dos simetrías centrales es una traslación.

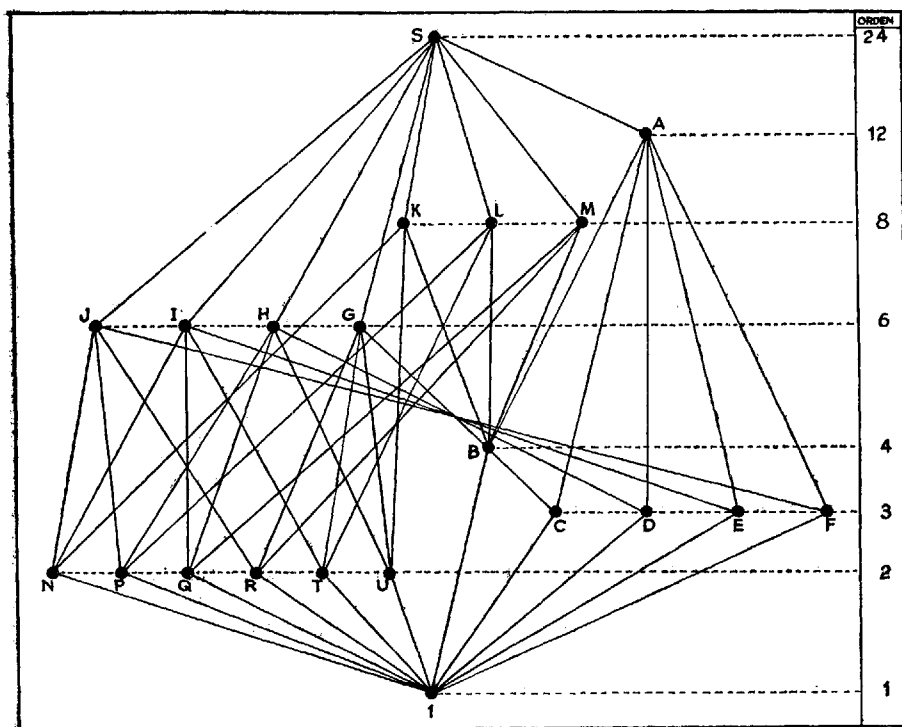


Fig. 14' a).

S tampoco es subgrupo de M . Ya que el producto de dos simetrías axiales no es otra simetría axial.

177. El grafo correspondiente a los subgrupos del grupo de las permutaciones con cuatro elementos es el de la figura 14' a) y el de los subgrupos del ejercicio 176 el de la figura 14' b)

178. Sea X un subgrupo de Z y sea x el menor entero positivo contenido en X . Todos los múltiplos de x pertenecen a X , luego si representamos por (x) el conjunto de todos los múltiplos de x , se verifica que $(x) \subset X$. Sea y un elemento arbitrario de X y sea $y = px + q$, $0 \leq q < x$. De $y \in X$, $px \in X$ se deduce que $q = y - px \in X$, y como x es el menor número positivo contenido en X , resulta que $q = 0$, luego $X = (x)$. Por consiguiente, los subgrupos de Z están formados por los múltiplos de cada uno de los números enteros no negativos.

179. Un subgrupo es el $\{1\}$, otro el Q^* . Sea X un subgrupo de Q^* distinto del $\{1\}$. Sea $x \in X$, $x \neq 1$. Si $[x]$ es el conjunto de todas las potencias de exponente entero de x , $[x]$ es un subgrupo de Q^* y $[x] \subset X$.

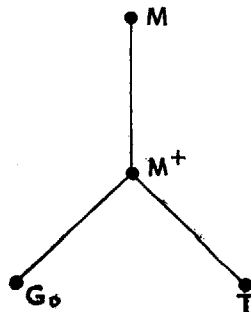


Fig. 14' b).

180. $S/A = \{A, (12) \cdot A\}$, $S/K = \{K, (13) \cdot K, (14) \cdot K\}$, $S/J = \{J, (14) \cdot J, (24) \cdot J, (34) \cdot J\}$, $S/B = \{B, (12) \cdot B, (13) \cdot B, (14) \cdot B, (123) \cdot B, (124) \cdot B\}$, $S/C = \{C, (123) \cdot C, (142) \cdot C, (134) \cdot C, (12) \cdot C, (12) \cdot (123) \cdot C, (12) \cdot (142) \cdot C, (12) \cdot (134) \cdot C\}$, $S/N = \{N, (12)(34) \cdot N, (13)(24) \cdot N, (14)(23) \cdot N, (234) \cdot N, (324) \cdot N, (134) \cdot N, (314) \cdot N, (124) \cdot N, (214) \cdot N, (123) \cdot N, (231) \cdot N\}$.

181. $M/M^+ = \{M^+, s \cdot M\}$, en donde s es una simetría axial.

182. $S/A = \{[1, (abc)], [(ab), (ac), (bc)]] = S \setminus A$.

$S/B = \{[1, (ab)], [(ab), (bc)], [(ac), (bc)], [(ac), (ab)]\}$,

$S \setminus B = \{[1, (ab)], [(ab), (ac)], [(ac), (bc)], [(ac), (ab)]\}$.

183. a) $f(xy) = fx + fy$. b) $f(x+y) = fx \cdot fy$. c) $f(xy) = fx \cdot fy$

184. a) $f(x+y) = 3+x+y$, $f(x) + f(y) = 6+x+y$, luego f no es homomorfismo.

b) $g(x+y) = 3(x+y) = 3x+3y = gx+gy$, luego g es homomorfismo

c) $h(x+y) = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = h(x) + h(y) + 3x^2y + 3xy^2 \neq h(x) + h(y)$, luego h no es homomorfismo.

185. Si, puesto que $f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = fx \cdot fy$, y a^x es un número racional, cualquiera que sea el entero x .

186. a) f es homomorfismo inyectivo, pero no es isomorfismo porque no es epimorfismo, ya que 3 no posee original. b) g es isomorfismo. c) h es isomorfismo. d) k no es inyectivo, ya que $k(x) = k(-x)$. e) l es un isomorfismo.

187. a) Siendo 12 el número de elementos de A , la clase $(12)A$ tendrá doce elementos, luego en ella figuran todas las permutaciones impares, lo mismo que en $A(12)$, luego $(12)A = A(12) = (13)A = A(13) = \dots$. b) $(123)D = \{(123), (243), (142), (134)\}$, $(132)D = \{(132), (143), (234), (124)\}$ y $1D = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ son todas las clases de A/D . Las clases de A/D son: $D(123) = \{(123), (134), (243), (142)\}$, $D(132) = \{(132), (143), (234), (124)\}$ y $D \cdot 1 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

188. Solución:

	D	(123) D	(132) D
D	D	(123) D	(132) D
(123) D	(123) D	(132) D	D
(132) D	(132) D	D	(123) D

189. a) $\text{in}(f) = \text{or}(f)$; es consecuencia del ejercicio 187, en el que se ha visto que todo elemento x de A se puede expresar como producto de un elemento de D por un elemento de B .

b) f es una aplicación, pues siendo D un subgrupo de A , si $ys = x$, $y's' = x$, $y, y' \in B$, $s, s' \in D$, sería $ys = y's'$, luego ys e $y's'$ pertenecerían a la misma clase tD , de donde $v = y' = t$.

c) f es un homomorfismo. $f(x) = y$, $f(x') = y' \Leftrightarrow x = ys$, $x' = y's'$, $xx' = ysy's' = yy'(ts')$, $ts' \in D$, luego $f(xx') = yy' = f(x) \cdot f(x')$.

d) Para ver que $y \cdot \ker(f) \rightarrow y$ es un isomorfismo basta observar que la tabla de multiplicar de $A/\ker(f)$ es la del ejercicio 188 y es la misma que la tabla de multiplicar de B .

190. $\text{Im}(f) = (n)$, siendo (n) el conjunto de los múltiplos de n . Si $f(x) = 0$, será $nx = 0$, luego $x = 0$; por consiguiente, $\ker(f) = 0$. Luego $Z/\ker(f) = Z/(0) = Z$. Por consiguiente, (8) da:

$$Z \approx (n).$$

191. a) $\text{or}(f) = \text{in}(f)$. b) $f(x) = y, f(x) = y' \Leftrightarrow x = pn + y, x = p'n + y', y < n, y' < n$, de donde $y - y' = (p' - p)n$, pero $|y - y'| < n$, luego $y - y' = 0 \Rightarrow y = y'$. c) $f(x) = y, f(x') = y' \Rightarrow x = pn + y, x' = p'n + y', y < n, y' < n$. luego $f(x + x') = (p + p')n + y + y' = (p + p' + a)n + s$, siendo $y + y' = an + s$, luego $f(x + x') = s$, pero $s = y + y'$, siendo ésta la adición en K , y $f(x + x') = y + y' = f(x) + f(x')$. d) $x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = pn$. Recíprocamente, $x = pn \Rightarrow f(x) = 0, x \in \ker(f)$. Luego $\ker(f) = (n)$, siendo (n) el conjunto de los múltiplos de n . El teorema de isomorfía proporciona: $K \approx Z/(n)$, puesto que f es un epimorfismo.

192. a) $\text{or}(\varphi) = \text{in}(\varphi)$. b) $\varphi(x) = y, \varphi(x) = y' \Rightarrow y = axa^{-1}, y' = axa^{-1}$, luego $y = y'$. c) φ es suprayectivo, ya que dado x se verifica que $\varphi(a^{-1}xa) = x$. d) φ es homomorfismo. En efecto, $\varphi(xy) = a(xy)a^{-1} = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)$. e) φ es isomorfismo. En efecto, $x \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 1$, luego $axa^{-1} = 1 \Rightarrow x = a^{-1}a = 1$.

193. a) Sea H un subgrupo normal del grupo multiplicativo G . Esto significa que, para todo $a \in G$, es $aH = Ha$, de donde $aHa^{-1} = H$.

b) Sea H subgrupo que se transforma en sí mismo mediante todos los automorfismos interiores, esto es, tal que $aHa^{-1} = H$, de donde $aH = Ha$.

194. a) Sea φ un automorfismo de Z . Sea $\varphi(1) = a$. En el ejercicio 190 se ha visto que $Z \approx (a)$, luego para que $(a) = Z$ es necesario y suficiente que $1 \in (a)$, lo que equivale a $a = 1, a = -1$. Por consiguiente, los únicos automorfismos de Z son: la identidad: $\varphi(x) = x$ y $\varphi(x) = -x$.

195. a) $n!$. b) n .

196. El primer teorema de isomorfía proporciona

$$\text{im } \varphi \approx G/\ker \varphi,$$

luego $\text{ord}(\text{im } \varphi) = \text{ord}(G/\ker \varphi)$. Ahora bien, como $G/\ker \varphi$ está formado por clases que tienen todas tantas elementos como $\ker \varphi$ y la unión de todas ellas es G , resulta que

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(G/\ker \varphi) \cdot \text{ord}(\ker \varphi),$$

luego

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(\ker \varphi) \cdot \text{ord}(\text{im } \varphi).$$

197. a) Sea $x_1 H = x_2 H, x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in K$. Será $x_1 = x_2 y, y \in H$, de donde $y = x_1 x_2^{-1} \in K, y \neq e$. b) Si $e \neq y \in H \cap K$ se verifica que $yH = y^2 H$ e $y \neq y^2$.

198. Sea φ un endomorfismo de G . El núcleo de φ es un subgrupo invariante de G y si $x \neq y \in \text{im } \varphi$ se verifica que, en virtud del primer teorema de isomorfía, las dos clases $x\ker \varphi$ e $y\ker \varphi$ son distintas, luego por el ejercicio anterior se verifica que $\ker \varphi \cap \text{im } \varphi = \{e\}$. Por otra parte, el ejercicio 196 dice que $\text{ord}(\ker \varphi) \cdot \text{ord}(\text{im } \varphi) = \text{ord } G$.

Sean H y K dos subgrupos de G tales que: a) $\text{ord}(H) \cdot \text{ord}(K) = \text{ord}(G)$. b) H es subgrupo normal. c) $H \cap K = \{e\}$. De las hipótesis resulta que $G/H \cong \{xH\}_{x \in K}$, luego $G/H \xrightarrow{h} K$, definido por $h(xH) = x$, $x \in K$ es un isomorfismo de G/H sobre K y $\varphi = h \circ n$, siendo n el homomorfismo natural $G \xrightarrow{n} G/H$, es un endomorfismo de G .

Por consiguiente, si $H_1, \dots, H_r$ son todos los subgrupos normales de G , distintos de G y de $\{e\}$, y si n_i es el número de subgrupos de G , de orden igual a $\text{ord}(G) : \text{ord}(H_i)$, cuya intersección con H_i es el elemento unidad, el número de endomorfismo de G será:

$$\text{núm. endomorfismos de } G = 1 + n_1 + \dots + n_r + 1.$$

199. Utilícese la tabla de multiplicar del ejercicio 172.

200. $x^n \cdot x^m = x^{n+m} \in (x)$. Como G es finito, se debe verificar que $x^p = x^q$, $p < q$, de donde $x^{q-p} = e \in (x)$. Suponiendo $x \neq e$, será $q - p > 1$, luego $x^{q-p-1} = x^{-1} \in (x)$. Si n es el menor número natural para el cual $x^n = e$, se verifica que $(x^p)^{-1} = x^{n-p}$ luego (x) es un subgrupo de G . De $x^p x^q = x^{p+q} = x^q x^p$, resulta que (x) es conmutativo.

201. Sean $z_1, z_2 \in Z$. Si x es un elemento arbitrario de G , se verifica que $(z_1 z_2) x = z_1 (z_2 x) = z_1 (x z_2) = (z_1 x) z_2 = (x z_1) z_2 = x (z_1 z_2)$. El elemento unidad e pertenece a Z , ya que $e x = x e = x$ para todo x . Si $z \in Z$, de $z x = x z$ se deduce: $x z^{-1} = z^{-1} x$, luego $z^{-1} \in Z$.

202. a) De $x + y = y + x$ resulta que $x + H = H + x$ para todo subgrupo H de G .

b) Es consecuencia inmediata de lo anterior.

203. a) $x \in (m) \cap (n) \Rightarrow x = km, x = hn$, luego x es múltiplo del m. c. m. y $x \in (M)$.

b) $x \in (M) \Rightarrow x = kM$, luego x es múltiplo de m y de n y $x \in (m) \cap (n)$.

204. Para que $(4) \cup (7)$ sea un subgrupo se debe verificar que la diferencia entre dos elementos cualesquiera del conjunto pertenezca al conjunto, luego como 7 y 4 pertenecen al conjunto, debería pertenecer también $3 = 7 - 4$, y 3 no es múltiplo ni de 4 ni de 7.

205. Recordando que $d = am + bn$, siendo a y b números enteros, resulta que $pd = (pa)m + (pb)n \in (m) + (n)$, para todo entero p , luego $(d) \subset (m) + (n)$. Por otra parte, de $m = m'd$, $n = n'd$, resulta que todo elemento $xm + yn$ de $(m) + (n)$ es de la forma $xm + yn = (xm' + yn')d$, luego pertenecen a (d) ; por consiguiente, $(m) + (n) \subset (d)$.

206. En virtud de las hipótesis y del ejercicio anterior, resulta que $(p) + (q) = (1)$, y observando que $(1) = Z$, resulta que $x = yp + zq$.

207. $x, y \in n^{-1}(K') \Rightarrow n(x), n(y) \in K' \Rightarrow n(x) - n(y) \in K' \Rightarrow n(x - y) \in K' \Rightarrow x - y \in n^{-1}(K')$. $x \in H \Rightarrow n(x)$ es el elemento neutro de G/H , luego $n(x) \in K'$ y $x \in n^{-1}(K')$.

208. a) $x \in n^{-1}(n(K)) \Leftrightarrow n(x) \in n(K) \Leftrightarrow \exists y \in K$ tal que $n(x) = n(y) \Rightarrow n(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in H \Leftrightarrow x - y = z \in H \Rightarrow x = y + z$, luego $n^{-1}(n(K)) \subset H + K$.

b) $x \in H + K \Rightarrow x = y + z$, $y \in H$, $z \in K \Rightarrow n(x) = n(y) + n(z) = n(z) \in n(K) \Rightarrow x \in n^{-1}(n(K))$, luego $H + K \subset n^{-1}(n(K))$.

209. Sea n el homomorfismo natural $G \rightarrow G/K$. De $H + K = n^{-1}(n(H))$ se deduce que $n(H + K) = n(H)$, y como el núcleo del homomorfismo n' subordinado por n en $H + K$ es K el primer teorema de isomorfía establece que $n(H + K) \cong H + K/K$. Análogamente, el núcleo del homomorfismo n'' subordinado por n en H es $H \cap K$, luego por el mismo teorema es $n(H) \cong H/H \cap K$.

210. a) La adición es una aplicación de $G \times G$ en G . b) $[(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] + (z_1, z_2, z_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) = ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) = (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) = (x_1, x_2, x_3) + [(y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)]$. c) $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$. d) $(x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, x_3)$. e) $(x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) = (0, 0, 0)$, luego $-(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

211. a) Lo demostraremos sólo para G_1 . En efecto, $(x_1, 0, 0) - (y_1, 0, 0) = (x_1 - y_1, 0, 0) \in G_1$. b) Sea π_1 la correspondencia $G \rightarrow G$ definida del siguiente modo: $\pi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$. π_1 es un homomorfismo y $\pi_1^2(x_1, x_2, x_3) = \pi_1(\pi_1(x_1, x_2, x_3)) = \pi_1(x_1, 0, 0) = (x_1, 0, 0)$, pero $\pi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$, luego $\pi_1^2(x_1, x_2, x_3) = \pi_1(x_1, x_2, x_3)$. Por tanto, π_1 es una proyección. Ahora bien, $\text{im}(\pi_1) = G_1$, $\text{ker}(\pi_1) = H$, siendo H el conjunto de todos los elementos de la forma $(0, x_2, x_3)$. Por consiguiente, $G = G_1 \oplus H$. En H se define el endomorfismo π_2 del siguiente modo: $\pi_2(0, x_2, x_3) = (0, x_2, 0)$. Como antes, se ve que π_2 es una proyección e $\text{im}(\pi_2) = G_2$, $\text{ker}(\pi_2) = G_3$, luego $H = G_2 \oplus G_3$. Por tanto, $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$.

212. Basta observar que la correspondencia $G_1 \rightarrow Z$ definida por $(x, 0, 0) \rightarrow x$ es un isomorfismo.

213. Sea $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, 0)$, $g_3 = (0, 0, 1)$. Pondremos: $n(1, 0, 0) = (1, 0, 0) + \dots + (1, 0, 0) = (n, 0, 0)$, siendo n positivo. Si n es negativo, $n = -m$, siendo m positivo, pondremos $n(1, 0, 0) = -m(1, 0, 0) = m[-(1, 0, 0)] = m(-1, 0, 0) = (-m, 0, 0) = (n, 0, 0)$. Por consiguiente, $(x_1, x_2, x_3) = x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3$, luego $\{g_1, g_2, g_3\}$ es un sistema de generadores. Si $x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 = x'_1 g_1 + x'_2 g_2 + x'_3 g_3$ resultaría $(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$, de donde $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$, luego es una base.

214. Sean $\{g_1, \dots, g_n\}$ los generadores de G . Se define la aplicación $G \xrightarrow{f} Z \times \dots \times Z$ del siguiente modo: $f(x_1 g_1 + \dots + x_n g_n) = (x_1, \dots, x_n)$. Se comprueba inmediatamente que f es un isomorfismo.

215. m. c. d. $(2, 4, 3) = 1$. Sean (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) otros dos elementos tales que juntamente con $(2, 4, 3)$ formen una base, se verificará que, dado cualquier elemento (x_1, x_2, x_3) , será $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) M$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

En particular: $(1, 0, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) M$, $(0, 1, 0) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) M$, $(0, 0, 1) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) M$, de donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} M,$$

lo que prueba que $|M|$ debe ser ± 1 y esto exige que el m. c. d. de cada fila y de cada columna sea igual a 1. Si $|M| = \pm 1$, el sistema $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) M$ posee solución siempre respecto de las (λ) . Una solución es, por ejemplo, $(2, 4, 3) (1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$.

216. Calculados los valores de a, b, c, d (véase el ejercicio anterior), se obtiene: $v(a) = 2, v(b) = 3, v(c) = 3, v(d) = 4$. Por consiguiente, $a = 2a', b = 3b', c = 3c', d = 4d'$. Se verifica que $v(a) = 2, v(b) = 3, v(c) = 3, v(d) = 4$. Por consiguiente, si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es un elemento arbitrario de L' se verifica que $x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$, de donde $v(x) = m. c. d. (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 + \lambda_4 d_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 + \lambda_4 d_2, \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 d_3, \lambda_1 a_4 + \lambda_2 b_4 + \lambda_3 c_4 + \lambda_4 d_4) = \mu_1 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 + \lambda_4 d_1) + \mu_2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 + \lambda_4 d_2) + \mu_3 (\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 d_3) + \mu_4 (\lambda_1 a_4 + \lambda_2 b_4 + \lambda_3 c_4 + \lambda_4 d_4) = \lambda_1 (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4) + \lambda_2 (\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 + \mu_4 b_4) + \lambda_3 (\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \mu_3 c_3 + \mu_4 c_4) + \lambda_4 (\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 + \mu_4 d_4)$. Como el coeficiente de λ_1 es múltiplo de $v(a)$, el de λ_2 múltiplo de $v(b)$, el de λ_3 de $v(c)$ y el de λ_4 de $v(d)$, resulta que el valor mínimo de x cuando x recorre L' será mayor o igual al m. c. d. $(v(a), v(b), v(c), v(d))$. En nuestro ejemplo es m. c. d. $(v(a), v(b), v(c), v(d)) = 1$, luego el valor mínimo será 1 si se pueden calcular $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ de modo que

$$\begin{cases} p_1 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4, \\ p_2 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 + \mu_4 b_4, \\ p_3 = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \mu_3 c_3 + \mu_4 c_4, \\ p_4 = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \mu_3 d_3 + \mu_4 d_4, \end{cases}$$

y que p_1, p_2, p_3, p_4 sean primos entre sí. Pongamos $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 3, p_4 = 4$, y se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 = 2\mu_1 & + 6\mu_3 \\ 3 = 3\mu_1 + 6\mu_2 - 12\mu_3 \\ 3 = 3\mu_1 - 6\mu_2 + 30\mu_3 \\ 4 = & 4\mu_2 & + 12\mu_4 \end{cases} & \sim \begin{cases} 2 = 2\mu_1 & + 6\mu_3 \\ 6 = 6\mu_1 & + 18\mu_3 \\ 3 = 3\mu_1 + 6\mu_2 - 12\mu_3 \\ 4 = & 4\mu_2 & + 12\mu_4 \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} 1 = \mu_1 & + 3\mu_3 \\ 1 = \mu_1 + 2\mu_2 - 4\mu_3 \\ 1 = & \mu_2 & + 3\mu_4 \end{cases} \\ & \sim \begin{cases} \mu_1 = 1 - 3\mu_3 \\ 2\mu_2 = 7\mu_3 \\ 6\mu_4 = 2 - 7\mu_3 \end{cases} \Rightarrow \mu_3 = 2, \mu_4 = -2, \mu_2 = 7, \mu_1 = -5. \end{aligned}$$

Como c es combinación lineal de a y b , bastará tomar como generadores de L' a, b y d , con lo que de

$$1 = 2 + 3 - 4$$

se deduce que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_4 = -1$, luego un elemento de L' de valor máximo es

$$u_1 = a + b - d = (2, 0, 6, 0) + (3, 6, -12, 0) - (0, 4, 0, 12) = (5, 2, -6, -12),$$

y $v(u_1) = 1$. De aquí resulta que

$$1 = (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-6) + 0 \cdot (-12).$$

Sea $u_1^* = (-1, 0; -1, 0)$. La aplicación u_1^* de L en Z definida por $u_1^*(x) = -x_1 - x_3$ es tal que $u_1^*(u_1) = 1$. Consideremos el endomorfismo π de L definido por $\pi(x) = (u_1^* x) u_1$. Se verifica que $\pi^2(x) = \pi(\pi(x)) = \pi[(u_1^* x) u_1] = (u_1^* x) \pi(u_1) = (u_1^* x)(u_1^* u_1) u_1 = (u_1^* x) u_1 = \pi(x)$, que prueba que π es un proyector, luego:

$$L = \text{im}(\pi) \oplus \ker(\pi).$$

Sea y un elemento arbitrario de $\ker(\pi)$: $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Será $\pi(y) = (-y_1, -y_3) u_1 = 0$, luego $y_3 = -y_1$. Por consiguiente, $y \in \ker(\pi) \Leftrightarrow y = (y_1, y_2, -y_1, y_4)$. Impongamos la condición de pertenecer y a L' : $y = m a + n b + p d$, siendo m, n y p números. Por consiguiente: $y = (2m, 0, 6m, 0) + (3n, 6n, -12n, 0) + (0, 4p, 0, 12p) = (2m + 3n, 6n + 4p, 6m - 12n, 12p)$. Para que $y \in \ker(\pi)$, será: $6m - 12n = -2m - 3n$, de donde $8m = 9n$ y $m = 9k, n = 8k$, luego los elementos de $L' \cap \ker(\pi)$ son todos aquellos de la forma:

$$(1) \quad y = (42k, 48k + 4p, -42k, 12p).$$

El valor mínimo de y será mayor o igual a 2. Para $k = 1, p = -1$, se obtiene:

$$v_2 = (42, 44, -42, -12) \in L' \cap \ker(\pi)$$

y $v(v_2) = 2$. Sea

$$u_2 = (21, 22, -21, -6),$$

será $v(u_2) = 1$, de donde:

$$1 = 0 \cdot 21 + 1 \cdot 22 + 1 \cdot (-21) + 0 \cdot (-6);$$

luego si ponemos $u_2^* = (0, 1, 1, 0)$ y consideramos la aplicación u_2^* de L en Z tal que $u_2^*(x) = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = x_2 + x_3$ y el endomorfismo de L : $\pi'(x) = (u_2^* x) u_2$, se verifica que $\pi'^2(x) = \pi'(\pi'(x)) = \pi'[(u_2^* x) u_2] = (u_2^* x)(\pi'(u_2)) = (u_2^* x)(u_2^* u_2) u_2 = (u_2^* x) u_2 = \pi'(x)$, luego π' es una proyección. Por consiguiente:

$$L = \text{im}(\pi) \oplus \text{im}(\pi') \oplus (\ker(\pi') \cap \ker(\pi)).$$

Sea $y \in L' \cap \ker(\pi) \cap \ker(\pi')$. Por pertenecer y a $L' \cap \ker(\pi)$ será de la forma (1); por pertenecer a $\ker(\pi')$ debe ser $0 = \pi'(y) = (u_2^* y) u_2 = (6k + 4p) u_2$, de donde $2p = -3k$ y, por tanto:

$$(2) \quad y = (42, 42, -42, -18)k.$$

De (2) se deduce que el elemento de valor mínimo de $L' \cap \ker(\pi) \cap \ker(\pi')$ es

$$v_3 = (42, 42, -42, -18),$$

y se verifica que $v(v_3) = 6$, luego:

$$u_3 = (7, 7, -7, -3)$$

es tal que $v_3 = 6u_3$ y $v(u_3) = 1$.

Sea, finalmente, $y \in L \cap \ker(\pi) \cap \ker(\pi') \cap \ker(\pi'')$, siendo $\pi''(x) = (u_3^* x) u_4$ y $u_3^*(x) = (-1)x_3 + 2x_4$. Por consiguiente, se deberá verificar:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= u_1^*(y) = -y_1 - y_3 \\ 0 &= u_2^*(y) = y_2 + y_3 \\ 0 &= u_3^*(y) = -y_3 + 2y_4 \end{aligned} \right\}$$

de donde $y_3 = 2y_4$, $y_2 = -2y_4$, $y_1 = -2y_4$, luego

$$y = (-2, -2, 2, 1)t.$$

Poniendo $u_4 = (-2, -2, 2, 1)$, se verifica que

$$(3) \quad B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

es una base de L . Puede comprobarse del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -12 \\ 21 & 22 & -21 & -6 \\ 7 & 7 & -7 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

A su vez, $B' = \{u_1, 2u_2, 6u_3\}$ es una base de L' . Por consiguiente, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 6$. Obsérvese que $f_1 \mid f_2 \mid f_3$.

217. En virtud del ejercicio anterior, se podrá tomar como base de L la (3), y como base de L' la $B' = \{u_1, 2u_2, 6u_3\}$. Sea $M = Z/(2) \oplus Z/(6) \oplus Z$ y sea φ el homomorfismo $L/L' \rightarrow M$ definido por $\varphi[(x_1, x_2, x_3, x_4) + L'] = (x_2 + (2), x_3 + (6), x_4)$. φ es una aplicación y $\varphi[(x_1, x_2, x_3, x_4) + L'] + [(y_1, y_2, y_3, y_4) + L'] = \varphi[(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) + L'] = ((x_2 + y_2) + (2), (x_3 + y_3) + (6), (x_4 + y_4)) = (x_2 + (2), x_3 + (6), x_4) + (y_2 + (2), y_3 + (6), y_4) = \varphi[(x_1, x_2, x_3, x_4) + L'] + \varphi[(y_1, y_2, y_3, y_4) + L']$, luego φ es un homomorfismo. φ es epimorfismo, ya que dado $(x_2 + (2), x_3 + (6), x_4)$, si x_1 es cualquier entero se verifica que $\varphi[(x_1, x_2, x_3, x_4) + L'] = (x_2 + (2), x_3 + (6), x_4)$. φ es isomorfismo, ya que de $\varphi[(x_1, x_2, x_3, x_4) + L'] = \varphi[(y_1, y_2, y_3, y_4) + L']$ se deduce que $(x_2 + (2), x_3 + (6), x_4) = (y_2 + (2), y_3 + (6), y_4)$, de donde $x_2 + (2) = y_2 + (2)$, $x_3 + (6) = y_3 + (6)$ y $x_4 = y_4$, luego $y_2 = x_2 + 2k$, $y_3 = x_3 + 6h$, luego:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3, y_4) + L' &= (y_1, x_2 + 2k, x_3 + 6h, x_4) + L' = [(x_1, x_2, x_3, x_4) + L'] + \\ &+ [(y_1 - x_1, 2k, 6h, 0) + L'] = (x_1, x_2, x_3, x_4) + L. \end{aligned}$$

218. En virtud del ejercicio anterior, basta probar que $Z/(6) \approx Z/(2) \oplus Z/(3)$. Sea $x + (6)$ un elemento arbitrario de $Z/(6)$. Por ser 2 y 3 primos entre sí, se verifica que $1 = 3 - 2$, luego $x = 3x - 2x$. Pongamos $\varphi(x + (6)) = (3x + (2), -2x + (3))$. φ es una aplicación. Sea $x + (6) = y + (6) \Leftrightarrow y = x + 6k$, será $\varphi(y + (6)) = (3y + (2), -2y + (3)) = (3x + 18k + (2), -2x - 12k + (3)) = (3x + (2), -2x + (3)) = \varphi(x + (6))$. Es inmediato que φ es un homomorfismo. φ es un epimorfismo. Sea $(x + (2), y + (3))$ un elemento arbitrario de $Z/(2) \oplus Z/(3)$; veamos que existe un entero z tal que $3z + (2) = x + (2)$ y $-2z + (3) = y + (3)$, esto es, $3z = x + 2k$, $-2z = y + 3h$, de donde

$$\left\{ \begin{aligned} 3z - 2k &= x, \\ 2z + 3h &= -y, \end{aligned} \right. \text{ pero } \left\{ \begin{aligned} 3x - 2x &= x \\ 2y - 3y &= -y \end{aligned} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{aligned} 3(x + 2k) - 2(x + 3k) &= x, \\ 2(y + 3h) + 3(-y - 2h) &= -y, \end{aligned} \right.$$

luego bastará que sea $z = x + 2k = y + 3h$, o bien, $x - y = 3h - 2k$, luego $h = k = x - y$, $z = 3x - 2y$. Efectivamente, se verifica que $\varphi(3x - 2y + (6)) = (9x - 6y + (2), -6x + 4y + (3)) = (9x + (2), 4y + (3)) = (x + (2), y + (3)) + (8x + (2), 3y + (3)) = (x + (2), y + (3))$. φ es un isomorfismo. En efecto, sea $\varphi(x + (6)) = \varphi(y + (6))$, esto es, $(3x + (2), -2x + (3)) = (3y + (2), -2y + (3))$, de donde $3(x - y) = 2k$, $2(x - y) = 3h$, de donde $x - y \in (2)$ y $(x - y) \in (3)$, luego $x - y \in (6)$.

219. Por ser p y q primos entre sí, existen enteros a y b tales que

$$(4) \quad 1 = ap + bq.$$

Sea $x + (pq)$ un elemento arbitrario de $Z/(pq)$. Se define la aplicación φ de este grupo en sí, del siguiente modo: $\varphi(x + (pq)) = xap + (pq)$. φ es aplicación, ya que si $x + (pq) = y + (pq)$ será $y = x + kpq$, de donde $\varphi(y + (pq)) = xap + k apq + (pq) = xap + (pq)$. φ es un homomorfismo y por tanto endomorfismo. φ es un proyector, ya que $\varphi^2(x + (pq)) = \varphi[\varphi(x + (pq))] = \varphi[xap + (pq)] = x a^2 p^2 + (pq)$, y de (4) se deduce que $ap = a^2 p^2 + abpq$, de donde $x a^2 p^2 + (pq) = xap - xabpq + (pq) = xap + (pq)$, luego $y^2(x + (pq)) = xap + (pq) = \varphi(x + (pq))$. Por consiguiente,

$$(5) \quad Z/(pq) = \text{im}(\varphi) \oplus \ker(\varphi).$$

Ahora bien, $\text{im}(\varphi) \approx Z/(q)$. En efecto, definimos $f[xap + (pq)] = x + (q)$. Si $xap + (pq) = yap + (pq)$ será $(x - y)ap = hpq$, y de (4) se deduce que $x - y = (x - y)ap + (x - y)bq = (hp + (x - y)b)q \in (q)$, luego $x + (q) = y + (q)$ y $f[xap + (pq)] = f[yap + (pq)]$. f es homomorfismo. f es epimorfismo, ya que dado $x + (q)$ se verifica que $f[xap + (pq)] = x + (q)$. f es isomorfismo, ya que $f[xap + (pq)] = f[yap + (pq)]$ implica que $x + (q) = y + (q)$, de donde $y = x + hq$, e $yap + (pq) = xap + h apq + (pq) = xap + (pq)$. Finalmente, $\ker(\varphi) \approx Z/(p)$. En efecto, sea $x + (pq) \in \ker(\varphi)$, esto es, $\varphi[x + (pq)] = xap + (pq) = (pq)$. De (4) se deduce que $x = xap + x bq$, y como $xap = hpq$, será $x = hpq + x bq$, esto es, $x + (pq) \in \ker \varphi \Leftrightarrow x \in (p)$. Definamos: $g(x + (pq)) = x + (p)$. g es, evidentemente, un epimorfismo. Es isomorfismo, puesto que $g(x + (pq)) = g(y + (pq)) \Rightarrow x - y \in (p)$, y como $x - y \in (q)$ y $(p) \cap (q) = (pq)$, resulta que $x - y \in (pq)$, luego $x + (pq) = y + (pq)$.

§ 4. ANILLOS

220. Si. Conmutativo y con elemento unidad. Si. Conmutativo y sin elemento unidad.

221. Si. El elemento unidad es el polinomio $1 + 0x + \dots + 0x^n$, que se acostumbra a representar simplemente por 1.

222. No, porque el producto de dos polinomios de grado n es un polinomio de grado $2n$.

223. Si.

224. a) $x^* + y^*$ es un endomorfismo. En efecto, $(x^* + y^*)(x + y) = x^*(x + y) + y^*(x + y) = (x^*x + x^*y) + (y^*x + y^*y) = (x^*x + y^*x) + (x^*y + y^*y) = (x^* + y^*)x + (x^* + y^*)y$. (Obsérvese que la primera igualdad es verdad por la definición de adición de homomorfismos, la segunda por la propiedad de los homomorfismos, la tercera por la asociatividad y conmutatividad de la adición de números enteros, y la cuarta por la definición de adición de homomorfismos).

b) $x^* + (y^* + z^*) = (x^* + y^*) + z^*$. En efecto, para probar esta igualdad hay que probar que el homomorfismo del primer miembro transforma cualquier número entero x en el

mismo número que el homomorfismo del segundo miembro. $[x^* + (y^* + z^*)]x = x^*x + (y^* + z^*)x = x^*x + (y^*x + z^*x) = (x^*x + y^*x) + z^*x = (x^* + y^*)x + z^*x = [x^* + (y^* + z^*)]x$. (Digase por qué son verdad cada una de las igualdades anteriores.)

c) $x^* + y^* = (x^* + y^*)$. En efecto, $(x^* + y^*)x = x^*x + y^*x = y^*x + x^*x = (y^* + x^*)x$.

d) Sea o^* la correspondencia que hace corresponder a cada número x el número cero: $o^*x = 0$. Esta correspondencia es un homomorfismo, ya que $o^*(x + y) = 0 = 0 + 0 = o^*x + o^*y$. Se verifica que si x^* es un endomorfismo arbitrario, es $x^* + o^* = x^*$. En efecto, $(x^* + o^*)x = x^*x + o^*x = x^*x + 0 = x^*x$.

e) Dado el endomorfismo x^* , consideremos el endomorfismo $-x^*$ definido del siguiente modo: $(-x^*)x = -(x^*x)$. Demuéstrese que $-x^*$ es un endomorfismo. Se verifica que $[x^* + (-x^*)]x = x^*x + (-x^*)x = x^*x + [-(x^*x)] = 0 = o^*$, luego $x^* + (-x^*) = o^*$. Al homomorfismo $-x^*$ se le llama *opuesto* al homomorfismo x^* .

f) y^*x^* es un endomorfismo. En efecto, $(y^*x^*)(x + y) = y^*[x^*(x + y)] = y^*(x^*x + x^*y) = y^*(x^*x) + y^*(x^*y) = (y^*x^*)x + (y^*x^*)y$. (La primera igualdad es verdad por la definición de multiplicación de endomorfismos, la segunda por la propiedad de los homomorfismos, la tercera por la misma razón y a cuarta por la definición de multiplicación de homomorfismos.)

g) El producto de aplicaciones es asociativo, luego también lo es, en particular, el de endomorfismos.

h) Sea 1^* la transformación de Z entre Z definida por $1^*x = x$ para todo $x \in Z$. 1^* es un endomorfismo y se verifica que para todo endomorfismo x^* es: $(x^* \cdot 1^*)x = x^*(1^*x) = x^*x$ y $(1^* \cdot x^*)x = 1^*(x^*x) = x^*x$.

i) Sea x^* un endomorfismo arbitrario; sea $x^*1 = n$, se verificará que $x^*x = x^*(1 + \dots + 1) = x^*1 + \dots + x^*1 = nx$, cuando x es positivo, y $0 = x^*(0) = x^*(x - x) = x^*x + x^*(-x)$, de donde $x^*(-x) = -x^*x = -nx = n(-x)$. Si $y^*1 = m$, se verifica que $(y^*x^*)x = mnx = nm x = (x^*y^*)x$.

225. De $y + o = y$ se deduce $(y + o)x = yx$, $yx + o x = yx$, $o x = 0$. De $o = x(y + (-y)) = xy + x(-y)$ se deduce que $x(-y) = -(xy)$.

226. Basta observar que $\frac{z_1}{s_1} + \frac{z_2}{s_2} = \frac{z_1 s_2 + z_2 s_1}{s_1 s_2}$ y que $\frac{z_1}{s_1} \cdot \frac{z_2}{s_2} = \frac{z_1 z_2}{s_1 s_2}$.

227. En virtud del ejercicio anterior, basta ver que si s_1 y s_2 no son divisibles por p , tampoco lo es $s_1 s_2$, por ser p primo.

228. Sí, puesto que la diferencia de dos múltiplos de m es otro múltiplo de m y el producto de dos múltiplos de m es un múltiplo de m .

229. Si, por análogas razones a las del ejercicio anterior.

230. $f(1, 2) = (3, 6)$, $f(3, 5) = (9, 15)$, $f(4, -2) = (12, -6)$.

231. a) f es un homomorfismo, ya que es aplicación, y $f[(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + \dots + b_m x^m)] = f[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_m)x^m + \dots + a_n x^n] = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)m + \dots + (a_m + b_m)m^m + \dots + a_n m^n = (a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n) + (b_0 + b_1 m + \dots + b_m m^m) = f(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + f(b_0 + \dots + b_m x^m)$ (suponiendo que $m \leq n$). Análogamente, $f[(a_0 + \dots + a_n x^n)(b_0 + \dots + b_m x^m)] = f(a_0 b_0 + \dots + a_n b_m x^{m+n}) = a_0 b_0 + \dots + a_n b_m m^{m+n} = (a_0 + \dots + a_n m^n)(b_0 + \dots + b_m m^m) = f(a_0 + \dots + a_n x^n) \cdot f(b_0 + \dots + b_m x^m)$.

b) g no es homomorfismo si $n \neq \pm 1$, porque $g(x) \cdot g(y) = n^2 xy$, $g(xy) = n xy$.

c) h no es homomorfismo si $n \neq 1$, porque $h(x + y) = (x + y)^n$ y $h(x) + h(y) = x^n + y^n$.

d) j es homomorfismo, puesto que es aplicación, y $j[(a_0 + \dots + a_n x^n) + (b_0 + \dots + b_m x^m)] = j(a_0 + \dots + a_n x^n) + j(b_0 + \dots + b_m x^m)$ y $j[(a_0 + \dots + a_n x^n)(b_0 + \dots + b_m x^m)] = j(a_0 + \dots + a_n x^n) \cdot j(b_0 + \dots + b_m x^m)$.

232. Si q es un número racional arbitrario, se verifica que $f\left(\frac{q}{m}x\right) = q$, luego $\text{im}(f) = B$.

Sea $(x-m)$ el conjunto de todos los polinomios de A múltiplos de $x-m$. Sea $p(x) \in (x-m)$. Será $p(x) = q(x)(x-m)$, de donde $f(p(x)) = f(q(x)(x-m)) = f(q(x)) \cdot f(x-m) = q(m) \cdot (m-m) = 0$, luego $p(x) \in \ker(f)$ y $(x-m) \subset \ker(f)$. Sea $p(x) \in \ker(f)$, será $f(p(x)) = 0$, o sea, $p(m) = 0$, luego $p(x)$ es divisible por $x-m$ y $p(x) = q(x)(x-m) \in (x-m)$, luego $\ker(f) \subset (x-m)$.

233. f es una aplicación. $f(p(x, y) + q(x, y)) = p(x, 0) + q(x, 0) = f(p(x, y)) + f(q(x, y))$. $f(p(x, y) \cdot q(x, y)) = p(x, 0)q(x, 0) = f(p(x, y)) \cdot f(q(x, y))$. Sea $p(x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow p(x, 0) = 0 \Leftrightarrow p(x, y) = y \cdot q(x, y)$, luego $\ker(f) = (y)$, siendo (y) el conjunto de todos los múltiplos de y . Es inmediato que $\text{im}(f) =$ al conjunto de polinomios con una variable.

234. Es consecuencia de (6).

235. a) $0 = x - x \in I \Leftrightarrow x R x$.

b) $x R y \Leftrightarrow x - y \in I \Rightarrow y - x \in I \Leftrightarrow y R x$.

c) $x R y \wedge y R z \Leftrightarrow x - y \in I, y - z \in I \Rightarrow (x - y) + (y - z) = x - z \in I \Rightarrow x R z$.

236. a) Uniformidad de la adición: $x + I = x' + I, y + I = y' + I \Leftrightarrow x - x' \in I, y - y' \in I \Rightarrow x - x' + y - y' \in I \Rightarrow x + y - (x' + y') \in I \Rightarrow x + y + I = x' + y' + I \Leftrightarrow (x + I) + (y + I) = (x' + I) + (y' + I)$.

b) Uniformidad de la multiplicación: $x + I = x' + I, y + I = y' + I \Leftrightarrow x - x' \in I, y - y' \in I \Leftrightarrow x = x' + u, y = y' + v, u, v \in I \Rightarrow xy = x'y' + x'v + uy' + uv \Rightarrow xy - x'y' = (x'v + uy') + uv$. El paréntesis pertenece a I , pero, en general, no pertenece a I , luego la multiplicación no es uniforme cuando I es unilateral; si lo es cuando I es bilátero; no ofrece dificultad demostrar que en este caso A/I es un anillo.

237. A las clases $0 + (5), \dots, 4 + (5)$ las representaremos simplemente por $(0, \dots, 4)$. De la definición de adición se deduce que si representamos por $+$ la adición en $\mathbb{Z}/(5)$ y por $\dagger$ a la adición en $\mathbb{Z}$, análogamente representamos por $\cdot$ a la multiplicación en $\mathbb{Z}/(5)$ y por $\times$ a la multiplicación en $\mathbb{Z}$, será: $x + y = (x + (5)) + (y + (5)) = x \dagger y + (5) = z + (5) = z$, siendo $x \dagger y = 5q + z, 0 \leq z < 5$. Análogamente: $x \cdot y = (x + (5)) \cdot (y + (5)) = x \times y + (5) = z + (5) = z$, siendo $x \times y = 5q + z, 0 \leq z < 5$. Según esto, se obtienen las siguientes tablas:

ADICION

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

MULTIPLICACION

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

238. Teniendo en cuenta lo dicho en el ejercicio anterior, resulta:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

239. a) En la tabla del ejercicio 238 hay ceros que no figuran en las otras tablas de multiplicar (excluido de ellas el producto por cero).

b) Las filas de los números 1, 5, 7, 11 son las únicas filas de las tablas sin ceros.

c) Sí, el 6. $6^2 = 0$.

d) Sí: $4^2 = 4$, $9^2 = 9$.

e) Sí: $2 \cdot 7 = 2$; $3 \cdot 5 = 3 \cdot 9 = 3$; $4 \cdot 4 = 4 \cdot 7 = 4 \cdot 10 = 4$; $6 \cdot 3 = 6 \cdot 5 = 6 \cdot 7 = 6 \cdot 9 = 6 \cdot 11 = 6$; $8 \cdot 4 = 8 \cdot 7 = 8 \cdot 10 = 8$; $9 \cdot 5 = 9 \cdot 9 = 9$; $10 \cdot 7 = 10$.

f) No; de $5 \cdot u = 5 \Rightarrow u = 1$, análogamente, $7 \cdot u = 7 \Rightarrow u = 1$, $11 \cdot u = 11 \Rightarrow u = 1$.

g) Primos entre sí.

h) No primos entre sí.

240. Adición. I. Asociatividad: $[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x + x', y + y') + (x'', y'') = ((x + x') + x'', (y + y') + y'') = (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) = (x, y) + (x' + x'', y' + y'') = (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')]$. (Indíquese la razón que justifica cada signo de igualdad empleado en la demostración anterior.)

II. Conmutatividad, trivial.

III. Elemento cero. El elemento cero es $(0, 0)$, ya que $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ para todo elemento de A .

IV. Elemento opuesto. El elemento opuesto de (x, y) es $-(x, y) = (-x, -y)$.

Multiplicación. V. Asociatividad. Demostración análoga a la de la adición.

VI. Conmutatividad. Demostración análoga a la de la adición.

VII. Elemento unidad. El elemento unidad es $(1, 1)$, ya que $(x, y)(1, 1) = (x, y)$, cualquiera que sea (x, y) .

VIII. Distributividad. No ofrece dificultad.

241. a) Los elementos de la forma $(x, 0)$ ó $(0, x)$.

b) Sí, precisamente los anteriores, ya que $(x, 0)(0, y) = (0, 0)$.

c) Sí, los elementos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ tienen la propiedad de que $(x, 0)(1, 0) = (x, 0)$, $(0, x)(0, 1) = (0, x)$. En general, $(x, 0)(1, y) = (x, 0)$ y $(z, 1)(0, x) = (0, x)$.

242. a) Son divisores de cero: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10.

b) Son nilpotentes: el 6.

c) Son idempotentes: 4 y 9.

d) Son unidades parciales: 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11.

243. Los divisores de cero son: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28.

244. Si m. c. d. $(m, n) = d \neq 1$ y $n = n'd$, será $0 < n' < n$ y $mn' = n = 0$. Si $mp = 0$, $0 < m < n$, $0 < p < n$, es $mp = kn$, si m fuese primo con n sería $k = hm$, luego $p = hn \geq n$, contradicción.

245. Que todo divisor primo de n figure en la descomposición factorial de m con un exponente mayor o igual a la mitad del exponente con que figura en n .

246. Que $m(m-1) = kn$.

247. Sea $x + yi$ su inverso. Se verificará $(a + bi)(x + yi) = ax - by + (ay + bx)i = 1 + 0i$, luego $ax - by = 1$, $ay + bx = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)x = a$, $(a^2 + b^2)y = -b$, de donde $x + yi = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$, es el elemento inverso de $a + bi$.

248. f es una aplicación y, evidentemente, un homomorfismo. $p(x) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(i) = 0$. Luego si $p(x) = (a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2k}x^{2k}) + x(a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{2h+1}x^{2h})$, de $a_0 + a_2i^2 + \dots + a_{2k}i^{2k} = 0$, se deduce que $a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2k}x^{2k}$ es divisible por $x^2 + 1$, análogamente, de $a_1 + a_3i^2 + \dots + a_{2h+1}i^{2h} = 0$ se deduce que $a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{2h+1}x^{2h}$ es divisible por $x^2 + 1$, luego $p(x) = q(x)(x^2 + 1)$. Recíprocamente, si $p(x) = q(x)(x^2 + 1)$ será $f(p(x)) = q(i)(i^2 + 1) = 0$, luego $\ker(f) = (x^2 + 1)$. La fórmula (9) proporciona, teniendo en cuenta que $\text{im}(f) = \mathbb{Q}[i]$, que

$$\mathbb{Q}[i] \approx \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1).$$

249. Sea $f(p(x)) = p(i)$. f es un epimorfismo. Como en el caso anterior, se ve que $\ker(f) = (x^2 + 1)$.

250. Si $\mathbb{Z}/(p)$ es entero, $x, y \in \mathbb{Z}/(p) \Rightarrow xy \neq 0$, esto es, $0 < x < p$, $0 < y < p \Rightarrow xy \neq kp$, luego p es primo. Recíprocamente, si p es primo, $\mathbb{Z}/(p)$ es entero.

251. No, puesto que $[(x-2) + (x^2-5x+6)][(x-3) + (x^2-5x+6)] = (x-2)(x-3) + [(x^2-5x+6)] = x^2 - 5x + 6 + (x^2 - 5x + 6) = 0 + (x^2 - 5x + 6)$ es el cero de $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 5x + 6)$ y $x-2 + (x^2 - 5x + 6) \neq 0$, $x-3 + (x^2 - 5x + 6) \neq 0$, ya que

$x - 2 + (x^2 - 5x + 6) = 0 + (x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow x - 2 \in (x^2 - 5x + 6)$, de donde $x - 2 = (a_0 + \dots + a_n x^n) (x^2 - 5x + 6)$ y el grado del primer miembro es uno, mientras que el del segundo es mayor que uno; análogamente, se ve que $x - 3 + (x^2 - 5x + 6) \neq 0$. Si, porque de $[p(x) + (x^2 - 2)][q(x) + (x^2 - 2)] = 0 + (x^2 - 2)$ se deduce que $p(x)q(x) \in (x^2 - 2)$, o sea, que $p(x)q(x) = k(x)(x^2 - 2)$, siendo $k(x)$ un polinomio. Poniendo $p(x) = p'(x^2) + x p''(x^2)$, $q(x) = q'(x^2) + x q''(x^2)$, en donde $p'(x^2)$ contiene todos los términos de grado par de $p(x^2)$, y $x p''(x^2)$ los de grado impar, y análogamente $q'(x^2)$ y $x q''(x^2)$. $p'(x^2)$, $p''(x^2)$, $q'(x^2)$ y $q''(x^2)$ serían polinomios en x^2 . Ahora bien, $p(x)q(x) = p'(x^2)q'(x^2) + x^2 p''(x^2)q''(x^2) + x(p'(x^2)q''(x^2) + p''(x^2)q'(x^2))$ y $p(x)q(x) = k(x)(x^2 - 2)$ significa que al sustituir x^2 por 2 se anula $p(x)q(x)$, luego $p'(2)q'(2) + 2p''(2)q''(2) = 0$, $p'(2)q''(2) + p''(2)q'(2) = 0$. Si $p(x) + (x^2 - 2) \neq 0 + (x^2 - 2)$, $p(x) \notin (x^2 - 2)$, luego uno, por lo menos, de los dos números $p'(2)$, $p''(2)$ será distinto de cero. Si $p'(2) \neq 0$, la primera igualdad proporciona $q'(2) = -\frac{2p''(2)q''(2)}{p'(2)}$

y sustituyendo en la segunda: $p'(2)q''(2) - \frac{2p''(2)q''(2)}{p'(2)} = 0$, $\frac{[p'(2) - 2p''(2)]q''(2)}{p'(2)} = 0 \Rightarrow [p'(2) - 2p''(2)]q''(2) = 0$. Si fuesen $p'(2) = 2p''(2)$, multiplicando ambos miembros por el cuadrado del mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes de $p'(x)$ y de $p''(x)$, se obtendría $p_1'^2(2) = 2p_1''^2(2)$, en donde $p_1'(2)$ y $p_1''(2)$ serían números enteros; ahora bien, en $p_1'^2(2)$ figuraría 2 con exponente par, y en $2p_1''^2(2)$ con exponente impar, luego $p_1'^2(2) - 2p_1''^2(2) \neq 0$ y por tanto $q''(2) = 0$, y la primera ecuación daría $p'(2)q'(2) = 0$, de donde $q'(2) = 0$, lo que prueba que $q(x) = q'(x) + xq''(x) \in (x^2 - 2)$. Análogamente se razonaría si fuese $p''(2) \neq 0$.

252. El algoritmo de Euclides se dispone del siguiente modo:

	1	2	1	4	2
252	186	66	54	12	6
66	54	12	6	0	

luego m. c. d. (252, 186) = 6. De

$$54 = 4 \cdot 12 + 6,$$

$$66 = 1 \cdot 54 + 12,$$

$$186 = 2 \cdot 66 + 54,$$

$$252 = 1 \cdot 186 + 66,$$

se deduce:

$$\begin{aligned} 6 &= 54 - 4 \cdot 12 = 54 - 4(66 - 54) = 5 \cdot 54 - 4 \cdot 66 = 5(186 - 2 \cdot 66) - 4 \cdot 66 \\ &= 5 \cdot 186 - 14 \cdot 66 = 5 \cdot 186 - 14(252 - 186) = 19 \cdot 186 - 14 \cdot 252, \end{aligned}$$

luego

$$6 = (-14) \cdot 252 + 19 \cdot 186,$$

de donde $m = -14$, $n = 19$.

253. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, es $M = 252 \cdot \frac{186}{6} = 252 \cdot 31 = 8064$.

254. Como el máximo común divisor se calcula salvo un factor numérico de proporcionalidad, se pueden multiplicar los polinomios por cualquier factor numérico:

	$3x^2 - 2x - \frac{3}{2}$	$4x + 36$	$\frac{1}{360}x - \frac{3549}{(360)^2}$
$12x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 4$	$4x^3 + 2x + 3$	$x^2 - 9x - \frac{17}{2}$	$360x + 309$
$-12x^5 - 6x^3 - 9x^2$	$-4x^3 + 36x^2 + 34x$	$-x^2 - \frac{309}{360}x$	
$-8x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 4$ $+ 8x^4 + 4x^3 + 6x$	$36x^2 + 36x + 3$ $-36x^2 + 324x + 306$	$-\frac{3549}{360}x - \frac{17}{2}$ $\frac{3549 \times 309}{(360)^2}$	
$-6x^2 - x^2 + 6x + 4$ $+ 6x^2 + 3x + \frac{9}{2}$	$360x + 309$	$-\frac{4959}{129600}$	
$-x^2 + 9x + \frac{17}{2}$			

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 9x - \frac{17}{2} &= (360x + 309) \left(\frac{1}{360}x - \frac{3549}{129600} \right) - \frac{4959}{129600} \\
 4x^3 + 2x + 3 &= \left(x^2 - 9x - \frac{17}{2} \right) (4x + 36) + (360x + 309) \\
 12x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 4 &= (4x^3 + 2x + 3) \left(3x^2 - 2x - \frac{3}{2} \right) - x^2 + 9x + \frac{17}{2},
 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 -\frac{4959}{129600} &= x^2 - 9x - \frac{17}{2} - (360x + 309) \left(\frac{1}{360}x - \frac{3549}{129600} \right) \\
 &= x^2 - 9x - \frac{17}{2} - \left[(4x^3 + 2x + 3) - \left(x^2 - 9x - \frac{17}{2} \right) (4x + 36) \right] \left(\frac{1}{360}x - \frac{3549}{129600} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{90}x^2 - \frac{309}{32400}x - \frac{3549}{3600} \right) \left(x^2 - 9x - \frac{17}{2} \right) - \left(\frac{1}{360}x - \frac{3549}{129600} \right) (4x^3 + 2x + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{90} x^5 - \frac{309}{32400} x - \frac{3549}{3600} \right) \left[(4x^3 + 2x + 3) \left(3x^2 - 2x - \frac{3}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - (12x^5 - 8x^4 + 4x^2 + 4) \right] - \left(\frac{1}{360} x - \frac{3549}{129600} \right) (4x^3 + 2x + 3) \\
&= \left(\frac{1}{30} x^4 - \frac{549}{10800} x^3 - \frac{11967}{4050} x^5 - \frac{42837}{360} x - \frac{194925}{129600} \right) (4x^3 + 2x + 3) \\
&\quad - \left(\frac{1}{90} x^5 - \frac{309}{32400} x - \frac{3549}{3600} \right) (12x^5 - 8x^4 + 4x^2 + 4),
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{640}{551} x^5 - \frac{1648}{1653} x - \frac{55984}{551} \right) (3x^5 - 2x^4 + x^2 + 1) \\
&\quad - \left(\frac{380}{551} x^4 - \frac{652}{551} x^3 - \frac{127648}{1653} x^2 + \frac{1713480}{551} x + \frac{194925}{4959} \right) (4x^3 + 2x + 3).
\end{aligned}$$

255.

	$x^2 - 3x + 10$	$x + 3$
$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$x^3 + x^2 - 5x + 3$	$x^2 - 2x + 1$
$-x^5 - x^4 + 5x^3 - 3x^2$	$-x^3 + 2x^2 - x$	
$-3x^4 + 7x^3 - 7x^2$	$3x^2 - 6x + 3$	
$3x^4 + 3x^3 - 15x^2 + 9x$	$-3x^2 + 6x - 3$	
$10x^3 - 22x^2 + 14x$	0	
$-10x^3 - 10x^2 + 50x - 30$		
$-32x^2 + 64x - 32$		

luego m. c. d. $(x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2, x^3 + x^2 - 5x + 3) = x^2 - 2x + 1$. Del proceso anterior resulta:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x + 3)(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x^3 + x^2 - 5x + 3)(x^2 - 3x + 10) - 32(x^2 - 2x + 1).$$

de donde:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 &= \frac{1}{32} (x^2 - 3x + 10) (x^3 + x^2 - 5x + 3) \\
&\quad - \frac{1}{32} (x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2).
\end{aligned}$$

256.

	$x - 4$	$x - 1$
$x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 3x + 18$	$x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$	$x^3 + 2x + 3$
$-x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x$	$-x^4 - 2x^2 - 3x$	
$-4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 18$	$-x^3 - 2x - 3$	
$+4x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x - 12$	$x^3 + 2x + 3$	
$2x^3 + 4x + 6$	0	

de donde m. c. d. $(p(x), q(x)) = x^3 + 2x + 3$, m. c. m. $(p(x), q(x)) = (x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 3x + 18)(x - 1)$.

257. Consideremos la aplicación $Q[x] \rightarrow Q$ definida por $f(x) \rightarrow f(p)$. Esta aplicación es un epimorfismo, y el núcleo del homomorfismo es $(x - p)$ luego el teorema de isomorfía establece la isomorfía enunciada.

258. Sea f la aplicación de $Q[x]$ en A definida por: $f(p) = ax + b$, siendo $p(x) = q(x)(x^2 - x + 2) + ax + b$. De la relación anterior y de $h(x) = q'(x)(x^2 - x + 2) + a'x + b'$ se deduce que $p(x) + h(x) = (q(x) + q'(x))(x^2 - x + 2) + (a + a')x + (b + b')$, lo que prueba que $f(p(x) + h(x)) = f(p(x)) + f(h(x))$. Análogamente, de $p(x)h(x) = [q q'(x^2 - x + 2) + q(a'x + b') + q'(ax + b)](x^2 - x + 2) + a a' x^2 + (a b' + a' b)x + b b' = [q q'(x^2 - x + 2) + q(a'x + b') + q'(ax + b)](x^2 - x + 2) + a a'(x^2 - x + 2) + (a b' + a' b + a a')x + b b' - 2 a a'$, se deduce que $f(p(x) \cdot h(x)) = (a b' + a' b + a a')x + b b' - 2 a a' = f(p(x)) \cdot f(h(x))$, luego f es un homomorfismo y su núcleo es $(x^2 - x + 2)$.

259. Los elementos de $Q[x]/(x^2 - 1)$ se pueden representar de la siguiente forma: $ax + b + (x^2 - 1)$, siendo $a, b \in Q$. Los elementos de la forma $ax - a + (x^2 - 1)$ y $bx + b + (x^2 - 1)$, siendo $a, b \in Q$ son todos los divisores de cero, ya que $[ax - a + (x^2 - 1)][bx + b + (x^2 - 1)] = abx^2 - ab + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)$.

§ 5. CUERPOS

260. a) $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{m}{n}\right).$

b) $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} + \frac{a'}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'} \Rightarrow \frac{c}{d} + \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} + \frac{c'}{d'},$

de donde: $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \leq \frac{c}{d} + \frac{c'}{d'}.$

c) $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq 0$ y $\frac{m}{n} > 0 \Rightarrow$, en virtud de 8, que $\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \frac{m}{n} > 0$.

d) $\frac{a}{b} \frac{m}{n} - \frac{c}{d} \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \frac{m}{n} = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \left(-\frac{m}{n}\right) > 0$:

e) $a b > 0 \Leftrightarrow b a > 0$.

261. a) En virtud de c) 10, se verifica: $\frac{a}{b} \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \frac{m}{n}$, $\frac{c}{d} \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \frac{p}{q}$.

b) En virtud de a) es $1 \cdot 1 = 1 < \frac{a}{b} \frac{c}{d}$.

c) Es consecuencia de b).

d) En virtud de c) es $1 < \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$, $0 < \left(\frac{a}{b}\right)^m$, luego, por c) 10, es $\left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

e) Es un caso particular de a).

f) De e) se deduce $0 < \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m} < 1$ y $0 < \left(\frac{a}{b}\right)^m < 1$, luego por a) es $\left(\frac{a}{b}\right)^n < \left(\frac{a}{b}\right)^m < 1$.

g) Se pueden tomar los representantes $\frac{p}{q}$ y $\frac{a}{b}$ de modo que p, q, a y b sean positivos. $\frac{p}{q} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{p}{q} > 0 \Rightarrow \frac{q-p}{q} > 0 \Rightarrow q(q-p) > 0 \Rightarrow q-p > 0 \Rightarrow q > p$. Análogamente, $b > a$, luego $b = a + r$, $r > 0$. Para $n = (q-p)a$ se verifica: $p r n \geq n = (q-p)a$. Ahora bien, $p b^n = p(a^n + n a^{n-1} r + \dots + r^n) > p a^n + p n a^{n-1} r \geq p a^n + a^{n-1} (q-p)a = (p+q-p)a^n = q a^n$, de donde $p b^n - q a^n > 0 \Rightarrow (p b^n - q a^n) q b^n > 0 \Leftrightarrow \frac{p b^n - q a^n}{q b^n} > 0 \Leftrightarrow \frac{p}{q} - \left(\frac{a}{b}\right)^n > 0$.

262. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow (b c - a d) b d > 0$, y si $b d > 0$, $b c - a d > 0$.

263. $P_1 P_2 P = P_1 P P_2$.

264. Evidentemente, el cuerpo de fracciones de $Z[x]$ está contenido en $Q(x)$. Sea $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ una fracción arbitraria de $Q(x)$, y m el mínimo común múltiplo de los denominadores de todos los coeficientes de $P_1(x)$ y de $P_2(x)$, se verifica que $\frac{m P_1(x)}{m P_2(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ y que $m P_1(x) \in Z[x]$, $m P_2(x) \in Z[x]$.

265.

$\begin{array}{r} x^5 - 4x^3 \quad + \quad x - 2 \\ - x^5 + 3x^3 - 2x^2 \\ \hline - x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ + x^3 \quad - 3x + 2 \\ \hline - 2x^2 - 2x \end{array}$	$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \\ x^2 - 1 \\ \hline \end{array}$
---	--

luego

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^3 - 3x + 2} = x^2 - 1 - 2 \frac{x^2 + x}{x^3 - 3x + 2}$$

Sea

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2},$$

de donde

$$\begin{aligned} x^2 + x &= a(x+2) + b(x-1)(x+2) + c(x-1)^2 \\ &= (b+c)x^2 + (a+b-2c)x + 2a-2b+c, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{cases} b+c=1, \\ a+b-2c=1 \\ 2a-2b+c=0, \end{cases}$$

sistema que resuelto da: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{7}{9}$, $c = \frac{2}{9}$, luego

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^3 - 3x + 2} = x^2 - 1 - \frac{4}{3(x^2-1)^2} - \frac{14}{9(x-1)} - \frac{4}{9(x+2)}.$$

266. El polinomio $x^2 + x + 1$ es primo, porque si $x^2 + x + 1 = (x-a)(x-b)$, sería $a+b=-1$, $ab=1$, luego a y b tendrían el mismo signo y por tanto serían negativos, luego $|a| < 1$, $|b| < 1$ y por consiguiente $-1 < a+a^2$, $0 < 1+a+a^2$. Poniendo:

$$\frac{x^3 - x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2(x-1)^2} = \frac{mx+n}{(x^2+x+1)^2} + \frac{px+q}{x^2+x+1} + \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 4x + 3 &= (mx+n)(x-1)^2 + (px+q)(x^2+x+1)(x-1)^2 + a(x^2+x+1)^2 \\ &\quad + b(x^2+x+1)^2(x-1) = px^5 + (a+q-p)x^4 + (2a-q+m+b)x^3 \\ &\quad + (3a-p+n-2m)x^2 + (p-q+2a+m-2n)x + (q+a+n-b), \end{aligned}$$

de donde resulta el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} p & = & 0 \\ a & -p+q & = 0 \\ 2a+b+m & -q & = 1 \\ 3a & -2m+n-p & = -1 \\ 2a & +m-2n+p-q & = 4 \\ a-b & +n & +q = 3 \end{array} \right\}$$

que resuelto, proporciona: $a = 3$, $b = -3$, $m = 5$, $n = 0$, $p = 0$, $q = -3$, luego:

$$\frac{x^3 - x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2 (x - 1)^2} = \frac{5x}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{-3}{x^2 + x + 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{-3}{x - 1}.$$

Capítulo segundo

§ 1. EL ESPACIO VECTORIAL

267. a) $0(x_1, \dots, x_n) = (0x_1, \dots, 0x_n) = (0, \dots, 0)$. b) $a(0, \dots, 0) = (a0, \dots, a0) = (0, \dots, 0)$. c) $(-1)(x_1, \dots, x_n) = ((-1)x_1, \dots, (-1)x_n) = (-x_1, \dots, -x_n) = -(x_1, \dots, x_n)$.

268. $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1)$.

269. $x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) = (x_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$, luego la igualdad del enunciado proporciona $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, y por (2) se verifica que $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

270. Sean (fig. 15') $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ los segmentos dados, y $\overline{OA'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{OB'} \parallel \overline{CD}$, $\overline{OX'} \parallel \overline{MN}$. Se verifica que $\bar{y} = [\overline{OY'}]$.

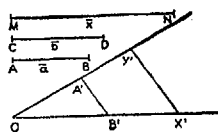


Fig. 15'.

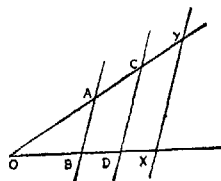


Fig. 16'.

271. Demostración. Sea la razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ igual a la razón $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ y $\overline{OA} \in \bar{a}$, $\overline{OB} \in \bar{b}$, $\overline{OC} \in \bar{c}$ y $\overline{OD} \in \bar{d}$ (fig. 16'). De la hipótesis se deduce que $AB \parallel CD$. Sea $\bar{x}$ un segmento arbitrario, $\overline{OX}$ el representante de $\bar{x}$ con origen O contenido en OB. Si $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) = \bar{y}$ y $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x}) = \bar{z}$, para obtener los representantes $\overline{OY}$ y $\overline{OZ}$ de $\bar{y}$ y de $\bar{z}$, respectivamente, habrá que trazar por X paralelas a AB y CD, respectivamente, luego $\overline{OY} \parallel \overline{OZ}$ y por tanto $\bar{y} = \bar{z}$. Recíprocamente, si la proporcionalidad $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ es igual a la proporcionalidad $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ se verificará, para todo $\bar{x}$, que $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(\bar{x}) = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}(\bar{x})$, luego $AB \parallel XY$, $CD \parallel XY$, y por tanto $AB \parallel CD$, luego la razón $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ es igual a la razón $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$. Obsérvese que para que dos proporcionalidades sean iguales es suficiente que exista un segmento que se transforme en el mismo segmento en las dos proporcionalidades.

272. a) Sean a, b, c, d, e, f los segmentos dados.

En la figura 17', $\overline{OC} \in \bar{c}$, $\overline{OD} \in \bar{d}$, $\overline{OE} \in \bar{e}$, $GE \parallel CD \Rightarrow [\overline{OG}] = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$ ($\bar{e}$), luego $\frac{\bar{c}}{\bar{d}} \frac{\bar{e}}{\bar{f}} = \frac{[\overline{OG}]}{\bar{f}}$. Si $\overline{OA} \in \bar{a}$, $\overline{OB} \in \bar{b}$, $AB \parallel MF$, se verifica que $\frac{[\overline{OM}]}{\bar{f}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, luego $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \frac{\bar{e}}{\bar{f}} = \frac{[\overline{OM}] - [\overline{OG}]}{\bar{f}} = \frac{[\overline{MG}]}{\bar{f}}$.

b) Se traza $DH \parallel AB$, $\overline{OH'} \in \overline{OH}$ y $H'K \parallel AB$, con lo que se obtiene $\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)^2 = \frac{[\overline{OK}]}{\bar{d}}$ y $\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)^2 - \frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right] = \frac{[\overline{OK}] - \bar{c}}{\bar{d}} = \frac{[\overline{CK}]}{\bar{d}}$, y $\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)^2 - \frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right] / \frac{\bar{e}}{\bar{f}} = \frac{[\overline{CK}]}{\bar{d}} \frac{\bar{f}}{\bar{e}}$, de donde si $\overline{OL} \in [\overline{CK}]$ y $FR \parallel DL$, será: $\frac{[\overline{CK}]}{\bar{d}} \frac{\bar{f}}{\bar{e}} = \frac{[\overline{OR}]}{\bar{e}}$.

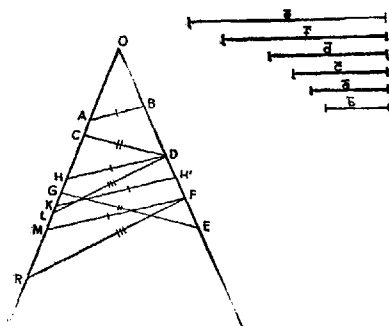


Fig. 17'.

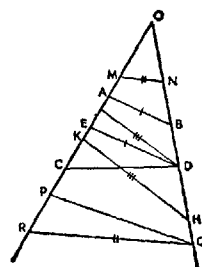


Fig. 18'.

273. Solución (fig. 18') $\overline{OA} \in \bar{a}$, $\overline{OB} \in \bar{b}$, $\overline{OC} \in \bar{c}$, $\overline{OD} \in \bar{d}$, $AB \parallel DE \Rightarrow \frac{[\overline{OE}]}{\bar{d}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ luego $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{c}}{\bar{d}} = \frac{[\overline{OE}] - \bar{c}}{\bar{d}} = -\frac{[\overline{EC}]}{\bar{d}}$.

$\overline{OM} \in \bar{m}$, $\overline{ON} \in \bar{n}$, $\overline{OP} \in \bar{p}$, $\overline{OQ} \in \bar{q}$, $MN \parallel QR \Rightarrow \frac{[\overline{OR}]}{\bar{q}} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}} \Rightarrow \frac{\bar{m}}{\bar{n}} - \frac{\bar{p}}{\bar{q}} = \frac{[\overline{OR}] - \bar{p}}{\bar{q}} = \frac{[\overline{PR}]}{\bar{q}}$. Sea $\overline{OC'} \in [\overline{EC}]$, $\overline{OH} \in [\overline{PR}]$, $HK \parallel DC' \Rightarrow \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right) \times \left(\frac{\bar{m}}{\bar{n}} - \frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) = -\frac{[\overline{OK}]}{\bar{q}}$.

274. (fig. 19') $r = -\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, $\overline{OA} \in \bar{a}$, $\overline{OB} \in \bar{b}$, $\overrightarrow{PQ} \in \bar{x}$, $[\overline{OX}] = [\overline{PQ}]$, $XY \parallel AB \Rightarrow$

pendicular por una circunferencia de centro A_3 y radio OA'_3 . O_2A_3 será la verdadera magnitud de a_3 , y O_3A_1 la verdadera magnitud de a_1 . Trazando por O la perpendicular a A_1A_2 y cortando por la circunferencia de centro A_1 y radio A_1O_2 se obtiene el abatido O_3 del punto O al abatir el plano OA_1A_2 sobre el plano del cuadro, y la verdadera magnitud del vector a_2 será O_3A_2 . Sea $\vec{OX}$ la proyección del representante de x con origen O y sean $\vec{OX}_1$, $\vec{OX}_2$ y $\vec{OX}_3$ sus proyecciones sobre los ejes. Las verdaderas magnitudes de estos vectores se obtienen trazando por X_3 y X_1 perpendiculares a A_1A_2 . Se obtienen los vectores $\vec{O_2X_{12}}$ y $\vec{O_2X_{13}}$ que tienen las verdaderas magnitudes de $\vec{OX_2}$ y $\vec{OX_1}$, respectivamente. La verdadera magnitud de $\vec{OX_2}$ es $\vec{O_3X_{23}}$, siendo X_{23} la intersección de O_3A_2 con la perpendicular a A_1A_2 trazada por X_2 .

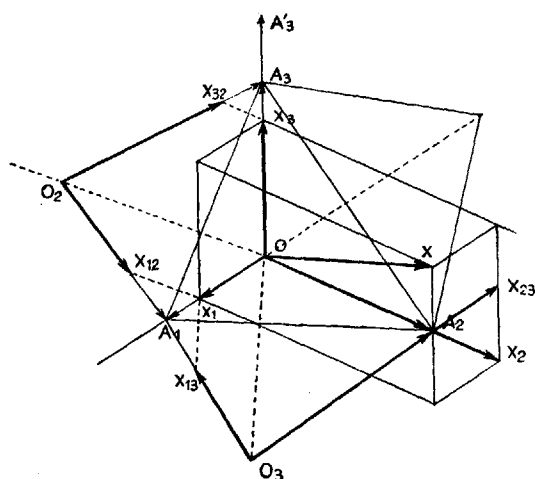


Fig. 21'.

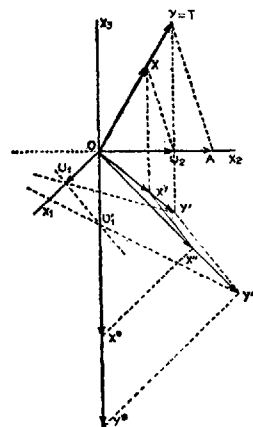


Fig. 22'.

277. Sean x_1, x_2, x_3 los ejes del sistema de referencia (fig. 22'); $\vec{OU_2}$ la unidad del eje x_2 ; $\vec{OU_1}$ la unidad del eje x_1 . Sean $\vec{OX}$ y $\vec{OX'}$ la proyección y la proyección sobre el plano x_1x_2 del representante del vector x con origen O . $\vec{OU_2} = \vec{OU}$, $\vec{OA}$ el segmento dado.

Si $\vec{OY}$ es el representante del vector y buscado, se verificará $|y| = \frac{[OA]}{[OU]} |x|$, de donde

$$\frac{[OY]}{[OU]} = \frac{[OA]}{[OU]} \frac{[OX]}{[OU]}, \text{ pero } \frac{[OA]}{[OU]} \frac{[OX]}{[OU]} ([\vec{OU}]) = \frac{[OA]}{[OU]} [\vec{OX}] = [\vec{OT}],$$

luego para construir $\vec{OT}$ bastará trazar por A la paralela a XU_2 y cortar por OX . Pero

$$\frac{[OT]}{[OU]} = \frac{[OA]}{[OU]} \frac{[OX]}{[OU]}, \text{ luego } \frac{[OT]}{[OU]} = \frac{[OY]}{[OU]}, \text{ y por tanto } \vec{OY} = \vec{OT}.$$

Trazando por Y la paralela a x_3 y cortando por OX' se obtiene la proyección de $\vec{OY}$ sobre el plano x_1x_2 . Las proyecciones de y son, por tanto, $\vec{OY}$ y $\vec{OY'}$. Para obtener la verdadera-

ra magnitud de y se abate el plano $x_1 x_2$ sobre el cuadro. El punto U_1 se abate en U'_1 , siendo $O U'_1 \perp x_2$ y $\overline{O U'_1} = \overline{O U_2}$. Uniendo el punto U'_1 con el de intersección de $U_1 Y$ con la recta x_2 y cortando por la paralela a $U_1 U'_1$ trazada por Y se obtiene el abatido Y'' de Y' , luego la verdadera magnitud de $\overrightarrow{O Y'}$ es $\overrightarrow{O Y''}$. Trazando por Y'' la perpendicular a $O Y''$ y tomando en ella $\overline{Y'' Y^*} = \overline{Y' Y}$ se obtiene $\overline{O Y^*}$ como verdadera magnitud del vector y , luego $|y| = \frac{[\overline{O Y^*}]}{[\overline{O U}]}$.

278. En efecto, $1 \cdot 0 = 0$, en virtud de b) y como $0 \in H$ y $1 \neq 0$, el conjunto H es de vectores linealmente dependientes.

279. Si $a_1, \dots, a_n \in H$, se verifica que $0 = 0 a_1 + \dots + 0 a_n$.

280. Para que sean linealmente dependientes deben existir tres números, x, y, z , tales que $x a + y b + z c = 0$, no siendo cero los tres. Ahora bien:

$$x a + y b + z c = (x, 2x) + (3y, -y) + (4z, 5z) = (x + 3y + 4z, 2x - y + 5z),$$

luego la condición $(x + 3y + 4z, 2x - y + 5z) = (0, 0)$ da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \end{cases}$$

de donde $7y + 3z = 0$, $y = -\frac{3}{7}z$, $x = -\frac{19}{7}z$, luego $k(-3, -19, 7)$ son soluciones del sistema y $-3a - 19b + 7c = 0$.

281. Poniendo $(4, -2) = a(1, 2) + b(3, -1)$, resulta $(4, -2) = (a + 3b, 2a - b)$, de donde $4 = a + 3b$, $-2 = 2a - b$, y resolviendo este sistema se calculan a y b .

282. Únicamente la *variedad lineal cero*, formada por el vector 0 , que representaremos por $\{0\}$. En efecto, todo vector que dependa linealmente de 0 es el 0 . Si L es una variedad distinta de $\{0\}$, poseerá un vector $a \neq 0$, luego todos los vectores de la forma xa , para todo $x \in K$, dependen linealmente de L y por tanto pertenecen a L .

283. En efecto, $H \cap H' = \emptyset$, luego $L(H \cap H') = \emptyset$. Por otro lado, si $x \in L(H) \cap L(H')$, sera $x = \lambda a + \mu b$, $x = \nu c + \rho d$, de donde: $\lambda a + \mu b - \nu c - \rho d = 0$, esto es, $(\lambda + \mu, \mu - \rho, -\nu - \rho) = (0, 0, 0)$, de donde resulta que todos los vectores $\mu(0, 1, 0)$, cuando μ varía en K , pertenecen a $L(H) \cap L(H')$.

284. Los vectores de $L(H) \cup L(H')$ tienen su última coordenada cero o su primera coordenada cero, mientras que a $L(H \cup H')$ pertenece el vector $(1, 1, 1)$.

285. $x = x_1 a + x_2 b + x_3 c$.

286. $x \in L \Leftrightarrow x d \cdot l. \{a, b, c, d\} \Leftrightarrow x = \lambda a + \mu b + \nu c + \rho d \Leftrightarrow x_1 u_1 + \dots + x_5 u_5 = \lambda(a_1 u_1 + \dots + a_5 u_5) + \dots + \rho(d_1 u_1 + \dots + d_5 u_5) = (\lambda a_1 + \dots + \rho d_1) u_1 + \dots + (\lambda a_5 + \dots + \rho d_5) u_5$, y como los vectores $u_1, \dots, u_5$ son linealmente independientes, $x_1 = \lambda a_1 + \dots + \rho d_1, \dots, x_5 = \lambda a_5 + \dots + \rho d_5$.

287. Si, puesto que $-\frac{1}{3} = \frac{-2}{6}$, $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{1 - 5} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$, $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$, $1 - \frac{105 - 90}{15} = 1 - \frac{15}{15} = 0$, $1 = 1$.

$$288. (2, -3, -2, 3) \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 22, -13).$$

289. No, porque la primera es de dimensiones 1×4 , y la segunda es de dimensiones 2×4 , y para que se puedan multiplicar debe ser el número de columnas del primer factor igual al número de filas del segundo.

$$(\sin a, \cos a) \begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & -\sin a \end{pmatrix} = (1, 0).$$

$$290. (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

291. Obsérvese que el tercer vector depende linealmente de los otros dos, ya que $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$; por consiguiente, la ecuación vectorial de la variedad lineal $\mathbf{x} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3$ se puede escribir del siguiente modo: $\mathbf{x} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = (\mu_1 + \mu_3) \mathbf{a}_1 + (\mu_2 - \mu_3) \mathbf{a}_2$, y poniendo $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_3$, $\lambda_2 = \mu_2 - \mu_3$, resulta $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$, o bien $x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4 = \lambda_1 (5 \mathbf{u}_1 - 3 \mathbf{u}_2 + 2 \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4) + \lambda_2 (3 \mathbf{u}_1 + 4 \mathbf{u}_2 - 3 \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) = (5 \lambda_1 + 3 \lambda_2) \mathbf{u}_1 + (-3 \lambda_1 + 4 \lambda_2) \mathbf{u}_2 + (2 \lambda_1 - 3 \lambda_2) \mathbf{u}_3 + (-\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{u}_4$, de donde: $x_1 = 5 \lambda_1 + 3 \lambda_2$, $x_2 = -3 \lambda_1 + 4 \lambda_2$, $x_3 = 2 \lambda_1 - 3 \lambda_2$, $x_4 = -\lambda_1 + \lambda_2$, ecuaciones equivalentes a la ecuación matricial del enunciado.

292. a) Se trata de resolver el sistema de ecuaciones:

$$(19, 6, -5, 1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

esto es:

$$\begin{cases} 19 = 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3, \\ 6 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3, \\ -5 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3, \\ 1 = -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3. \end{cases} \sim \begin{cases} 3 = \lambda_2 - \lambda_3, \\ 5 = \lambda_1 + \lambda_2, \end{cases}$$

de donde, todas las soluciones son $\lambda_1 = 2 - t$, $\lambda_2 = 3 + t$, $\lambda_3 = t$, siendo t arbitrario.

b) Se trata de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 19 = 5\lambda_1 + 3\lambda_2, \\ 6 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2, \\ -5 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2, \\ 1 = -\lambda_1 + \lambda_2, \end{cases} \sim \begin{cases} 2 = \lambda_1, \\ 1 = -\lambda_1 + \lambda_2, \end{cases}$$

que proporciona la solución única $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

293. a) Veamos si a_1, a_2, a_3 son linealmente dependientes. Para ello se tendrá que verificar que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0,$$

de donde

$$\lambda_1 (2u_1 - u_2 + u_3) + \lambda_2 (u_1 + 2u_2 + 4u_3) + \lambda_3 (5u_1 - 10u_2 - 8u_3) = 0,$$

o bien,

$$(2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3)u_1 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 10\lambda_3)u_2 + (\lambda_1 + 4\lambda_2 - 8\lambda_3)u_3 = 0,$$

y por ser u_1, u_2, u_3 linealmente independientes, resulta:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 8\lambda_3 = 0. \end{cases} \sim \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

que tiene como solución $\lambda_1 = 4t, \lambda_2 = -3t, \lambda_3 = -t$, para cualquier t , luego a_1, a_2 y a_3 son linealmente dependientes. Se comprueba inmediatamente que a_1 y a_2 son linealmente independientes, luego $L = L(a_1, a_2)$ y $B' = \{a_1, a_2\}$ es una base de L .

b) Para prolongar B' a una base de V hay que buscar un vector $b = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3$ linealmente independiente de $\{a_1, a_2\}$, esto es, tal que no se verifique

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \sim \begin{cases} b_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ b_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ b_3 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{cases} \sim \begin{cases} b_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ b_2 = -5\lambda_1 + 2b_1 \\ b_3 = -7\lambda_1 + 4b_1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} b_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ b_2 = -5\lambda_1 + 2b_1 \\ 6b_1 + 7b_2 - 5b_3 = 0. \end{cases}$$

Para que no se verifique la primera igualdad basta, por tanto, que no se verifique el último sistema y para esto es suficiente con que no se verifique la última ecuación; por consiguiente, bastará tomar $b = u_1$. Por consiguiente, la base ampliada será $B^* = \{a_1, a_2, u_1\}$.

294. Basta probar que $\{v_1, v_2\}$ es un sistema de generadores de V , ya que el número de generadores de un sistema no puede ser inferior a la dimensión del espacio. Ahora bien, de la definición de v_1 y v_2 se deduce: $u_1 = v_1 - 3u_2, v_2 = 2v_1 - 6u_2 + 7u_2 = 2v_1 + u_2$, de donde $u_2 = -2v_1 + v_2$ y $u_1 = v_1 - 3(-2v_1 + v_2) = 7v_1 - 3v_2$. Si x es un vector arbitrario, será:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1 u_1 + x_2 u_2 = x_1 (7v_1 - 3v_2) + x_2 (-2v_1 + v_2) \\ \quad = (7x_1 - 2x_2)v_1 + (-3x_1 + x_2)v_2, \end{cases}$$

que prueba que $\{v_1, v_2\}$ es un sistema de generadores de V y, por tanto, una base.

295. De $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2$, $\mathbf{x} = x_1^* \mathbf{v}_1 + x_2^* \mathbf{v}_2$ y la igualdad (1) del ejercicio anterior, resulta:

$$x_1^* \mathbf{v}_1 + x_2^* \mathbf{v}_2 = (7x_1 - 2x_2) \mathbf{v}_1 + (-3x_1 + x_2) \mathbf{v}_2,$$

de donde, por ser $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base, se obtiene:

$$\begin{cases} x_1^* = 7x_1 - 2x_2, \\ x_2^* = -3x_1 + x_2. \end{cases}$$

296. Bastará comprobar si $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*\}$ es un sistema de generadores:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2^* &= \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3^* &= 5\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \end{aligned} \sim \begin{cases} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1^* - 2\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2^* = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3^* = -2\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1^* \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbf{u}_1 = 3\mathbf{u}_1^* - 5\mathbf{u}_2^* - 3\mathbf{u}_3^*, \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^* - 2\mathbf{u}_2^* - \mathbf{u}_3^*, \\ \mathbf{u}_3 = -5\mathbf{u}_1^* + 10\mathbf{u}_2^* + 6\mathbf{u}_3^*, \end{cases}$$

de donde, si $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 = x_1^* \mathbf{u}_1^* + x_2^* \mathbf{u}_2^* + x_3^* \mathbf{u}_3^*$, resulta:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

297. 1.º Demostración: $0 = f(0) = f(\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x})$. 2.º Demostración: $f(-\mathbf{x}) = f(-1\mathbf{x}) = (-1)f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

298. No tienen por qué ser independientes, ya que se puede definir un homomorfismo fijando arbitrariamente $f(\mathbf{a}_1)$ y se puede elegir $f(\mathbf{a}_1) = f(\mathbf{a}_2) = \dots = f(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}'$.

299. $x'_1 \mathbf{u}'_1 + x'_2 \mathbf{u}'_2 = f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) = x_1 (4\mathbf{u}'_1 - 3\mathbf{u}'_2) + x_2 (\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2) = (4x_1 + x_2) \mathbf{u}'_1 + (-3x_1 + 5x_2) \mathbf{u}'_2$, y por ser $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ una base,

$$(2) \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 + x_2, \\ x'_2 = -3x_1 + 5x_2, \end{cases}$$

que se pueden escribir en forma matricial así:

$$(3) \quad (x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la primera fila de la última matriz de (3) está formada por las coordenadas de $f(\mathbf{u}_1)$ y la segunda por las coordenadas de $f(\mathbf{u}_2)$. Las ecuaciones (2) o (3) se llaman ecuaciones del homomorfismo f respecto del par de bases B y B' . Conviene observar también que las ecuaciones (2) y (3) son las mismas que las ecuaciones de una variedad lineal.

300. $x'_1 \mathbf{u}'_1 + x'_2 \mathbf{u}'_2 + x'_3 \mathbf{u}'_3 = f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) = x_1 (\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_3) + x_2 (\mathbf{u}'_1 - 4\mathbf{u}'_3) = (x_1 + x_2) \mathbf{u}'_1 + x_1 \mathbf{u}'_2 - (x_1 + 4x_2) \mathbf{u}'_3$, de donde:

$$(4) \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2, \\ x'_2 = x_1, \\ x'_3 = -x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

o bien, en forma matricial:

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

301. $x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 = f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) = x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + x_3 f(u_3)$
 $= x_1 (2 u'_1 - u'_2 + u'_3) + x_2 (u'_1 + 3 u'_2 - 2 u'_3) + x_3 (-7 u'_2 + 5 u'_3) = (2 x_1 + x_2) u'_1$
 $+ (-x_1 + 3 x_2 - 7 x_3) u'_2 + (x_1 - 2 x_2 + 5 x_3) u'_3$, de donde, por ser B' una base:

$$(5) \quad \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2, \\ x'_2 = -x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ x'_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3, \end{cases}$$

o bien, en forma matricial:

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

302. Si f^{-1} es un homomorfismo se verificará $x_1 u_1 + x_2 u_2 = f^{-1}(x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2)$
 $= x'_1 f^{-1}(u'_1) + x'_2 f^{-1}(u'_2)$ y $u_1 = 4 f^{-1}(u'_1) - 3 f^{-1}(u'_2)$, $u_2 = f^{-1}(u'_1) + 5 f^{-1}(u'_2)$, de
donde, $f^{-1}(u'_1) = \frac{5}{23} u_1 + \frac{3}{23} u_2$, $f^{-1}(u'_2) = \frac{-1}{23} u_1 + \frac{4}{23} u_2$. Recíprocamente, la co-
rrespondencia f^{-1} definida por la condición anterior es un homomorfismo en virtud de 45 c).
Obsérvese que las ecuaciones de f^{-1} son:

$$(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2) \begin{pmatrix} \frac{5}{23} & \frac{3}{23} \\ -\frac{1}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

303. Empleando las ecuaciones del homomorfismo obtenidas en el ejercicio 300, se tendr-
ría que verificar que el sistema (4) debería tener solución única respecto de las x , cuales-
quiera que sean las x' . Ahora bien, de (4) se deduce que $x_1 = x'_2$ y $x_2 = x'_1 - x'_2$,
 $x_3 = -\frac{x'_2}{4} - \frac{x'_1}{4}$, que prueba que f^{-1} no está definida en todo V' , luego no es aplicación.

304. De las ecuaciones (5), de f se deduce:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = -x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ x'_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ 5x'_2 + 7x'_3 = 2x_1 + x_2 \\ x'_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x'_1 - 5x'_2 - 7x'_3 = 0 \\ x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

La primera de ellas prueba que f^{-1} no está definida en todo V' , luego no es un homomor-
fismo.

305. Hemos visto en el ejercicio 302 que la correspondencia inversa está definida en todo V' , luego: $\text{im}(f) = V'$. Sea $\mathbf{x} \in \ker(f)$, siendo $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2$. De $0 = f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) = (4x_1 + x_2) \mathbf{u}'_1 + (-3x_1 + 5x_2) \mathbf{u}'_2$, se deduce que

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0, \\ -23x_1 = 0, \end{cases}$$

luego $\ker(f) = \{0\}$.

306. Sea $\mathbf{x}' = x'_1 \mathbf{u}'_1 + x'_2 \mathbf{u}'_2 + x'_3 \mathbf{u}'_3 \in \text{im}(f)$, esto es: $x'_1 \mathbf{u}'_1 + x'_2 \mathbf{u}'_2 + x'_3 \mathbf{u}'_3 = f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2) = (x_1 + x_2) \mathbf{u}'_1 + x_1 \mathbf{u}'_2 - (x_1 + 4x_2) \mathbf{u}'_3$, de donde:

$$(6) \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 \\ x'_3 = -x_1 - 4x_2 \end{cases} \sim \begin{cases} 4x'_1 - 3x'_2 + x'_3 = 0, \\ x'_2 = x_1, \\ x'_1 = x_1 + x_2, \end{cases}$$

que prueban que únicamente los vectores cuyas coordenadas x'_1, x'_2, x'_3 verifican la primera ecuación del último sistema (6) pertenecen a $\text{im}(f)$. Sea $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 \in \ker(f)$. De (6) se deduce que:

$$\begin{cases} 0 = x_1 + x_2 \\ 0 = x_1 \\ 0 = -x_1 - 4x_2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

luego $\ker(f) = \{0\}$.

307. Del sistema (5), formado por las ecuaciones del homomorfismo, se obtiene (véase el ejercicio 304):

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = -x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ x'_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x'_1 - 5x'_2 - 7x'_3 = 0, \\ x'_1 = 2x_1 + x_2, \\ x'_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3, \end{cases}$$

que prueba que únicamente los vectores cuyas coordenadas x'_1, x'_2, x'_3 verifican la ecuación $x'_1 - 5x'_2 - 7x'_3 = 0$ pertenecen a $\text{im}(f)$. Los vectores $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$ que pertenecen a $\ker(f)$ verifican el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x_1 = -t, \\ x_2 = 2t, \\ x_3 = t, \end{cases}$$

en donde t es una variable sobre K .

308. a) En el ejercicio 305 es $\dim(V) = 2$, $\dim(\text{im}(f)) = 2$, $\dim(\ker(f)) = 0$. b) En el ejercicio 306 es $\dim(V) = 2$, $\dim(\text{im}(f)) = 2$, ya que se pueden dar valores arbitrarios a x'_1 y x'_2 y la primera ecuación del último sistema (6) permite calcular x'_3 . $\dim(\ker(f)) = 0$. c) En el ejercicio 307 es: $\dim(V) = 3$, $\dim(\text{im}(f)) = 2$, $\dim(\ker(f)) = 1$. Se observa que en todos los ejemplos considerados es

$$\dim(V) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f)).$$

309. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio 308, resulta: a) El homomorfismo del ejercicio 299 es un isomorfismo. b) El del ejercicio 300 es un homomorfismo inyectivo y el del ejercicio 301 no es inyectivo ni epimorfismo.

310. Las ecuaciones de f serán:

$$(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \text{ o bien, } \begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ x'_2 = -4x_1 + 5x_2 + 7x_3, \end{cases}$$

sistema que es equivalente a

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5}{13} x'_1 - \frac{2}{13} x'_2 - \frac{23}{13} t, \\ x_2 = \frac{4}{13} x'_1 + \frac{1}{13} x'_2 - \frac{23}{13} t, \\ x_3 = t, \end{cases}$$

siendo t una variable arbitraria, que prueba que $\text{im}(f) = V'$. De (7) se deduce que

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{23}{13} t, \\ x_2 = -\frac{23}{13} t, \\ x_3 = t, \end{cases}$$

que prueba que $\dim(\ker(f)) = 1$. Por consiguiente, f es un epimorfismo, pero no es isomorfismo.

311. a) *Asociatividad*. $(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + [(\mathbf{y} + \mathbb{L}) + (\mathbf{z} + \mathbb{L})] = (\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (\mathbf{y} + \mathbf{z} + \mathbb{L}) = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \mathbb{L} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} + \mathbb{L} = (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbb{L}) + (\mathbf{z} + \mathbb{L}) = [(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (\mathbf{y} + \mathbb{L})] + (\mathbf{z} + \mathbb{L})$.

b) *Conmutatividad*. $(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (\mathbf{y} + \mathbb{L}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbb{L} = \mathbf{y} + \mathbf{x} + \mathbb{L} = (\mathbf{y} + \mathbb{L}) + (\mathbf{x} + \mathbb{L})$.

c) *Elemento cero*. $(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + \mathbb{L} = (\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (\mathbf{0} + \mathbb{L}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} + \mathbb{L} = \mathbf{x} + \mathbb{L}$, luego el elemento cero es $\mathbb{L}$.

d) *Elemento opuesto*. $(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (-\mathbf{x} + \mathbb{L}) = \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbb{L} = \mathbf{0} + \mathbb{L} = \mathbb{L} \Leftrightarrow -(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = -\mathbf{x} + \mathbb{L}$.

e) $a[(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (\mathbf{y} + \mathbb{L})] = a(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + a(\mathbf{y} + \mathbb{L})$. En efecto, $a[(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (\mathbf{y} + \mathbb{L})] = a(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbb{L}) = a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbb{L} = a\mathbf{x} + a\mathbf{y} + \mathbb{L} = (a\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (a\mathbf{y} + \mathbb{L}) = a(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + a(\mathbf{y} + \mathbb{L})$.

f) $(a+b)(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = a(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + b(\mathbf{x} + \mathbb{L})$. En efecto, $(a+b)(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = (a+b)\mathbf{x} + \mathbb{L} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x} + \mathbb{L} = (a\mathbf{x} + \mathbb{L}) + (b\mathbf{x} + \mathbb{L}) = a(\mathbf{x} + \mathbb{L}) + b(\mathbf{x} + \mathbb{L})$.

g) $(ab)(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = a[b(\mathbf{x} + \mathbb{L})]$. En efecto, $(ab)(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = (ab)\mathbf{x} + \mathbb{L} = a(b\mathbf{x}) + \mathbb{L} = a[b\mathbf{x} + \mathbb{L}] = a[b(\mathbf{x} + \mathbb{L})]$.

b) $1(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = \mathbf{x} + \mathbb{L}$. En efecto, $1(\mathbf{x} + \mathbb{L}) = 1\mathbf{x} + \mathbb{L} = \mathbf{x} + \mathbb{L}$.

312. Sea $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$ un vector arbitrario de V y, por tanto, $\mathbf{x} + \mathbb{L}$ un vector arbitrario de $V/\mathbb{L}$. De $x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 \in \mathbb{L}$ se deduce que $\mathbf{x} + \mathbb{L} = x_3 \mathbf{u}_3 + \mathbb{L}$.

$= x_3(u_3 + L)$, que prueba que $\{u_3 + L\}$ es un sistema de generadores de L , y como $u_3 \notin L$, $u_3 + L \neq L$ y $\{u_3 + L\}$ es una base de V/L .

313. Si $c \notin L$, se ha visto en la demostración de 41 que, a, b, c son linealmente independientes, y como $\dim(V) = 3$, formarán una base de V . Para hallar c bastará buscar un vector que no pertenezca a L . Sea $c = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$. $c \notin L \Leftrightarrow$ el siguiente sistema no tiene solución respecto de las λ :

$$\begin{cases} c_1 = 4\lambda_1 + \lambda_2 \\ c_2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ c_3 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2c_1 - 5c_2 - 13c_3 = 0, \\ c_2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2, \\ c_3 = \lambda_1 - \lambda_2. \end{cases}$$

luego bastará elegir c_1, c_2 y c_3 de modo que no se verifique la primera ecuación del segundo sistema, por ejemplo: $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$, con lo que $c = u_1$. Se verifica que $V/L = \{a u_1 + L \mid a \in K\}$ y, por tanto, una base de V/L es $u_1 + L$. En efecto, dado un vector arbitrario $x + L$ de V/L , $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, se pueden hallar λ y μ de modo que

$$x - \lambda a - \mu b = a u_1.$$

Esta igualdad equivale a

$$\begin{cases} x_2 + \lambda - 3\mu = 0, \\ x_3 - \lambda + \mu = 0, \end{cases} \sim \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \\ \lambda = \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

de donde

$$a = x_1 - 4\lambda - \mu = x_1 - 2x_2 - 6x_3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = x_1 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_3.$$

314. En ambos es $\dim(V) = 3$, $\dim(L) = 2$ y $\dim(V/L) = 1$, luego:

$$\dim(V) = \dim(L) + \dim(V/L).$$

315. Para obtener las ecuaciones de n necesitamos una base de $\ker(f)$. Sea x un vector arbitrario de $\ker(f)$; $f(x) = 0$; pero si $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$, será:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + x_3 f(u_3) + x_4 f(u_4) \\ &= x_1 (3u'_1 - u'_2) + x_2 (u'_1 + 2u'_2) = (3x_1 + x_2)u'_1 + (-x_1 + 2x_2)u'_2 = 0, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Recíprocamente, sea $\mathbf{x}$ un vector cuyas dos primeras coordenadas son nulas: $\mathbf{x} = x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4$, se verifica que

$$f(\mathbf{x}) = x_3 f(\mathbf{u}_3) + x_4 f(\mathbf{u}_4) = 0.$$

Por consiguiente, una base de $\ker(f)$ es $B_1 = \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, luego B es una base ampliada de B_1 a V , luego:

$$x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4 + \ker(f) = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \ker(f),$$

luego

$$n(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4) = x_1 \cdot (\mathbf{u}_1 + \ker(f)) + x_2 (\mathbf{u}_2 + \ker(f)),$$

es decir, $B_2 = \{\mathbf{u}_1 + \ker(f), \mathbf{u}_2 + \ker(f)\}$ es una base de $V/\ker(f)$. Si ponemos:

$$n(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4) = y_1 (\mathbf{u}_1 + \ker(f)) + y_2 (\mathbf{u}_2 + \ker(f)),$$

resulta que las ecuaciones de n son:

$$n: \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \end{cases}$$

que, en forma matricial, se pueden escribir del siguiente modo:

$$(8) \quad n: (y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elijamos ahora una base de $\text{im}(f)$. Para ello tomaremos un vector arbitrario $\mathbf{x}'$ de $\text{im}(f)$, será:

$$(9) \quad \mathbf{x}' = f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4) = (3x_1 + x_2) \mathbf{u}'_1 + (-x_1 + 2x_2) \mathbf{u}'_2,$$

luego, si $\mathbf{x}' = x'_1 \mathbf{u}'_1 + x'_2 \mathbf{u}'_2 + x'_3 \mathbf{u}'_3$, resulta que $x'_3 = 0$. Recíprocamente, sea $\mathbf{x}'$ un vector para el que $x'_3 = 0$. De (9) se deduce que para que $\mathbf{x}'$ pertenezca a $\text{im}(f)$ ha de tener solución respecto de x_1, x_2 el sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + x_2, \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2, \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \frac{1}{7} (2x'_1 - x'_2), \\ x_2 = \frac{1}{7} (x'_1 + 3x'_2), \end{cases}$$

luego $\text{im}(f)$ es el conjunto de todos los vectores de V' cuya tercera coordenada es nula. Por consiguiente, una base de $\text{im}(f)$ es $B_3 = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$. Sea $\mathbf{y} = [y_1 \cdot (\mathbf{u}_1 + \ker(f))]$

$+ [y_2 \cdot (u_2 + \ker(f))]$ un vector arbitrario de $V/\ker(f)$. En virtud de la fórmula (68) del texto es

$$\begin{aligned} b([y_1(u_1 + \ker(f))] + [y_2(u_2 + \ker(f))]) &= b(y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ker(f)) \\ &= f(y_1 u_1 + y_2 u_2) = y_1 f(u_1) + y_2 f(u_2) = (3y_1 + y_2) u'_1 + (-y_1 + 2y_2) u'_2, \end{aligned}$$

luego si

$$b([y_1(u_1 + \ker(f))] + [y_2(u_2 + \ker(f))]) = z_1 u'_1 + z_2 u'_2,$$

serán

$$b: \begin{cases} z_1 = 3y_1 + y_2, \\ z_2 = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

las ecuaciones de isomorfismo b ; que se pueden escribir en forma matricial del siguiente modo:

$$(10) \quad b: (z_1, z_2) = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para obtener las ecuaciones de la inmersión i sea $z_1 u'_1 + z_2 u'_2$ un vector arbitrario de $\text{im}(f)$, será

$$i(z_1 u'_1 + z_2 u'_2) = x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3,$$

si $i(z_1 u'_1 + z_2 u'_2) = x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3$, resulta que

$$i: \begin{cases} x'_1 = z_1, \\ x'_2 = z_2, \\ x'_3 = 0, \end{cases}$$

o bien, en forma matricial:

$$(11) \quad i: (x'_1, x'_2, x'_3) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, las ecuaciones de f son:

$$f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) = (3x_1 + x_2) u'_1 + (-x_1 + 2x_2) u'_2,$$

y si $f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) = x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3$, resulta:

$$f: \begin{cases} x'_1 = 3x_1 + x_2, \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2, \\ x'_3 = 0, \end{cases}$$

o bien, en forma matricial:

$$f: \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

316. Para hallar las ecuaciones de n es necesario, como en el caso anterior, encontrar una base de $V/\ker(f)$, y para esto conviene comenzar por hallar una base de $\ker(f)$ y prolongarla a una base de V . Sea $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4$ un vector arbitrario de $\ker(f)$. Se verificará:

$$0 = f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) + x_3 f(\mathbf{u}_3) + x_4 f(\mathbf{u}_4) = x_1 (\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2) + x_2 (2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2) + x_3 (3\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2) + x_4 (\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4) \mathbf{u}'_1 + (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4) \mathbf{u}'_2,$$

de donde:

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \approx \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} (-7x_3 - 5x_4) \\ x_2 = \frac{1}{3} (-x_3 + x_4). \end{cases}$$

(12) son, por tanto, condiciones necesarias y suficientes para que $\mathbf{x} \in \ker(f)$. Tomando dos soluciones no proporcionales de (12), se obtiene una base, por ejemplo:

$$\mathbf{v}_1 = 7\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}_2 = -5\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_4,$$

se verifica que $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\ker(f)$. Los vectores $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$ no pertenecen a $\ker(f)$ y $x_3 \mathbf{u}_3 + x_4 \mathbf{u}_4 \in \ker(f) \Rightarrow x_3 = x_4 = 0$, luego se puede tomar como nueva base de V la siguiente: $B^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4$. Se verifica que $f(\mathbf{v}_1) = 7f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2) - 3f(\mathbf{u}_3) = 7(\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2) + 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 - 3(3\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2) = 0$, $f(\mathbf{v}_2) = -5f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2) + 3f(\mathbf{u}_4) = -5(\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2) + 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 + 3(\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2) = 0$, $f(\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$, $f(\mathbf{v}_4) = \mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$, con lo que la situación es la misma que en el ejercicio anterior. Procediendo como en este ejercicio, se obtiene:

$$\begin{aligned} y_1 (\mathbf{v}_3 + \ker(f)) + y_2 (\mathbf{v}_4 + \ker(f)) &= n (x_1^* \mathbf{v}_1 + x_2^* \mathbf{v}_2 + x_3^* \mathbf{v}_3 + x_4^* \mathbf{v}_4) \\ &= x_3^* (\mathbf{v}_3 + \ker(f)) + x_4^* (\mathbf{v}_4 + \ker(f)), \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{cases} y_1 = x_3^*, \\ y_2 = x_4^*, \end{cases} \quad (y_1, y_2) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son las ecuaciones de n . De

$$\begin{aligned} z_1 u'_1 + z_2 u'_2 &= b [y_1 (v_3 + \ker(f)) + y_2 (v_4 + \ker(f))] = b [(y_1 v_3 + y_2 v_4) + \ker(f)] \\ &= f(y_1 v_3 + y_2 v_4) = y_1 f(v_3) + y_2 f(v_4) \\ &= y_1 (3 u'_1 + 2 u'_2) + y_2 (u'_1 + 2 u'_2) = (3 y_1 + y_2) u'_1 + (2 y_1 + 2 y_2) u'_2, \end{aligned}$$

resultan las siguientes:

$$\begin{cases} z_1 = 3 y_1 + y_2, \\ z_2 = 2 y_1 + 2 y_2, \end{cases} \quad (z_1, z_2) = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

ecuaciones de b . Finalmente, las ecuaciones de i se obtienen del siguiente modo,

$$x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 = i(z_1 u'_1 + z_2 u'_2) = z_1 u'_1 + z_2 u'_2,$$

de donde:

$$\begin{cases} x'_1 = z_1, \\ x'_2 = z_2, \\ x'_3 = 0, \end{cases} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Empleando en V la base dada, basta observar que

$$\begin{aligned} x^*_1 v_1 + x^*_2 v_2 + x^*_3 v_3 + x^*_4 v_4 &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 \\ &= x_1 \left[\frac{1}{12} (v_1 - v_2 + 3 v_3 + 3 v_4) \right] + x_2 \left(\frac{5}{12} v_1 + \frac{7}{12} v_2 + \frac{5}{4} v_3 - \frac{7}{4} v_4 \right) + x_3 v_3 + x_4 v_4 \\ &= \frac{1}{12} (x_1 + 5 x_2) v_1 + \frac{1}{12} (-x_1 + 7 x_2) v_2 + \left(\frac{1}{4} x_1 + \frac{5}{4} x_2 + x_3 \right) v_3 + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} x_1 - \frac{7}{4} x_2 + x_4 \right) v_4, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} x^*_1 = \frac{1}{12} (x_1 + 5 x_2) \\ x^*_2 = -\frac{1}{12} x_1 + \frac{7}{12} x_2 \\ x^*_3 = \frac{1}{4} x_1 + \frac{5}{4} x_2 + x_3 \\ x^*_4 = \frac{1}{4} x_1 - \frac{7}{4} x_2 + x_4 \end{cases}$$

y las ecuaciones de n , respecto de la base primitiva de V , son:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + x_3, \\ y_2 = \frac{1}{4}x_1 - \frac{7}{4}x_2 + x_4, \end{cases} \quad (y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de f son:

$$\begin{aligned} x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 &= f(\mathbf{x}) = x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + x_3 f(u_3) + x_4 f(u_4) \\ &= x_1 (u'_1 + u'_2) + x_2 (2u'_1 - u'_2) + x_3 (3u'_1 + 2u'_2) + x_4 (u'_1 + 2u'_2) \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4) u'_1 + (x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4) u'_2, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4, \\ x'_2 &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4, \\ x'_3 &= 0, \end{aligned} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

317. Se ha visto en los casos anteriores que es necesario hallar una base de $\ker(f)$ y una base de $\operatorname{im}(f)$.

a) *Base de $\ker(f)$.*—Sea $\mathbf{x} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$ un vector arbitrario de $\ker(f)$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x}) = x_1 (2u'_1 - u'_2 + u'_3) + x_2 (u'_1 + 2u'_2 - u'_3) + x_3 (3u'_1 + u'_2) \\ &+ x_4 (4u'_1 - 7u'_2 + 5u'_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4) u'_1 + (-x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4) u'_2 \\ &+ (x_1 - x_2 + 5x_4) u'_3, \end{aligned}$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \sim \begin{cases} x_1 = x_2 - 5x_4, \\ x_3 = -x_2 + 2x_4, \end{cases}$$

que proporciona la siguiente base (entre las infinitas posibles) para $\ker(f)$:

$$B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \quad \mathbf{v}_1 = u_1 + u_2 - u_3, \quad \mathbf{v}_2 = -5u_1 + 2u_3 + u_4.$$

b) *Prolongación de B_1 a una base de V .*—Los vectores u_1 y u_2 no pertenecen a $\ker(V)$ y son linealmente independientes. Pongamos $v_3 = u_1$, $v_4 = u_2$, los vectores de $B^* = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forman una base de V . En efecto, de

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \lambda_1 (u_1 + u_2 - u_3) + \lambda_2 (-5u_1 + 2u_3 + u_4) \\ &+ \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = (\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3) u_1 + (\lambda_1 + \lambda_4) u_2 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2) u_3 + \lambda_2 u_4, \end{aligned}$$

se deduce $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Por consiguiente, B^* es una base de V . Para hallar las fórmulas del cambio de base, pongamos:

$$\begin{aligned} x_1^* v_1 + x_2^* v_2 + x_3^* v_3 + x_4^* v_4 &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = x_1 v_3 + x_2 v_4 \\ &+ x_3 (-v_1 + v_3 + v_4) + x_4 (2v_1 + v_2 + 3v_3 - 2v_4) = (-x_3 + 2x_4) v_1 + x_4 v_2 \\ &+ (x_1 + x_3 + 3x_4) v_3 + (x_2 + x_3 - 2x_4) v_4, \end{aligned}$$

de donde:

$$(12') \quad \begin{cases} x_1^* = -x_3 + 2x_4 \\ x_2^* = x_4 \\ x_3^* = x_1 + x_3 + 3x_4 \\ x_4^* = x_2 + x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

c) *Base de $\operatorname{im}(f)$.*—Sea $x' = x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 = f(x) = x_1 (2u'_1 - u'_2 + u'_3) + x_2 (u'_1 + 2u'_2 - u'_3) + x_3 (3u'_1 + u'_2) + x_4 (4u'_1 - 7u'_2 + 5u'_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4) u'_1 + (-x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4) u'_2 + (x_1 - x_2 + 5x_3) u'_3$, de donde:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 \\ x'_3 = x_1 - x_2 + 5x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x'_1 - 3x'_2 - 5x'_3 = 0 \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 \\ x'_3 = x_1 - x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

Por consiguiente, para hallar una base de $\operatorname{im}(f)$ basta hallar dos soluciones no proporcionales de la primera ecuación del segundo sistema, por ejemplo $(3, 1, 0)$ y $(5, 0, 1)$, con lo que se obtiene la siguiente base de $\operatorname{im}(f)$:

$$B_2 = \{v'_1, v'_2\}, \quad v'_1 = 3u'_1 + u'_2, \quad v'_2 = 5u'_1 + u'_3.$$

d) *Prolongación de B_2 a una base de V' .*—El vector u'_1 no pertenece a $\operatorname{im}(f)$, luego:

$$B^* = \{v'_1, v'_2, v'_3\}, \quad v'_3 = u'_1,$$

es una base de V' , prolongación de la base B_2 de $\operatorname{im}(f)$.

Las fórmulas del cambio de la base B^* a la base B' son:

$$\begin{aligned} x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 &= x_1^* v'_1 + x_2^* v'_2 + x_3^* v'_3 = x_1^* (3u'_1 + u'_2) \\ &+ x_2^* (5u'_1 + u'_3) + x_3^* u'_1 = (3x_1^* + 5x_2^* + x_3^*) u'_1 + x_1^* u'_2 + x_2^* u'_3, \end{aligned}$$

de donde:

$$(12'') \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1^{**} + 5x_2^{**} + x_3^{**} \\ x'_2 = x_1^{**} \\ x'_3 = x_2^{**} \end{cases} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) *Ecuaciones respecto de las bases B^* y B^{**} .*—Empleando estas bases se obtiene:
 $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 0$, $f(v_3) = f(u_1) = 2u'_1 - u'_2 + u'_3 = 2v'_3 - (v'_1 - 3v'_3) + (v'_2 - 5v'_3) = -v'_1 + v'_2$,
 $f(v_4) = f(u_2) = u'_1 + 2u'_2 - u'_3 = v'_3 + 2v'_1 - 6v'_3 - v'_2 + 5v'_3 = 2v'_1 - v'_2$.

Una base de $V/\ker(f)$ es $B_3 = \{v_3 + \ker(f), v_4 + \ker(f)\}$, luego las ecuaciones de n respecto de B^* y B_3 , serán:

$$\begin{aligned} y_1(v_3 + \ker(f)) + y_2(v_4 + \ker(f)) &= n(x) = n(x_1^* v_1 + x_2^* v_2 + x_3^* v_3 + x_4^* v_4) \\ &= x_3^* n(v_3) + x_4^* n(v_4) = x_3^* (v_3 + \ker(f)) + x_4^* (v_4 + \ker(f)). \end{aligned}$$

de donde:

$$(13) \quad \begin{cases} y_1 = x_3^* \\ y_2 = x_4^* \end{cases} \quad (y_1, y_2) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de b respecto de B^* y B^{**} , serán:

$$\begin{aligned} b[y_1(v_3 + \ker(f)) + y_2(v_4 + \ker(f))] &= b(y_1 v_3 + y_2 v_4 + \ker(f)) = f(y_1 v_3 + y_2 v_4) \\ &= y_1 f(v_3) + y_2 f(v_4) = v_1(-v'_1 + v'_2) + y_2(2v'_1 - v'_2) = (-y_1 + 2y_2)v'_1 + (y_1 - y_2)v'_2, \end{aligned}$$

luego si $b[y_1(v_3 + \ker(f)) + y_2(v_4 + \ker(f))] = z_1 v'_1 + z_2 v'_2$, resulta:

$$(14) \quad b: \begin{cases} z_1 = -y_1 + 2y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \end{cases} \quad (z_1, z_2) = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de i respecto de B^{**} serán:

$$x_1^{**} v'_1 + x_2^{**} v'_2 + x_3^{**} v'_3 = i(z_1 v'_1 + z_2 v'_2) = z_1 v'_1 + z_2 v'_2,$$

de donde:

$$i: \begin{cases} x_1^{**} = z_1 \\ x_2^{**} = z_2 \\ x_3^{**} = 0 \end{cases} \quad (x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Ecuaciones respecto de B y B' .—De (12') y (13) se deduce:

$$n: \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 + 3x_4, \\ y_2 = x_2 + x_3 - 2x_4, \end{cases} \quad (y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

son las ecuaciones de n respecto de B y $B_3 = \{u_1 + \ker(f), u_2 + \ker(f)\}$.

De (12'') y (14) se obtiene:

$$b: \begin{cases} t_1 = 3x_1 + 5x_2 + 0 = 3(-y_1 + 2y_2) + 5(y_1 - y_2) = 2y_1 + y_2, \\ t_2 = x_1 = -y_1 + 2y_2, \\ t_3 = x_2 = y_1 - y_2, \end{cases}$$

o bien, en forma matricial:

$$b: (t_1, t_2, t_3) = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

que son las ecuaciones de b respecto de B_3 y B' .

Finalmente, las ecuaciones de i respecto de B' serán:

$$i: \begin{cases} x'_1 = t_1, \\ x'_2 = t_2, \\ x'_3 = t_3, \end{cases} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = (t_1, t_2, t_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Ecuaciones de f respecto de B y B' :

$$\begin{aligned} x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 &= f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) = x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) \\ &+ x_3 f(u_3) + x_4 f(u_4) = x_1 (2u'_1 - u'_2 + u'_3) + x_2 (u'_1 + 2u'_2 - u'_3) + x_3 (3u'_1 + u'_2) \\ &+ x_4 (4u'_1 - 7u'_2 + 5u'_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4) u'_1 + (-x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4) u'_2 \\ &+ (x_1 - x_2 + 5x_4) u'_3, \end{aligned}$$

de donde:

$$f: \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4, \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4, \\ x'_3 = x_1 - x_2 + 5x_4, \end{cases} \quad (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que sustituyendo n en b y b en i , se obtiene:

$$\begin{aligned} x'_1 = t_1 &= 2y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_3 + 3x_4) + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x'_2 = t_2 &= -y_1 + 2y_2 = -x_1 - x_3 - 3x_4 + 2(x_2 + x_3 - 2x_4) = -x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 \\ x'_3 = t_3 &= y_1 - y_2 = x_1 + x_3 + 3x_4 - x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 - x_2 + 5x_4 \end{aligned}$$

318.

$$(f + g)(u_1) = f(u_1) + g(u_1) = (8u'_1 + u'_2) + (-5u'_1 + 2u'_2) = 3u'_1 + 3u'_2,$$

$$(f + g)(u_2) = f(u_2) + g(u_2) = (4u'_1 + 3u'_2) + (4u'_1 + 2u'_2) = 8u'_1 + 5u'_2.$$

Por consiguiente, la ecuación de $f + g$ será:

$$\begin{aligned} x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 &= (f + g)(x_1 u_1 + x_2 u_2) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2) + g(x_1 u_1 + x_2 u_2) \\ &= x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + x_1 g(u_1) + x_2 g(u_2) = x_1 (f + g)(u_1) + x_2 (f + g)(u_2) \\ &= x_1 (3u'_1 + 3u'_2) + x_2 (8u'_1 + 5u'_2) = (3x_1 + 8x_2)u'_1 + (3x_1 + 5x_2)u'_2, \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 8x_2, \\ x'_2 = 3x_1 + 5x_2, \end{cases} \quad \text{o bien:} \quad (x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

son las ecuaciones de $f + g$. La ecuación de $6f$ son:

$$(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 48 & 6 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$$

319.

$$\begin{aligned} x''_1 u''_1 + x''_2 u''_2 &= g f(x_1 u_1 + x_2 u_2) = g[f(x_1 u_1 + x_2 u_2)] = g[x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2)] \\ &= g[x_1 (6u'_1 - 5u'_2) + x_2 (2u'_1 + u'_2)] = g(6x_1 + 2x_2)u'_1 + (-5x_1 + x_2)u'_2 \\ &= (6x_1 + 2x_2)g(u'_1) + (-5x_1 + x_2)g(u'_2) = (6x_1 + 2x_2)(u''_1 + 3u''_2) \\ &\quad + (-5x_1 + x_2)(4u''_1 + 7u''_2) = (6x_1 + 2x_2 - 20x_1 + 4x_2)u''_1 \\ &\quad + (18x_1 + 6x_2 - 35x_1 + 7x_2)u''_2 = (-14x_1 + 6x_2)u''_1 + (-17x_1 + 13x_2)u''_2, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{cases} x''_1 = -14x_1 + 6x_2, \\ x''_2 = -17x_1 + 13x_2, \end{cases} \quad (x''_1, x''_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -17 & 13 \end{pmatrix},$$

son las ecuaciones del producto gf .

320. Se conviene en que $f^0 = 1_v$.

$$a) \sum_{i=0}^n a_i f^i, \sum_{i=0}^m b_i f^i \in \mathbb{L}(f) \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^n a_i f^i \right) + \left(\sum_{i=0}^m b_i f^i \right) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) f^i \in \mathbb{L}(f),$$

siendo $n \geq m$, $b_{m+1} = \dots = b_n = 0$.

$$b) \quad a \left(\sum_{i=0}^n a_i f^i \right) = \sum_{i=0}^n a a_i f^i \in \mathbb{L}(f).$$

$$c) \quad \left(\sum_{i=0}^n a_i f^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j f^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} (a_0 b_k + \dots + a_k b_0) f^k \in \mathbb{L}(f).$$

d) $o f = o$ es el endomorfismo cero.

$$e) \quad - \left(\sum_{i=0}^n a_i f^i \right) = \sum_{i=0}^n (-a_i) f^i \in \mathbb{L}(f).$$

f) $f^0 = 1_v \in \mathbb{L}(f).$

321. Sea f un endomorfismo arbitrario de V :

$$f(u_1) = x_1 u_1 + x_2 u_2, \quad f(u_2) = x_3 u_1 + x_4 u_2.$$

Se verifica que

$$f(u_1) = x_1 f_1(u_1) + x_2 f_2(u_1) + x_3 f_3(u_1) + x_4 f_4(u_1) = (x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4)(u_1),$$

$$f(u_2) = x_1 f_1(u_2) + x_2 f_2(u_2) + x_3 f_3(u_2) + x_4 f_4(u_2) = (x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4)(u_2)$$

de estas relaciones resulta que

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4$$

luego $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ es un sistema de generadores de $\text{End.}(V)$.

Si fuese

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0,$$

siendo el cero del último miembro el endomorfismo cero, aplicado al vector u_1 se obtendría

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \quad \text{de donde} \quad a_1 = a_2 = 0,$$

y aplicándolo al vector u_2 :

$$a_3 u_1 + a_4 u_2 = 0, \quad \text{de donde} \quad a_3 = a_4 = 0,$$

luego son linealmente independientes y forman, por consiguiente, una base. $f_2 f_1(u_1) = f_2(u_1) = u^2$, $f_2 f_1(u_2) = f_2(0) = 0$, luego $f_2 f_1 = f_2$. Procediendo de modo análogo se obtiene la siguiente tabla de multiplicar:

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	0	0
f_2	0	0	f_1	f_2
f_3	f_2	f_4	0	0
f_4	0	0	f_3	f_4

322. Sea $x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^*$ un vector arbitrario de $\omega\{a, b, c\}$, se verificará:

$$\begin{cases} (x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^*) (u_1 - u_2 - u_3) = 0, \\ (x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^*) (2u_1 + u_2 - u_3) = 0, \\ (x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^*) (u_1 + 2u_2) = 0, \end{cases}$$

o bien, recordando que B^* es la base dual:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x_1^* - x_2^* - x_3^*) u^* = 0 \\ (2x_1^* + x_2^* - x_3^*) u^* = 0 \\ (x_1^* + 2x_2^*) u^* = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* - x_2^* - x_3^* = 0 \\ 2x_1^* + x_2^* - x_3^* = 0 \\ x_1^* + 2x_2^* = 0 \end{cases} \sim \\ &\sim \begin{cases} x_1^* - x_2^* - x_3^* = 0 \\ x_1^* + 2x_2^* = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1^* = -2x_2^* \\ x_3^* = -3x_2^* \end{cases} \end{aligned}$$

luego todos los vectores de $\omega\{a, b, c\}$ vienen dados por

$$-2x_2^* u_1^* + x_2^* u_2^* - 3x_2^* u_3^* = x_2^* (-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*),$$

luego una base de $\omega\{a, b, c\}$ es $B_1 = \{-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*\}$.

323. $x \in L\{a, b, c\} \Leftrightarrow x = x_1 a + x_2 b + x_3 c$, luego

$$\begin{aligned} [\lambda (2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*)] (x_1 a + x_2 b + x_3 c) &= \lambda x_1 [(-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*) a] \\ &+ \lambda x_2 [(-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*) b] + \lambda x_3 [(-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*) c] = 0. \end{aligned}$$

324. $x \in L\{a, b, c\} \Leftrightarrow x = x_1 a + x_2 b + x_3 c$, y por el ejercicio anterior, $(-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*) x = 0$. Recíprocamente, sea $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ un vector tal que $(-2u_1^* + u_2^* - 3u_3^*) x = 0 \Leftrightarrow (-2x_1 + x_2 - 3x_3) u = 0 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda + 3\mu \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

como $L\{a, b, c\} = L\{a, b\}$, vamos a ver que se pueden calcular x e y de modo que

$$\begin{cases} \lambda = x + 2y \\ 2\lambda + 3\mu = -x + y \\ \mu = -x - y \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda = x + 2y \\ \mu = -x - y \end{cases} \sim \begin{cases} y = \lambda + \mu \\ x = -\lambda - 2\mu \end{cases}$$

325. Sea $x^* = x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^* + x_4^* u_4^*$ un vector arbitrario de $\omega(L)$, y sea $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = (\lambda - 2\mu) u_1 + (3\lambda + \mu) u_2 + (2\lambda + 5\mu) u_3 + (-\lambda + \mu) u_4$ un vector arbitrario de $\omega(L)$. Se verificará:

$$\begin{aligned} 0 = x^* x &= (x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^* + x_4^* u_4^*) [(\lambda - 2\mu) u_1 + (3\lambda + \mu) u_2 \\ &+ (2\lambda + 5\mu) u_3 + (-\lambda + \mu) u_4] = [x_1^* (\lambda - 2\mu) + x_2^* (3\lambda + \mu) \\ &+ x_3^* (2\lambda + 5\mu) + x_4^* (-\lambda + \mu)] u, \end{aligned}$$

de donde:

$$(x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* - x_4^*)\lambda + (-2x_1^* + x_2^* + 5x_3^* + x_4^*)\mu = 0,$$

y, como λ y μ son parámetros arbitrarios, tomando $\lambda = 1, \mu = 0$ y $\lambda = 0, \mu = 1$, resultan las siguientes ecuaciones:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* - x_4^* = 0, \\ -2x_1^* + x_2^* + 5x_3^* + x_4^* = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones (1) se llaman ecuaciones implícitas de la variedad $\omega(\mathbb{L})$. Los vectores de $\omega(\mathbb{L})$ son las soluciones del sistema (1). El sistema (1) es equivalente a los siguientes:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* - x_4^* = 0 \\ -x_1^* + 4x_2^* + 7x_3^* = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_3^* = \frac{1}{7}(x_1^* - 4x_2^*) \\ x_4^* = \frac{1}{7}(9x_1^* + 13x_2^*) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1^* = \lambda \\ x_2^* = \mu \\ x_3^* = \frac{1}{7}\lambda - \frac{4}{7}\mu \\ x_4^* = \frac{9}{7}\lambda + \frac{13}{7}\mu \end{cases}$$

El último sistema es, por tanto, el de las ecuaciones explícitas de $\omega(\mathbb{L})$.

326. $\mathbf{x} \in \mathbb{L} \Rightarrow \mathbf{x}$ es ortogonal a todos los vectores de $\omega(\mathbb{L})$, luego recordando las ecuaciones (2) de $\omega(\mathbb{L})$ en el ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathbb{L} &\Rightarrow (x_1^* u_1^* + x_2^* u_2^* + x_3^* u_3^* + x_4^* u_4^*) (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) = 0 \\ \Leftrightarrow x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + x_3^* x_3 + x_4^* x_4 &= 0 \Leftrightarrow \lambda x_1 + \mu x_2 + \left(\frac{1}{7}\lambda - \frac{4}{7}\mu\right) x_3 + \left(\frac{9}{7}\lambda + \frac{13}{7}\mu\right) x_4 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x_1 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{9}{7}x_4\right)\lambda + \left(x_2 - \frac{4}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4\right)\mu &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{9}{7}x_4 = 0. \\ x_2 - \frac{4}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Recíprocamente,

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{9}{7}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{4}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4 = 0 \end{cases} \sim (3) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}\rho - \frac{9}{7}\tau \\ x_2 = \frac{4}{7}\rho - \frac{13}{7}\tau \\ x_3 = \rho \\ x_4 = \tau \end{cases}$$

Veamos que, para cualquier ρ y cualquier τ , el vector de coordenadas (3) es solución del sistema (75) del texto.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{7}\rho - \frac{9}{7}\tau = \lambda - 2\mu \\ \frac{4}{7}\rho - \frac{13}{7}\tau = 3\lambda + \mu \\ \rho = 2\lambda + 5\mu \\ \tau = -\lambda + \mu \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} \rho = 2\lambda + 5\mu \\ \tau = -\lambda + \mu \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{7}(\rho - 5\tau), \\ \mu = \frac{1}{7}(\rho + 2\tau). \end{array} \right.$$

327. a) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) + \underline{L}$, $\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) + \underline{L}$, y como en virtud de (85), $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \in \underline{L}$, resulta que $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) + \underline{L} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) + \underline{L}$.

b) y c) Se prueban de modo análogo.

d) De $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ se deduce $(\mathbf{x} + \mathbf{0}) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, y por a) $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{0} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, de donde, sumando el opuesto a $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$,

$$\mathbf{0} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

328. Obsérvese que el conjunto $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, cuando $\mathbf{x}$ recorre V_1 , e $\mathbf{y} \in V_2$, es un sistema de generadores de $V_1 \otimes V_2$, luego podemos limitarnos a buscar la base en este subconjunto. Ahora bien, en nuestro caso es $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2$, $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2$, luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= (x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2) \otimes (y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2) = (x_1 \mathbf{u}_1) \otimes (y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2) + (x_2 \mathbf{u}_2) \otimes (y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2) \\ &= (x_1 \mathbf{u}_1) \otimes (y_1 \mathbf{u}_1) + (x_1 \mathbf{u}_1) \otimes (y_2 \mathbf{u}_2) + (x_2 \mathbf{u}_2) \otimes (y_1 \mathbf{u}_1) + (x_2 \mathbf{u}_2) \otimes (y_2 \mathbf{u}_2) = (x_1 y_1) (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + (x_1 y_2) (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + (x_2 y_1) (\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) + (x_2 y_2) (\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

que prueba que $B^* = \{\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2\}$ es un sistema de generadores de $V \otimes V$.

329.

$$\begin{aligned} a_{11}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + a_{12}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + a_{21}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) + a_{22}(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) &= a_{11}[(2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2) \otimes (2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2)] + a_{12}[(2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2) \otimes (-\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2)] + a_{21}[(-\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) \otimes (2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2)] + a_{22}[(-\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) \otimes (-\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2)] \\ &= a_{11}[4(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + 10(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) + 10(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + 25(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)] + a_{12}[-2(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + 6(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) - 5(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + 15(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)] + a_{21}[-2(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) - 5(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) + 6(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + 15(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)] + a_{22}[(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) - 3(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) - 3(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + 9(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)] \\ &= (4a_{11} - 2a_{12} - 2a_{21} + a_{22})(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + (10a_{11} + 6a_{12} - 5a_{21} - 3a_{22})(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) + (10a_{11} - 5a_{12} + 6a_{21} - 3a_{22})(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + (25a_{11} + 15a_{12} + 15a_{21} + 9a_{22})(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Por consiguiente, llamando a_{11}^* , a_{12}^* , a_{21}^* , a_{22}^* a las coordenadas respecto de la nueva base, será:

$$a_{11}^* = 4a_{11} - 2a_{12} - 2a_{21} + a_{22}$$

$$a_{12}^* = 10a_{11} + 6a_{12} - 5a_{21} - 3a_{22}$$

$$a_{21}^* = 10a_{11} - 5a_{12} + 6a_{21} - 3a_{22}$$

$$a_{22}^* = 25a_{11} + 15a_{12} + 15a_{21} + 9a_{22}$$

330. a) $f(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = 3(x_1 + x'_1)y_1 + 5(x_1 + x'_1)y_2 - 7(x_2 + x'_2)y_1 + 4(x_2 + x'_2)y_2$
 $= (3x_1y_1 + 5x_1y_2 - 7x_2y_1 + 4x_2y_2) + (3x'_1y_1 + 5x'_1y_2 - 7x'_2y_1 + 4x'_2y_2) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}', \mathbf{y}).$

b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}') = 3x_1(y_1 + y'_1) + 5x_1(y_2 + y'_2) - 7x_2(y_1 + y'_1) + 4x_2(y_2 + y'_2) = (3x_1y_1 + 5x_1y_2 - 7x_2y_1 + 4x_2y_2) + (3x_1y'_1 + 5x_1y'_2 - 7x_2y'_1 + 4x_2y'_2) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}').$

c) $f(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3ax_1y_1 + 5ax_1y_2 - 7ax_2y_1 + 4ax_2y_2 = a(3x_1y_1 + 5x_1y_2 - 7x_2y_1 + 4x_2y_2) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$

331. Las fórmulas (106) dan, llamando δ^{ij} a las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned}\delta^{11} &= \delta^{11} a_1^1 a_1^1 + \delta^{12} a_1^1 a_2^1 + \delta^{21} a_2^1 a_1^1 + \delta^{22} a_2^1 a_2^1 \\ &= a_1^1 a_1^1 + a_2^1 a_2^1 = 4 + 1 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^{12} &= \delta^{11} a_1^1 a_1^2 + \delta^{12} a_1^1 a_2^2 + \delta^{21} a_2^1 a_1^2 + \delta^{22} a_2^1 a_2^2 \\ &= a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2 = 2(-4) + 1 \cdot 3 = -8 + 3 = -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^{21} &= \delta^{11} a_1^2 a_1^1 + \delta^{12} a_1^2 a_2^1 + \delta^{21} a_2^2 a_1^1 + \delta^{22} a_2^2 a_2^1 \\ &= a_1^2 a_1^1 + a_2^2 a_2^1 = -8 + 3 = -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^{22} &= \delta^{11} a_1^2 a_1^2 + \delta^{12} a_1^2 a_2^2 + \delta^{21} a_2^2 a_1^2 + \delta^{22} a_2^2 a_2^2 \\ &= a_1^2 a_1^2 + a_2^2 a_2^2 = 16 + 9 = 25,\end{aligned}$$

luego las coordenadas del tensor contravariante de Kronecker, respecto de la nueva base, son $(5, -5, -5, 25)$.

332. Sean $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*\}$ y $\{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*\}$ las bases duales de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, respectivamente. Se verificará:

$$\mathbf{u}_1^* = b_1^1 \mathbf{v}_1^* + b_2^1 \mathbf{v}_2^*, \quad \mathbf{u}_2^* = b_1^2 \mathbf{v}_1^* + b_2^2 \mathbf{v}_2^*,$$

y de

$$\begin{cases} 1 = \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1 = (b_1^1 \mathbf{v}_1^* + b_2^1 \mathbf{v}_2^*) (2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2) = 2b_1^1 - 4b_2^1 \\ 0 = \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 = (b_1^1 \mathbf{v}_1^* + b_2^1 \mathbf{v}_2^*) (\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) = b_1^1 + 3b_2^1 \\ 0 = \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_1 = (b_1^2 \mathbf{v}_1^* + b_2^2 \mathbf{v}_2^*) (2\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2) = 2b_1^2 - 4b_2^2 \\ 1 = \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2 = (b_1^2 \mathbf{v}_1^* + b_2^2 \mathbf{v}_2^*) (\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2) = b_1^2 + 3b_2^2 \end{cases}$$

se deduce que

$$b_1^1 = \frac{3}{10}, \quad b_2^1 = -\frac{1}{10}, \quad b_1^2 = \frac{2}{5}, \quad b_2^2 = \frac{1}{5},$$

luego

$$\begin{aligned}\delta_{11}^1 &= \delta_1^1 a_1^1 b_1^1 + \delta_2^1 a_1^1 b_2^1 + \delta_1^2 a_2^1 b_1^1 + \delta_2^2 a_2^1 b_2^1 \\ &= a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{12}^1 &= \delta_1^1 a_1^1 b_2^1 + \delta_2^1 a_1^1 b_2^2 + \delta_1^2 a_2^1 b_2^1 + \delta_2^2 a_2^1 b_2^2 \\ &= a_1^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_1^2 &= \delta_1^1 a_1^2 b_1^1 + \delta_1^2 a_2^2 b_1^2 + \delta_2^2 a_2^2 b_1^2 + \delta_2^1 a_1^2 b_1^2 \\ &= a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_2^2 &= \delta_1^1 a_1^2 b_2^1 + \delta_2^1 a_1^2 b_2^2 + \delta_1^2 a_2^2 b_2^1 + \delta_2^2 a_2^2 b_2^2 \\ &= a_1^2 b_2^1 + a_2^2 b_2^2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.\end{aligned}$$

333. Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior, las fórmulas (106) proporcionan:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \delta_{11} b_1^1 b_1^1 + \delta_{12} b_1^1 b_1^2 + \delta_{21} b_1^2 b_1^1 + \delta_{22} b_1^2 b_1^2 \\ &= b_1^1 b_1^1 + b_1^2 b_1^2 = \frac{9}{100} + \frac{4}{25} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ \delta_{12} &= \delta_{11} b_1^1 b_2^1 + \delta_{12} b_1^1 b_2^2 + \delta_{21} b_1^2 b_2^1 + \delta_{22} b_1^2 b_2^2 \\ &= b_1^1 b_2^1 + b_1^2 b_2^2 = -\frac{3}{100} + \frac{2}{25} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \\ \delta_{21} &= \delta_{11} b_2^1 b_1^1 + \delta_{12} b_2^1 b_1^2 + \delta_{21} b_2^2 b_1^1 + \delta_{22} b_2^2 b_1^2 \\ &= b_2^1 b_1^1 + b_2^2 b_1^2 = -\frac{3}{100} + \frac{2}{25} = \frac{1}{20} \\ \delta_{22} &= \delta_{11} b_2^1 b_2^1 + \delta_{12} b_2^1 b_2^2 + \delta_{21} b_2^2 b_2^1 + \delta_{22} b_2^2 b_2^2 \\ &= b_2^1 b_2^1 + b_2^2 b_2^2 = \frac{1}{100} + \frac{1}{25} = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

334. Teniendo en cuenta los resultados de los ejercicios anteriores y las fórmulas (106) se obtiene, llamando s_k^{ij} a las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned}s_1^{11} &= t_1^{11} a_1^1 a_1^1 b_1^1 + t_2^{11} a_1^1 a_1^1 b_1^2 + t_1^{12} a_1^1 a_2^1 b_1^1 + t_2^{12} a_1^1 a_2^1 b_1^2 + t_1^{21} a_2^1 a_1^1 b_1^1 \\ &\quad + t_2^{21} a_2^1 a_1^1 b_1^2 + t_1^{22} a_2^1 a_2^1 b_1^1 + t_2^{22} a_2^1 a_2^1 b_1^2 = a_1^1 a_1^1 b_1^1 + a_1^1 a_2^1 b_1^1 \\ &\quad + a_2^1 a_1^1 b_1^2 + a_2^1 a_2^1 b_1^2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{22}{5} \\ s_2^{11} &= t_1^{11} a_1^1 a_1^1 b_2^1 + t_2^{11} a_1^1 a_1^1 b_2^2 + t_1^{12} a_1^1 a_2^1 b_2^1 + t_2^{12} a_1^1 a_2^1 b_2^2 + t_1^{21} a_2^1 a_1^1 b_2^1 \\ &\quad + t_2^{21} a_2^1 a_1^1 b_2^2 + t_1^{22} a_2^1 a_2^1 b_2^1 + t_2^{22} a_2^1 a_2^1 b_2^2 = a_1^1 a_1^1 b_2^1 + a_1^1 a_2^1 b_2^1 + a_2^1 a_1^1 b_2^2 \\ &\quad + a_2^1 a_2^1 b_2^2 = 2 \cdot 2 \left(-\frac{1}{10}\right) + 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \text{ etc.}\end{aligned}$$

$$335. \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2).$$

336. a) Si $\sigma_1 = (1, 2)$, $\sigma_2 = (2, 1)$, se verifica que

$$\begin{aligned}\sigma_1[5(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - 5(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1)] &= 5(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - 5(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) \text{ y } \sigma_2[5(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - 5(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1)] \\ &= 5\sigma_2(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - 5\sigma_2(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) = 5(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) - 5(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) = (-1)^1 [5(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) \\ &\quad - 5(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1)] = i(\sigma_2)[5(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - 5(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1)], \text{ luego el tensor de } \alpha \text{ es alternado.}\end{aligned}$$

b) Sea $\sigma_1 = (1, 2, 3)$, $\sigma_2 = (2, 3, 1)$, $\sigma_3 = (3, 1, 2)$, $\sigma_4 = (2, 1, 3)$, $\sigma_5 = (1, 3, 2)$, $\sigma_6 = (3, 2, 1)$. Sea, por ejemplo,

$$\sigma_2 [2(u_1 \otimes u_2) + 4(u_1 \otimes u_3) - 2(u_2 \otimes u_1) - 4(u_1 \otimes u_3)] = 2(u_2 \otimes u_3) + 4(u_2 \otimes u_1) - 2(u_3 \otimes u_2) - 4(u_2 \otimes u_3), \text{ luego el tensor no es alternado.}$$

c) Si σ_i tiene el mismo significado que en b), sea, por ejemplo,

$$\sigma_1 [(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) + (u_2 \otimes u_3 \otimes u_1) + (u_3 \otimes u_1 \otimes u_2)] - \sigma_2 [(u_2 \otimes u_1 \otimes u_3) + (u_1 \otimes u_3 \otimes u_2) + (u_3 \otimes u_2 \otimes u_1)] = (u_2 \otimes u_3 \otimes u_1) + (u_3 \otimes u_1 \otimes u_2) + (u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) - (u_2 \otimes u_1 \otimes u_3) - (u_1 \otimes u_3 \otimes u_2) = i(\sigma_1) [(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) + \dots - (u_3 \otimes u_2 \otimes u_1)]$$

análogamente se comprueba para $\sigma_3, \dots, \sigma_6$, luego este tensor es hemisimétrico.

337. Como las únicas permutaciones con dos elementos son $\sigma_1 = (1, 2)$ y $\sigma_2 = (2, 1)$, el tensor $\sigma_1 [(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)] + i(\sigma_2) \sigma_2 [(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)]$ es tal que mediante la permutación unidad σ_1 se transforma evidentemente en sí mismo, y mediante σ_2 se transforma en

$$\sigma_2 [(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)] + i(\sigma_2) \sigma_1 [(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)] = i(\sigma_2) [\sigma_1 [(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)] + i(\sigma_2) \sigma_2 [(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2)]],$$

luego el tensor

$$(u_1 \otimes u_1) + 2(u_1 \otimes u_2) + i(\sigma_2) \sigma_2 (u_1 \otimes u_1) + i(\sigma_2) 2 \sigma_2 (u_1 \otimes u_2) = (u_1 \otimes u_1) + (u_1 \otimes u_2) - (u_2 \otimes u_1) - 2(u_2 \otimes u_2) \text{ es alternado.}$$

338. El tensor $\mathbf{x} = \sigma_1 (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) + i(\sigma_2) \sigma_2 (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) + i(\sigma_3) \sigma_3 (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) + i(\sigma_4) \sigma_4 (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) + i(\sigma_5) \sigma_5 (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) + i(\sigma_6) \sigma_6 (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2)$, siendo $\sigma_1 = (1, 2, 3)$, $\sigma_2 = (2, 3, 1)$, $\sigma_3 = (3, 1, 2)$, $\sigma_4 = (2, 1, 3)$, $\sigma_5 = (1, 3, 2)$, $\sigma_6 = (3, 2, 1)$, es un tensor alternado. Si σ es una permutación par, $i(\sigma)$ es positivo y el producto de σ por σ_1 es de la misma paridad que σ_1 , luego $i(\sigma \sigma_1) = i(\sigma_1) \cdot i(\sigma)$, y si σ es impar se verifica también que $i(\sigma \sigma_1) = i(\sigma) \cdot i(\sigma_1)$, luego en cualquier caso es $\sigma(\mathbf{x}) = i(\sigma) \mathbf{x}$. Vamos a comprobarlo, por ejemplo, para $\sigma = \sigma_6$. Se calcula en primer lugar $\sigma_6 \sigma_1 = \sigma_6$, $\sigma_6 \sigma_2 = (2, 1, 3) \sigma_4$, $\sigma_6 \sigma_3 = (1, 3, 2) = \sigma_5$, $\sigma_6 \sigma_4 = (2, 3, 1) = \sigma_2$, $\sigma_6 \sigma_5 = (3, 1, 2) = \sigma_3$, $\sigma_6 \sigma_6 = \sigma_1$, y se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_6(\mathbf{x}) &= [\sigma_6 \sigma_1 + i(\sigma_2) \sigma_6 \sigma_2 + i(\sigma_3) \sigma_6 \sigma_3 + i(\sigma_4) \sigma_6 \sigma_4 + i(\sigma_5) \sigma_6 \sigma_5 + i(\sigma_6) \sigma_6 \sigma_6] (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) \\ &= [\sigma_6 + i(\sigma_2) \sigma_4 + i(\sigma_3) \sigma_5 + i(\sigma_4) \sigma_2 + i(\sigma_5) \sigma_3 + i(\sigma_6) \sigma_1] (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) \\ &= i(\sigma_6) [i(\sigma_6) \sigma_6 + i(\sigma_2) \cdot i(\sigma_6) \sigma_4 + i(\sigma_3) \cdot i(\sigma_6) \sigma_5 + i(\sigma_4) \cdot i(\sigma_6) \sigma_2 + i(\sigma_5) \cdot i(\sigma_6) \sigma_3 \\ &\quad + i(\sigma_6) \cdot i(\sigma_6) \sigma_1] (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2), \end{aligned}$$

pero teniendo en cuenta que $i(\sigma_i \sigma_j) = i(\sigma_i) i(\sigma_j)$, puesto que el producto de dos permutaciones de la misma clase es una permutación par y el producto de dos permutaciones de distinta clase es una permutación impar, resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_6(\mathbf{x}) &= i(\sigma_6) \{ [i(\sigma_6) \sigma_6 + i(\sigma_4) \sigma_4 + i(\sigma_5) \sigma_5 + i(\sigma_2) \sigma_2 \\ &\quad + i(\sigma_3) \sigma_3 + i(\sigma_1) \sigma_1] (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2) \end{aligned}$$

luego como lo mismo se puede repetir para las restantes permutaciones, es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \\ & - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1, \end{aligned}$$

un tensor alternado.

339. El mismo razonamiento que en el ejercicio anterior prueba que el tensor

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \\ & - \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1, \end{aligned}$$

es alternado.

340. El mismo razonamiento de los ejercicios precedentes prueba que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3, \\ & - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3 = 0 \end{aligned}$$

es un tensor alternado.

341. En efecto, los bivectores son de la forma

$$\begin{aligned} \sum a_i (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i) + \ker(A), \text{ pero si } \mathbf{x}_i = m_1^i \mathbf{u}_1 + m_2^i \mathbf{u}_2 + m_3^i \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{y}_i = n_1^i \mathbf{u}_1 + n_2^i \mathbf{u}_2 + n_3^i \mathbf{u}_3, \end{aligned}$$

se verifica que

$$\begin{aligned} \sum a_i (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i) + \ker(A) &= \sum a_i [m_1^i n_1^i (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + m_1^i n_2^i (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + \dots] + \ker(A) \\ &= [\sum a_i (m_1^i n_2^i)] (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + [\sum a_i (m_2^i n_1^i)] (\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) + \dots + \ker(A) \\ &= [\sum a_i (m_1^i n_2^i)] (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + [\sum a_i (m_2^i n_1^i)] (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1) + \dots \end{aligned}$$

Ahora bien, $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \in \ker(A)$, ya que $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, 8} = \{(1, 2) \sigma_i\}_{i=1, \dots, 8}$ e $i(\sigma_i) = -i(1, 2) \sigma_i$, luego

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) &= A(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + (1, 2)(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) = \sum_i i(\sigma_i) \sigma_i [\mathbf{u}_1 \otimes \\ &\mathbf{u}_2 + (1, 2)(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2)] = \sum_i i(\sigma_i) \sigma_i (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + \sum_i i(\sigma_i) \sigma_i [(1, 2)(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2)] \\ &= \sum_i i(\sigma_i) \sigma_i (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - \sum_i i((1, 2) \sigma_i) ((1, 2) \sigma_i) (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \ker(A) = -(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) + \ker(A), \text{ esto es, } \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = -(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1),$$

luego

$$\sum a_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{y}_i) = \sum a_i (m_1^i n_2^i - m_2^i n_1^i) (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + \dots$$

342. La proposición es equivalente a

$$A (\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 - i(\sigma) (\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(2)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(3)})) = 0.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} A [\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 - i(\sigma) (\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(2)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(3)})] &= \sum_i [i(\sigma_i) \sigma_i (\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) \\ &- i(\sigma_i) i(\sigma) \sigma_i (\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(2)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(3)})] = \sum_i i(\sigma_i) \sigma_i (\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3) \\ &- \sum_i i(\sigma_i \sigma) (\sigma_i \sigma) (\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3), \end{aligned}$$

y como el endomorfismo $\sum_i i(\sigma_i) \sigma_i$ es igual al endomorfismo $\sum_i i(\sigma_i \sigma) (\sigma_i \sigma)$, resulta

que

$$A [\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 - i(\sigma) (\mathbf{x}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(2)} \otimes \mathbf{x}_{\sigma(3)})] = 0.$$

343. En 341 se ha probado que $B' = \{ \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \}$ es un sistema de generadores de $V^{\wedge 2}$. Vamos a ver que los vectores de B' son linealmente independientes. En efecto, de

$$a(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + b(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3) + c(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) = 0,$$

se deduce que

$$A[a(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + b(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_3) + c(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3)] = 0,$$

esto es:

$a[(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1)] + b[(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_3) - (\mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_1)] + c[(\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3) - (\mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_2)] = 0$
y como $(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j)$, $i, j = 1, 2, 3$ son linealmente independientes, resulta $a = b = c = 0$. Por consiguiente, $\dim(V^{\wedge 2}) = 3$.

344. Un trivector arbitrario de $V^{\wedge 3}$ es de la forma:

$$\sum_i a_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{y}_i \wedge \mathbf{z}_i) = \sum_i a_i (\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_i \otimes \mathbf{z}_i) + \ker(A).$$

Si $\mathbf{x}_i = x_{i1} \mathbf{u}_1 + x_{i2} \mathbf{u}_2 + x_{i3} \mathbf{u}_3$, $\mathbf{y}_i = y_{i1} \mathbf{u}_1 + y_{i2} \mathbf{u}_2 + y_{i3} \mathbf{u}_3$, $\mathbf{z}_i = z_{i1} \mathbf{u}_1 + z_{i2} \mathbf{u}_2 + z_{i3} \mathbf{u}_3$, será:

$$\begin{aligned} \sum_i a_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{y}_i \wedge \mathbf{z}_i) &= \left(\sum_i a_i x_{i1} y_{i1} z_{i1} \right) (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \left(\sum_i a_i x_{i1} y_{i1} z_{i2} \right) \\ &(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2) + \dots + \ker(A). \end{aligned}$$

Ahora bien, en virtud del ejercicio 342 se verifica que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = 0$, ya que si $\sigma = (213)$, se verifica que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - i(\sigma) (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$, y como $i(\sigma) = -1$, se

obtiene $2(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$, de donde $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = 0$. Por consiguiente, en el segundo miembro de la igualdad anterior son cero todos los términos en los que figuran dos o más factores iguales en el producto tensorial, luego teniendo en cuenta la relación del ejercicio 342, resulta:

$$\sum_i a_i (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{y}_i \wedge \mathbf{z}_i) = \left[\sum_i a_i (x_{i1} y_{i2} z_{i3} + x_{i2} y_{i3} z_{i1} + x_{i3} y_{i1} z_{i2} - x_{i2} y_{i1} z_{i3} - x_{i1} y_{i3} z_{i2} - x_{i3} y_{i2} z_{i1}) \right] (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3),$$

luego $\{\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3\}$ es un sistema de generadores de $V^{\wedge 3}$. Ahora bien, se verifica que $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \neq 0$. En efecto, si fuese $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = 0$, sería $A(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3) = 0$, de donde $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_3) - (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) = 0$, contradicción, ya que todos estos vectores pertenecen a la base de $V^{\otimes 3}$.

Por consiguiente, $\dim(V^{\wedge 3}) = 1$.

345. Teniendo en cuenta las propiedades I, II y IV de 75, resulta:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x'_1 \mathbf{v}_1 + x'_2 \mathbf{v}_2 + x'_3 \mathbf{v}_3) \wedge (y'_1 \mathbf{v}_1 + y'_2 \mathbf{v}_2 + y'_3 \mathbf{v}_3) = (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1) (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + (x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2) (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) + (x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3) (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1).$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3) \wedge (y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + y_3 \mathbf{u}_3) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) (\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1).$$

Ahora bien:

$$\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = (2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3 \mathbf{v}_3) = (2 + 1) (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + (-3 - 1) (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1) + (1 - 6) (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1) = 3 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) - 4 (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) - 5 (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1).$$

$$\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3 \mathbf{v}_3) \wedge (-\mathbf{v}_1 + 5 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = (5 + 1) (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + (-1 - 15) (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) + (-3 + 1) (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1) = 6 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) - 16 (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) - 2 (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1),$$

$$\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1 = (-\mathbf{v}_1 + 5 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \wedge (2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (1 - 10) (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + (5 - 1) (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) + (-2 + 1) (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1) = -9 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + 4 (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1),$$

de donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) [3 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) - 4 (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) - 5 (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1)] + (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ &\quad [6 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) - 16 (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) - 2 (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1)] + (x_3 y_1 - x_1 y_3) [-9 (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \\ &\quad + 4 (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) - (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1)] \\ &= [3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + 6 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - 9 (x_3 y_1 - x_1 y_3)] (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \\ &\quad + [-4 (x_1 y_2 - x_2 y_1) - 16 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + 4 (x_3 y_1 - x_1 y_3)] (\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) \\ &\quad + [-5 (x_1 y_2 - x_2 y_1) - 2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_3 y_1 - x_1 y_3)] (\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{cases} x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 = 3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + 6 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - 9 (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2 = -4 (x_1 y_2 - x_2 y_1) - 16 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + 4 (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3 = -5 (x_1 y_2 - x_2 y_1) - 2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_3 y_1 - x_1 y_3). \end{cases}$$

346.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) &= \pi i n(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \pi i [n(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y})] = \pi i ((\mathbf{x} + \mathbf{x}') \otimes \mathbf{y}) = \pi i (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}' \otimes \mathbf{y}) \\ &= \pi i (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) + \pi i (\mathbf{x}' \otimes \mathbf{y}) = \pi i n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \pi i n(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}') &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}'). \quad \varphi(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi i n(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi i [(a\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y}] \\ &= \pi i [a(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})] = a[\pi i n(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = a\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

347. Sea σ una permutación arbitraria de los números $(1, 2, \dots, r)$, y sea σ^* la permutación de los números $(1, \dots, r, r+1, \dots, r+s)$ tal que $\sigma^*(1, \dots, r, r+1, \dots, r+s) = (\sigma(1) \dots, \sigma(r), r+1, \dots, r+s)$. Se verifica que

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{y}} \sigma(\mathbf{x}) &= \varphi_{\mathbf{y}} [\sigma(\mathbf{x})] = \pi i n(\sigma(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \pi i (\sigma(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y}) \\ &= \pi i [\sigma^*(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})] = \sigma^*(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) + \ker(A) = i(\sigma^*)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) + \ker(A) \\ &= i(\sigma^*)[\pi i n(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = i(\sigma^*)\pi i n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i(\sigma^*)\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = i(\sigma)\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

348.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) \wedge (y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)(u_1 \wedge u_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)(u_2 \wedge u_3) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)(u_3 \wedge u_1). \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = [(x_1 y_2 - x_2 y_1)(u_1 \wedge u_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)(u_2 \wedge u_3) \\ &\quad + (x_3 y_1 - x_1 y_3)(u_3 \wedge u_1)] \wedge (z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)z_1(u_2 \wedge u_3 \wedge u_1) \\ &\quad + (x_3 y_1 - x_1 y_3)z_2(u_3 \wedge u_1 \wedge u_2) \\ &= [(x_2 y_3 - x_3 y_2)z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3](u_1 \wedge u_2 \wedge u_3).\end{aligned}$$

349.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(u_1 \wedge u_2) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(u_1 \wedge u_3) + (a_1 b_4 - a_4 b_1)(u_1 \wedge u_4) \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(u_2 \wedge u_3) + (a_2 b_4 - a_4 b_2)(u_2 \wedge u_4) + (a_3 b_4 - a_4 b_3)(u_3 \wedge u_4). \\ \mathbf{y} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} &= (c_1 d_2 - c_2 d_1)(u_1 \wedge u_2) + (c_1 d_3 - c_3 d_1)(u_1 \wedge u_3) + (c_1 d_4 - c_4 d_1)(u_1 \wedge u_4) \\ &\quad + (c_2 d_3 - c_3 d_2)(u_2 \wedge u_3) + (c_2 d_4 - c_4 d_2)(u_2 \wedge u_4) + (c_3 d_4 - c_4 d_3)(u_3 \wedge u_4). \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_3 d_4 - c_4 d_3)(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(c_2 d_4 - c_4 d_2) \\ &\quad (u_1 \wedge u_3 \wedge u_2 \wedge u_4) + (a_1 b_4 - a_4 b_1)(c_2 d_3 - c_3 d_2)(u_1 \wedge u_4 \wedge u_2 \wedge u_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ &\quad (c_1 d_4 - c_4 d_1)(u_2 \wedge u_3 \wedge u_1 \wedge u_4) + (a_2 b_4 - a_4 b_2)(c_1 d_3 - c_3 d_1)(u_2 \wedge u_4 \wedge u_1 \wedge u_3) \\ &\quad + (a_3 b_4 - a_4 b_3)(c_1 d_2 - c_2 d_1)(u_3 \wedge u_4 \wedge u_1 \wedge u_2) = [(a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_3 d_4 - c_4 d_3) - (a_1 \\ &\quad b_3 - a_3 b_1)(c_2 d_4 - c_4 d_2) + (a_1 b_4 - a_4 b_1)(c_2 d_3 - c_3 d_2) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(c_1 d_4 - c_4 d_1) \\ &\quad - (a_2 b_4 - a_4 b_2)(c_1 d_3 - c_3 d_1) + (a_3 b_4 - a_4 b_3)(c_1 d_2 - c_2 d_1)](u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4).\end{aligned}$$

350. Una base de L es la formada por los vectores $\mathbf{a} = (1, 3, 2, 4)$, y $\mathbf{b} = (-1, -2, 5, 8)$, luego si la base del espacio vectorial es $B\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, uno de los bivectores será:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 + 4\mathbf{u}_4) \wedge (-\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3 + 3\mathbf{u}_4) = (-2 + 3)(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + (5 \\ &+ 2)(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3) + (3 + 4)(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_4) + (15 + 4)(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) \\ &+ (9 + 8)(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4) + (6 - 20)(\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4) = (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + 7(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3) + 7(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_4) + 19(\mathbf{u}_2 \\ &\wedge \mathbf{u}_3) + 17(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_4) - 14(\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4), \end{aligned}$$

luego la recta de bivectores correspondiente a L es

$$\lambda (1, 7, 7, 19, 17, -14).$$

351. a) Una matriz de primer orden (a) da lugar al vector $a\mathbf{u}$, luego $|a| = a$.

b) Sea la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y sea $\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2$, $\mathbf{a}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2$, será:

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = a_{11}a_{22}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + a_{12}a_{22}(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1) = [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}](\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2),$$

luego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

c) Sea la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + a_{13}\mathbf{u}_3$,

$$\mathbf{a}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{23}\mathbf{u}_3; \quad \mathbf{a}_3 = a_{31}\mathbf{u}_1 + a_{32}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3$$

de donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 &= a_{11}a_{22}a_{33}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) + a_{11}a_{23}a_{32}(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_2) \\ &+ a_{12}a_{21}a_{33}(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3) + a_{12}a_{23}a_{31}(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1) \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32}(\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) + a_{13}a_{22}a_{31}(\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1) \\ &= [a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31}](\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3), \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

De la expresión anterior se obtiene la siguiente regla pneumotécnica para el determinante de una matriz de tercer orden: los términos con signo + corresponden a los produc-

354. Del ejercicio anterior resulta:

$$|A| = a_{11} \frac{A_{22}}{a_{11}} - \frac{A_{22} A_{33} - A_{32} A_{23}}{a_{11} A_{33}}.$$

355. En efecto:

$$(\phi a_1) \wedge \dots \wedge (\phi a_n) = \phi^n (a_1 \wedge \dots \wedge a_n).$$

356. De $|A| = |A'|$ y de $-A = (-1)^n A$ se deduce, por el ejercicio anterior, que

$$|A| = |A'| = |(-1)^n A| = (-1)^n |A|,$$

siendo n el orden de la matriz, luego si n es impar, será $|A| = -|A|$, de donde $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = a_{12}^2 a_{34}^2 + a_{13}^2 a_{24}^2 + a_{14}^2 a_{23}^2.$$

357. Tomemos $i_1 = 2, i_2 = 4$:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = |2, 1; 4, 2| \text{Adj} |2, 1; 4, 2| + |2, 1; 4, 3| \text{Adj} |2, 1; 4, 3| \\ & + |2, 1; 4, 4| \text{Adj} |2, 1; 4, 4| + |2, 1; 4, 5| \text{Adj} |2, 1; 4, 5| \\ & + |2, 2; 4, 3| \text{Adj} |2, 2; 4, 3| + |2, 2; 4, 4| \text{Adj} |2, 2; 4, 4| \\ & + |2, 2; 4, 5| \text{Adj} |2, 2; 4, 5| + |2, 3; 4, 4| \text{Adj} |2, 3; 4, 4| \\ & + |2, 3; 4, 5| \text{Adj} |2, 3; 4, 5| + |2, 4; 4, 5| \text{Adj} |2, 4; 4, 5|. \\ & = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{25} \\ a_{41} & a_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

§ 2. MATRICES. CÁLCULO CON MATRICES

358. Si, puesto que $5^2 - 4^2 = (5+4)(5-4)$, $4 + 12 + 9 = (2+3)^2 = 5^2$, $-\frac{6}{3} = -2$,
 $(2-1)(2+1) = 2^2 - 1$.

359.

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2.$$

360.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

361. La adición definida en la definición 2 es uniforme. Para demostrar la asociatividad emplearemos el elemento general de la matriz:

$$\begin{aligned} 1) \quad [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}]) \\ &= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})]. \end{aligned}$$

$$2) \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}).$$

3) Si O es la matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}$ cuyos elementos son todos cero, se verifica que:

$$(a_{ij}) + O = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}),$$

cualquiera que sea la matriz (a_{ij}) .

4) Dada la matriz (a_{ij}) , se verifica que

$$(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = O,$$

luego toda matriz (a_{ij}) posee opuesta, $-(a_{ij})$, y se verifica que

$$-(a_{ij}) = (-a_{ij}).$$

362.

$$4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{4} & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$363. \text{ I. } p[(a_{ij}) + (b_{ij})] = p(a_{ij} + b_{ij}) = (p[a_{ij} + b_{ij}]) = (p a_{ij} + p b_{ij}) = (p a_{ij}) + (p b_{ij}) = p(a_{ij}) + p(b_{ij}).$$

$$\text{II. } [p+q](a_{ij}) = ([p+q] a_{ij}) = (p a_{ij} + q a_{ij}) = (p a_{ij}) + (q a_{ij}) = p(a_{ij}) + q(a_{ij}).$$

$$\text{III. } [p q](a_{ij}) = ([p q] a_{ij}) = (p [q a_{ij}]) = p(q a_{ij}) = p[q(a_{ij})].$$

$$\text{IV. } 1(a_{ij}) = (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij}).$$

$$364. \quad o A = o(a_{ij}) = (o \cdot a_{ij}) = (o) = 0.$$

$$A + (-1)A = 1 \cdot A + (-1)A = (1-1)A = o A = O.$$

365. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ una matriz arbitraria de $\mathfrak{M}_{2 \times 3}$. De las definiciones 1 y 2

se deduce:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo que prueba que el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema de generadores de $\mathfrak{M}_{2 \times 3}$. Para probar que es una base hay que ver que son linealmente independientes. En efecto, supongamos que

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sería: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ de donde } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \\ &= \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \text{ luego } B \text{ es una base.} \end{aligned}$$

366. $\dim(\mathfrak{M}_{n \times m}) = nm$.

$$\begin{aligned} 367. \text{ I. } &\left[(a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}, \ a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) c_{11} + (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) c_{21} = a_{11} (b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21}) + a_{12} (b_{21} c_{11} + b_{22} c_{21}) \\ &= (a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21} \\ b_{21} c_{11} + b_{22} c_{21} \end{pmatrix} = (a_{11} \ a_{12}) \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } &(a_{11} \ a_{12}) \left[\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \right] = (a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} \\ b_{21} + c_{21} \end{pmatrix} = a_{11} (b_{11} + c_{11}) + a_{12} (b_{21} + c_{21}) \\ &= (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) + (a_{11} c_{11} + a_{12} c_{21}) = (a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + (a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } &\begin{bmatrix} p \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \end{bmatrix} (b_{11} \ b_{12}) = \begin{pmatrix} p a_{11} \\ p a_{21} \end{pmatrix} (b_{11} \ b_{12}) = \begin{pmatrix} p a_{11} b_{11} & p a_{11} b_{12} \\ p a_{21} b_{11} & p a_{21} b_{12} \end{pmatrix} \\ &= p \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} \end{pmatrix} = p \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} (b_{11} \ b_{12}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ n & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

368.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (\neq) & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (\neq) & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$O = A O = A (B - B) = A B + A (-B)$, de donde $A (-B) = -A B$

369.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$370. (a_1 a_2 a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (a_1 a_2 a_3) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{pmatrix}$$

371.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 29 & -30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 6 & -3 & 3 \\ 8 & -22 & -26 \end{pmatrix}$$

372.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$373. (3, 2, 1) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix} = (3x + 4y + z, -x + 2y + 6z, 5x - 3y - 7z),$$

de donde:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + z &= 3 \\ -x + 2y + 6z &= 2, \\ 5x - 3y - 7z &= 1. \end{aligned}$$

$$374. (1, x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{21}x + a_{31}y, a_{12} + a_{22}x + a_{32}y, a_{13} + a_{23}x + a_{33}y) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \\ = a_{11} + a_{21}x + a_{31}y + (a_{12} + a_{22}x + a_{32}y)x + (a_{13} + a_{23}x + a_{33}y)y = a_{11} \\ + (a_{12} + a_{21})x + (a_{13} + a_{31})y + a_{22}x^2 + (a_{23} + a_{32})xy + a_{33}y^2 = 0.$$

$$375. \text{ a) } (x, y) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = (4, 2, 7). \text{ b) } (x, y, z, t) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, -2, 4).$$

$$376. \text{ a) } (x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0). \text{ b) } (1, x, y, z, t) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= (0, 0, 0); \text{ c) } (1, x, y) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (x', y', z').$$

377.

$$\text{a) } (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (0, \dots, 0); \text{ b) } (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (c_1, \dots, c_m);$$

$$\text{c) } (1, x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} -c_1 & \dots & -c_m \\ a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (0, \dots, 0);$$

$$\text{d) } (1, x'_1, \dots, x'_n) = (1, x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

378.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & | & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & | & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

379.

$$\left(\begin{array}{c|c} t_0 a_{11} + (t_1 t_2) \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} & t_0 (a_{12} \ a_{13}) + (t_1 t_2) \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

380. Poniendo $O = (0, 0)$, $O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$, $a = (a_{12} \ a_{13})$, $a' = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$,
 $A = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, resulta:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & w_{11} & w_{12} \\ 0 & w_{21} & w_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a \\ \Omega & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \Omega & A \end{pmatrix}$$

381. Poniendo $t = (t_1, t_2)$, $t' = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = (0, 0)$, $O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J = (a_{12} \ a_{13})$,
 $a' = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, resulta:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|cc} t_0 & t_1 & t_2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} t_0 & 0 & 0 \\ \hline t_1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} t_0 & t \\ t' & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a \\ a' & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ t' & I \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} t_0 a_{11} + t a' & t_0 a + t A \\ a' & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ t' & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^2 a_{11} + t_0 t a' + t_0 a t' + t A t' & t_0 a + t A \\ a' t_0 + A t' & A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

382.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

383. I.

$$\left[\left(\begin{array}{c} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{array} \right)' \right]' = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

II.

$$\begin{aligned} & \left[\left(\begin{array}{c} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} b_{11} \dots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{m1} \dots b_{mn} \end{array} \right) \right]' = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}' \\ & = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \dots a_{m1} + b_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} + b_{1n} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{m1} \\ \vdots \\ b_{1n} \dots b_{mn} \end{pmatrix}' \\ & = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{m1} \dots b_{mn} \end{pmatrix}'. \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \right]' &= \begin{pmatrix} p a_{11} & \dots & p a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ p a_{n1} & \dots & p a_{nm} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p a_{11} & \dots & p a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ p a_{1m} & \dots & p a_{nm} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \\ &= p \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}'. \end{aligned}$$

384.

$$\begin{aligned} \left[(a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right]' &= (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}, a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22})' = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \\ a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}' (a_{11} \ a_{12})'. \end{aligned}$$

385. Si A es simétrica y de dimensión $m \times n$, A' es de dimensión $n \times m$, luego al ser iguales es $m = n$. Análogamente en el caso de matrices hemisimétricas.

386. De $A' = -A$ se deduce que $a_{ij} = -a_{ji}$, luego $a_{ii} = -a_{ii}$, de donde $a_{ii} = 0$.

387. $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 1$. $\tau\sigma(1) = \tau(3) = 5, \tau\sigma(2) = \tau(4) = 3, \tau\sigma(3) = \tau(2) = 1, \tau\sigma(4) = \tau(5) = 4, \tau\sigma(5) = \tau(1) = 2$.

388. Sean $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ y ϵ_4 los números de inversiones de $\sigma, \tau, \tau\sigma$ y $\sigma\tau$, respectivamente. Se verifica que $\epsilon_1 = 6, \epsilon_2 = 3, \tau\sigma = (5\ 3\ 1\ 4\ 2), \sigma\tau(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = \sigma(2\ 1\ 5\ 3\ 4) = (4\ 3\ 1\ 2\ 5)$, luego $\epsilon_3 = 7, \epsilon_4 = 5$.

389. $\sigma_2\sigma_1 = (345621), \sigma_3\sigma_1 = (234516), \sigma_4\sigma_2 = (642531), \sigma_4\sigma_3 = (315642)$, luego $i(\sigma_1) = (-1)^6 = 1, i(\sigma_2) = (-1)^5 = -1, i(\sigma_3) = (-1)^{10} = 1, i(\sigma_4) = (-1)^3 = -1, i(\sigma_2\sigma_1) = (-1)^9 = -1, i(\sigma_3\sigma_1) = (-1)^4 = 1, i(\sigma_4\sigma_2) = (-1)^{12} = 1, i(\sigma_4\sigma_3) = (-1)^7 = -1$.

Obsérvese que $i(\sigma_2\sigma_1) = i(\sigma_2) \cdot i(\sigma_1), i(\sigma_3\sigma_1) = i(\sigma_3) \cdot i(\sigma_1), i(\sigma_4\sigma_2) = i(\sigma_4) \cdot i(\sigma_2), i(\sigma_4\sigma_3) = i(\sigma_4) \cdot i(\sigma_3)$.

$$390. |a_{11}| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = i(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + i(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)}, \text{ siendo } \sigma_1 = (1,$$

$$2), \sigma_2 = (2, 1), \text{ luego } i(\sigma_1) = 1, i(\sigma_2) = -1, \text{ luego } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Sea $\sigma_1 = (1, 2, 3), \sigma_2 = (2, 3, 1), \sigma_3 = (3, 1, 2), \sigma_4 = (2, 1, 3), \sigma_5 = (1, 3, 2), \sigma_6 = (3, 2, 1)$, $i(\sigma_1) = 1, i(\sigma_2) = 1, i(\sigma_3) = 1, i(\sigma_4) = -1, i(\sigma_5) = -1, i(\sigma_6) = -1$.

será:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= i(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + i(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} + i(\sigma_3) a_{1\sigma_3(1)} a_{2\sigma_3(2)} a_{3\sigma_3(3)} \\ &+ i(\sigma_4) a_{1\sigma_4(1)} a_{2\sigma_4(2)} a_{3\sigma_4(3)} + i(\sigma_5) a_{1\sigma_5(1)} a_{2\sigma_5(2)} a_{3\sigma_5(3)} + i(\sigma_6) a_{1\sigma_6(1)} a_{2\sigma_6(2)} a_{3\sigma_6(3)} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned}$$

391. + y —, respectivamente.

$$392. \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = 2(-5) - 4(-3) = -10 + 12 = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 1. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

393.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = i(\sigma_1) a_{\sigma_1(1)} a_{\sigma_2(2)} a_{\sigma_3(3)} + i(\sigma_2) a_{\sigma_2(1)} a_{\sigma_1(2)} a_{\sigma_3(3)} + i(\sigma_3) a_{\sigma_3(1)} a_{\sigma_2(2)} a_{\sigma_1(3)} \\ + i(\sigma_4) a_{\sigma_4(1)} a_{\sigma_3(2)} a_{\sigma_2(3)} + i(\sigma_5) a_{\sigma_5(1)} a_{\sigma_1(2)} a_{\sigma_3(3)} + i(\sigma_6) a_{\sigma_6(1)} a_{\sigma_2(2)} a_{\sigma_3(3)} \\ = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13}.$$

394. En todo término del determinante hay un factor de cada fila y de cada columna.

395.

$$-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = -[a_{31} a_{22} a_{13} + a_{21} a_{12} a_{33} + a_{11} a_{32} a_{23} - a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} \\ - a_{13} a_{21} a_{32}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

396. Si la matriz A tiene dos líneas paralelas iguales al permutarlas no varía la matriz, luego en virtud de III será:

$$|A| = -|A|, \quad 2|A| = 0, \quad |A| = 0.$$

397.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p a_{i1} & \dots & p a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (p a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} = p \sum_{\sigma \in P} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

398.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p a_{11} & \dots & p a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

en virtud de la propiedad IV.

399.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ = \sum_{\sigma \in P} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in P} i(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + p a_{j1} & \dots & a_{in} + p a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p a_{j1} & \dots & p a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

400.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad A_3 = (a_{22}, a_{23}).$$

401. No.

402.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad |a_{23}|.$$

403.

$$\beta_{23} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} \end{vmatrix}, \quad \beta_{42} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{31} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} \end{vmatrix}.$$

$$404. B_{23} = -\beta_{23}, B_{42} = \beta_{42}.$$

$$405. |11; 43| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix}, \quad |23; 34| = \begin{vmatrix} b_{23} & b_{24} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix}.$$

$$406. |11; 43|^* = |22; 34| = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{24} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix}, \quad |23; 34|^* = |11; 42| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix},$$

$$\text{Adj. } |11; 43| = (-1)^{1+1+4+3} |11; 43|^* = - \begin{vmatrix} b_{22} & b_{24} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix},$$

$$\text{Adj. } |23; 34| = (-1)^{2+3+3+4} |23; 34|^* = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}.$$

407.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} = -a_{21} a_{21} + a_{22} a_{22} - a_{23} a_{23} \\ = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

408.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}, \quad \text{luego } A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

409.

$$|B| = |21; 42| \text{Adj } |21; 42| + |21; 43| \text{Adj } |21; 43| + |21; 44| \text{Adj } |21; 44| + \\ |22; 43| \text{Adj } |22; 43| + |22; 44| \text{Adj } |22; 44| + |23; 44| \text{Adj } |23; 44| \\ = - \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{21} & b_{24} \\ b_{41} & b_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{42} & b_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{31} & b_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{24} \\ b_{42} & b_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{23} & b_{24} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}.$$

410.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

411.

$$A - XB + XC = D \Leftrightarrow XC - XB = D - A \Leftrightarrow X(C - B) = D - A \Leftrightarrow \\ X = (D - A)(C - B)^{-1}.$$

412.

$$A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$413. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$+ |A| I = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{11}a_{22} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2\lambda - 1 - 2(1-\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2\lambda - 3 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 3, \quad - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

414.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

415. Multiplicando la última columna por x y sumando a la anterior, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a & b & c & d & e + x(x+f) & x+f \end{vmatrix}$$

Multiplicando la quinta columna por x y sumando a la anterior:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a & b & c & d + ex + fx^2 + x^3 & e + fx + x^2 & f + x \end{vmatrix}$$

siguiendo de análoga forma, resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a & b & c + dx + ex^2 + fx^3 + x^4 & d + ex + fx^2 + x^3 & e + fx + x^2 & f + x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x & -1 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & -1 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ a & b+cx+dx^2+ex^3+fx^4+x^5 & c+dx+ex^2+fx^3+x^4 & & \end{vmatrix} \\
&\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ d+ex+fx^2+x^3 & e+fx+x^2 & f+x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & & -1 & & 0 \\ 0 & & 0 & & -1 \\ 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 \\ a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+x^6 & b+\dots+x^5 & c+\dots+x^4 & & \end{vmatrix} \\
&\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ d+\dots+x^3 & e+fx+x^2 & f+x \end{vmatrix} \\
&= (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+x^6)(-1)^5.
\end{aligned}$$

416. $X = CA^{-1}$.

417. $(x_1, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_n) A^{-1} = (c_1, \dots, c_n) \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{A_{11}c_1 + \dots + A_{1n}c_n}{|A|}, \dots, \frac{A_{n1}c_1 + \dots + A_{nn}c_n}{|A|} \right),$$

de donde:

$$x_1 = \frac{A_{11}c_1 + \dots + A_{1n}c_n}{|A|}, \dots, x_n = \frac{A_{n1}c_1 + \dots + A_{nn}c_n}{|A|}.$$

$$\begin{aligned} 418. (x_1, x_2, x_3) &= (1, -2, 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (1, -2, 3) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= (5, 5, -2), \text{ luego } x_1 = 5, x_2 = 5, x_3 = -2. \end{aligned}$$

§ 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. ELIMINACIÓN LINEAL

$$419. (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3), \quad (x_1, x_2) = (1, 3) \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{13}, \frac{14}{13} \right), \text{ luego}$$

$$x_1 = \frac{11}{13}, \quad x_2 = \frac{14}{13}.$$

$$\begin{aligned} 420. (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} &= (4, 1, 2), \quad (x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 2) \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{3}{7}, -\frac{17}{7}, -\frac{9}{7} \right), \text{ luego } x_1 = \frac{3}{7}, \quad x_2 = -\frac{17}{7}, \quad x_3 = -\frac{9}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 421. (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (2, -1, 4, 1, 5), \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (2, -1, 4, 1, 5) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & +13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, -5, 18, 42, 29) \end{aligned}$$

422. Los menores de segundo orden de A son $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, y los de primer orden son distintos de cero, luego rango (A) = 1.

La matriz B posee el menor de segundo orden $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y no posee menores de tercer orden, luego rango (B) = 2.

Todos los menores de primero y segundo orden de C son cero, luego $\text{rango}(C) = 0$.

La matriz D posee un único menor de tercer orden: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, posee el menor de segundo orden $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, luego $\text{rango}(D) = 2$.

423. No.

424. El rango es m , ya que no puede poseer otro menor de orden superior a m por no tener más que m filas.

425. $r(B) \leq r(A)$. En efecto, todos los menores de B son menores de A .

426.

$$A_1 = (0 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1), \quad 1 \neq 0 \Rightarrow r(A_1) = 1.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A_2) = r(A_1)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(B_2) = 2.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A_3) = 3.$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A_4) = 3,$$

luego $\text{rango}(A) = 3$.

427. $\text{rango}(A) = 3$, $\text{rango}(B) = 4$.

428. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $r(A)$:

$$r(1 \ -1 \ 2 \ -1) = 1, \quad 1 \neq 0$$

$$r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$r(A) = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Cálculo de $r(B)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, \quad \text{luego} \quad r(B) = 3.$$

Por ser $r(A) \neq r(B)$, el sistema no tiene solución.

$$429. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo del rango de A:

$$r(2, 1, -1, 1) = 1, \quad 2 \neq 0.$$

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 (*).$$

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

luego $r(A) = 3$.

Cálculo del rango de B:

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

luego $r(B) = 3 = r(A)$. Tomando el menor (*) de tercer orden no nulo hallado, resulta que el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$$

y éste al sistema

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (-1 - x_4, 2 + x_4, 0),$$

o bien,

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1 - x_4, 2 + x_4, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que puede escribirse en las siguientes formas equivalentes:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x_4, \\ x_3 = -\frac{1}{5}x_4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 4t - \frac{1}{5}, \\ x_3 = t, \\ x_4 = -5t. \end{cases}$$

430.

$$a) \begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} + \frac{20}{3}t, \\ x_2 = 1 + 4t, \\ x_3 = t, \\ x_4 = t. \end{cases} \quad c) \text{ El sistema es incompatible.}$$

431.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 3, \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego el sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = x_4 - x_5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -x_4 + 2x_5, \\ -x_2 = -x_4 - x_5, \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{cases} x_1 = 6\lambda + \mu \\ x_2 = 5\lambda + 5\mu \\ x_3 = -14\lambda + 4\mu \\ x_4 = 5\lambda \\ x_5 = 5\mu. \end{cases}$$

432.

$$a) \begin{cases} x_1 = -16\lambda \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 5\lambda \\ x_4 = 3\lambda \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 = 3\lambda + 5\mu \\ x_2 = -\lambda - \mu \\ x_3 = -\lambda + \mu \\ x_4 = 2\lambda \\ x_5 = 2\mu \end{cases}$$

433. Para que el sistema tenga solución es necesario y suficiente que el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 5 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

sea inferior al número de incógnitas. Como A no posee más que un único menor de tercer orden, la condición de compatibilidad del sistema será:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 5 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

o bien:

$$\lambda(3-\lambda)(\lambda-4) = 0,$$

de donde $\lambda = 0$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$.

Para $\lambda = 0$ se obtiene la solución:

$$x_1 = -\rho, \quad x_2 = -3\rho, \quad x_3 = 4\rho.$$

Para $\lambda = 3$

$$x_1 = 2\rho, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -5\rho.$$

Para $\lambda = 4$:

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = -\rho, \quad x_3 = -4\rho.$$

434.

$$\text{a) } \frac{x_1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{b) } \frac{x_1}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{x_4}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}.$$

435. Basta expresar que

$$(1) \quad r \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & x_1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & x_3 \\ -3 & 6 & -2 & -5 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien:

$$r \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & -2 & -5 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego la igualdad (1) es equivalente a

$$r \begin{pmatrix} -1 & 3 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 3 & -2 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} -1 & 3 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ 3 & -2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

436.

$$r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

luego:

$$r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_5 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

437.

$$r \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Las ecuaciones principales del sistema son:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4x_4 - 2x_5 \\ x_1 - x_3 = -2x_4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{6}x_4 - \frac{5}{6}x_5 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{11}{6}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 5\lambda + 5\mu, \\ x_2 = 4\lambda + 2\mu, \\ x_3 = -11\lambda + 2\mu, \\ x_4 = -6\lambda, \\ x_5 = -6\mu. \end{cases}$$

Por consiguiente, una base de $\underline{U}$ es $\mathbf{v}_1 = (5, 4, -11, -6, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 2, 2, 0, -6)$.

438.

$$r \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Por consiguiente:

$$r \begin{pmatrix} 1 & 3x_1 - x_2 \\ -2 & x_1 \\ 3 & 2x_1 + x_2 \\ -1 & 5x_2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 3x_1 - x_2 \\ -2 & x_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3x_1 - x_2 \\ 3 & 2x_1 + x_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 3x_1 - x_2 \\ -1 & 5x_2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

439.

$$r \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$r \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2x_1 + x_2 \\ 2 & -1 & x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2x_1 + x_2 \\ 2 & -1 & x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & 3x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0,$$

que expresa que para x_1 arbitrario y $x_2 = 0$ el sistema dado tiene solución distinta de la $(0, 0, 0, 0)$.

440.

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{luego} \quad \dim. L = 2.$$

441. De $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, resulta:

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & x_1 + 1 \\ -1 & -2 & x_2 - 2 \\ 1 & 3 & x_3 + 5 \\ 4 & -2 & x_4 - 4 \end{pmatrix} = 2,$$

luego:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x_1 + 1 \\ -1 & -2 & x_2 - 2 \\ 1 & 3 & x_3 + 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & x_1 + 1 \\ -1 & -2 & x_2 - 2 \\ 4 & -2 & x_4 - 4 \end{vmatrix} = 0,$$

o bien:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5 = 0, \\ 10x_1 + 8x_2 - 3x_4 + 6 = 0. \end{cases}$$

442. Como

$$r \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad r \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 3,$$

el sistema dado no tiene solución, luego no representa una variedad lineal afín, a no ser que se admita al conjunto vacío como variedad lineal afín:

$$443. \quad r \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego el sistema dado es equivalente a

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 + 3x_3 - x_4, \\ 2x_1 - x_2 = 2 - x_3 + x_4, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{9} + \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = -\frac{8}{9} + 11\lambda_1 - 7\lambda_2 \\ x_3 = 9\lambda_1, \\ x_4 = 9\lambda_2 \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de L .

$$444. \quad r \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2, \text{ luego } \dim(L) = 2.$$

$$445. \quad r \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -5 & -1 & -9 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -5 & -1 & -9 & -3 \end{pmatrix} = 2,$$

de donde $\dim(L) = 5 - 2 = 3$.

446.

$$r \begin{pmatrix} 3 & -1 & x_1 - 5 \\ 1 & -2 & x_2 - 4 \\ -2 & 4 & x_3 + 1 \\ -1 & 3 & x_4 - 3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & x_1 - 5 \\ 1 & -2 & x_2 - 4 \\ -2 & 4 & x_3 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & x_1 - 5 \\ 1 & -2 & x_2 - 4 \\ -1 & 3 & x_4 - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 - 7 = 0 \\ x_1 - 8x_2 - 5x_4 + 30 = 0 \end{cases}$$

447. De $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, se deduce que el sistema dado es equivalente a los siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_2 = 7 - x_3 \\ x_1 - 8x_2 = -30 + 5x_4 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2 - 4\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ x_2 = \frac{7}{2} - \lambda_1 \\ x_3 = 2\lambda_1 \\ x_4 = \lambda_2 \end{array} \right.$$

448. La variedad lineal del ejercicio 444 es igual a la variedad lineal de la solución del ejercicio 446 y ésta es la misma que la del enunciado del ejercicio 447, que es igual a la de su solución.

449. El sistema L es equivalente a los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 = 1 + x_3 - x_4 + x_5 \\ x_1 - 3x_2 = 2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{8} - \frac{x_3}{8} - \frac{5}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 \\ x_2 = -\frac{3}{8} + \frac{5}{8}x_3 + \frac{x_4}{8} + \frac{9}{8}x_5 \end{array} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{8} - \lambda_1 - 5\lambda_2 - 5\lambda_3 \\ x_2 = -\frac{3}{8} + 5\lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_3 \\ x_3 = 8\lambda_1 \\ x_4 = 8\lambda_2 \\ x_5 = 8\lambda_3 \end{array} \right.$$

450. En virtud del ejercicio anterior esos vectores son:

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{1}{8}, \frac{37}{8}, 8, 0, 0 \right), \quad \mathbf{b} = \left(-\frac{33}{8}, \frac{5}{8}, 0, 8, 0 \right),$$

$$\mathbf{c} = \left(-\frac{33}{8}, \frac{69}{8}, 0, 0, 8 \right), \quad \mathbf{d} = \left(\frac{7}{8}, -\frac{3}{8}, 0, 0, 0 \right).$$

Al número $d(L) + 1$ se le llama *rango* de la variedad afín L.

451. De $r \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \right) = r \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \right) = 2$ se deduce que el sistema

dado es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + 1 = 0. \end{array} \right.$$

luego se puede eliminar una incógnita, por ejemplo x_1 , poniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2x_2 + x_3 - 1 \\ -1 & x_2 + 4x_3 + 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow x_2 + 4x_3 + 1 = 2x_2 - x_3 + 1 \Leftrightarrow -x_2 + 5x_3 = 0.$$

$$452. \text{ De } r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

se deduce que el sistema dado es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 1 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3 = 0, \end{cases}$$

siendo estas ecuaciones linealmente independientes, luego se podrán eliminar dos incógnitas:

$$r \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4x_3 + x_4 - 5 \\ -1 & 2 & 3x_3 - 2x_4 + 1 \\ -3 & 4 & 2x_3 + x_4 + 3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow -31x_3 + 29x_4 - 6 = 0.$$

Para todo par (x_3, x_4) que verifique esta última ecuación, el sistema dado tiene una solución respecto de (x_1, x_2) .

453.

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 3 = r \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego se pueden eliminar dos incógnitas, por ejemplo x_1 y x_2 , ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, y el resultado es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -x_3 + 2x_4 + 1 \\ 1 & -1 & 2x_3 - x_4 + 2 \\ -2 & 1 & x_3 + 3x_4 - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -17x_3 - 7x_4 - 11 = 0.$$

Capítulo tercero

§ 1. EL PLANO AFÍN

454. $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = -2\mathbf{u}$, $\mathbf{z} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$.

455. Sea $\mathbf{u} = [\overrightarrow{OU}]$, $1U_1 \parallel 7U$; $1U_2 \parallel BU$

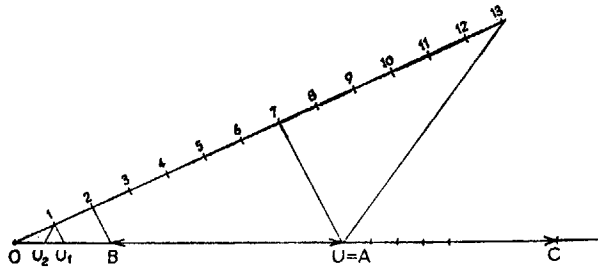


Fig. 23'.

$\mathbf{x} = [\overrightarrow{AB}]$, $\mathbf{y} = [\overrightarrow{OC}]$.

456. De (12) resulta:

$$\begin{cases} 5 = a - 2b \\ -3 = a + 4b \end{cases}$$

de donde $a = \frac{7}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$, y la ecuación del cambio es:

$$x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x^*.$$

457. $4 = a$, $0 = a - b$, de donde $b = a = 4$ y la ecuación (12) es:

$$x = 4 + 4x^*.$$

458. $0 = a + 2b$, $1 = a - 5b$, de donde $a = \frac{2}{7}$, $b = -\frac{1}{7}$ y

$$x = \frac{2}{7} - \frac{1}{7}x^*.$$

459. $(1, y_1, y_2) = (1, x_1, x_2)A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $|A| = 27$.

$$(1, x_1, x_2) = (1, y_1, y_2) A^{-1} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{9} & \frac{10}{27} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

$$460. (1, x_1, x_2) = (1, y_1, y_2) B, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad |B| = 13.$$

$$(1, y_1, y_2) = (1, x_1, x_2) B^{-1}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{21}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ 0 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

461. $\overrightarrow{O'U_1}$ y $\overrightarrow{O'U_2}$ son representantes de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente; luego, de

$$[\overrightarrow{OU_1}] = [\overrightarrow{OO'}] + [\overrightarrow{O'U_1}], \quad [\overrightarrow{OU_2}] = [\overrightarrow{OO'}] + [\overrightarrow{O'U_2}],$$

se deduce:

$$\mathbf{v}_1 = [\overrightarrow{O'U_1}] = [\overrightarrow{OU_1}] - [\overrightarrow{OO'}] = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - (2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{v}_2 = [\overrightarrow{O'U_2}] = [\overrightarrow{OU_2}] - [\overrightarrow{OO'}] = (5\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2) - (2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,$$

luego:

$$(1, x_1, x_2) = (1, y_1, y_2) B, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad |B| = 11.$$

$$(1, y_1, y_2) = (1, x_1, x_2) B^{-1}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

462. Las ecuaciones (30) permiten escribir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} A, \quad \text{de donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{20} & \frac{8}{20} & -\frac{7}{20} \\ -\frac{8}{20} & \frac{4}{20} & \frac{4}{20} \\ \frac{3}{20} & -\frac{4}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{20} & \frac{28}{20} & \frac{8}{20} \\ \frac{49}{20} & -\frac{12}{20} & -\frac{17}{20} \\ \frac{21}{20} & \frac{12}{20} & -\frac{13}{20} \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$(1, y_1, y_2) = (1, x_1, x_2) A.$$

463. De $[\overrightarrow{OA'}] = [\overrightarrow{OO'}] + [\overrightarrow{O'A'}]$ y $[\overrightarrow{OB'}] = [\overrightarrow{OO'}] + [\overrightarrow{O'B'}]$, se deduce:

$$\mathbf{v}_1 = [\overrightarrow{O'A'}] = [\overrightarrow{OA'}] - [\overrightarrow{OO'}] = (-2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2) = -3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,$$

$$\mathbf{v}_2 = [\overrightarrow{O'B'}] = [\overrightarrow{OB'}] - [\overrightarrow{OO'}] = (5\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2) = 4\mathbf{u}_1 - 6\mathbf{u}_2,$$

luego:

$$(1, x_1, x_2) = (1, y_1, y_2) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

464. Las ecuaciones (41) se escribirán:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 7\lambda \\ x_2 = 7 - 5\lambda. \end{cases}$$

Las ecuaciones (43) serán:

$$\begin{cases} 1 = \mu + \lambda \\ x_1 = 4\mu - 3\lambda \\ x_2 = 7\mu + 2\lambda. \end{cases}$$

465. Las ecuaciones (44) proporcionan:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3\lambda \\ x_2 = -2 + 4\lambda. \end{cases}$$

466. La incidencia de A y r equivale a

$$\begin{cases} 1 = 1 - 3\lambda \\ -3 = 4 + \lambda \end{cases}$$

y este sistema es incompatible, ya que

$$r \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = 2 \neq r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego, A y r no son incidentes. Análogamente, el sistema

$$\begin{cases} 2 = 1 - 3\lambda \\ 5 = 4 + \lambda \end{cases}$$

es también incompatible, luego B no es incidente con r . Finalmente, el sistema

$$\begin{cases} -5 = 1 - 3\lambda \\ 6 = 4 + \lambda \end{cases}$$

es compatible, ya que $r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, luego C es incidente con r .

467. El sistema: $\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 4 = 2\lambda - 3\mu \\ 1 = \lambda + 4\mu \end{cases}$ es incompatible, ya que $r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq$

$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, luego A y r no son incidentes. Sin embargo, el sistema $\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 7 = 2\lambda - 3\mu \\ -2 = \lambda + 4\mu \end{cases}$

es compatible, ya que $r \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$, luego B y r son incidentes.

468. Sí, porque el vector de dirección de la primera es $(-2, 3)$ y el de la segunda $(4, -6)$, y estos vectores son proporcionales, luego tienen la misma dirección.

469. El vector de dirección de r es $(-3, 1)$, luego la ecuación de la recta s es:

$$s: \begin{cases} x_1 = 5 - 3\lambda \\ x_2 = -3 + \lambda. \end{cases}$$

470. La recta r del ejercicio 467 se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 5\lambda \\ x_2 = 4 - 3\lambda \end{cases}$$

luego un vector de dirección de la recta r es $(5, -3)$ y las ecuaciones de s serán:

$$s: \begin{cases} x_1 = 4 + 5\lambda \\ x_2 = -7 - 3\lambda \end{cases}$$

471. La ecuación de la recta t se puede escribir en la forma:

$$t: \begin{cases} x_1 = 1 + 5\lambda \\ x_2 = 5 - 3\lambda \end{cases}$$

y como el vector de dirección de t es $(5, -3)$, igual al de s (véase el ejercicio anterior), las rectas s y t son paralelas.

472. Si el punto (x_1, x_2) es incidente con r y con s , se verificará:

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda = 1 + 4\mu \\ 4 + \lambda = 2 - 6\mu \end{cases}$$

y reciprocamente, luego, los puntos comunes a ambas rectas se obtienen resolviendo el sistema anterior, y se obtiene: $\lambda = \frac{4}{7}$, $\mu = -\frac{3}{7}$; luego, el punto común, único, es:

$$A = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{32}{7} \right).$$

473. El punto (x_1, x_2) es incidente con r y con u es equivalente a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \lambda' + \mu' = 1 \\ 2\lambda - 3\mu = \lambda' + 5\mu' \\ \lambda + 4\mu = \lambda' - \mu' \end{cases}$$

en virtud de la primera ecuación, únicamente sirven soluciones distintas del vector cero. Escribiendo el sistema anterior en la forma:

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \lambda' - \mu' = 0 \\ 2\lambda - 3\mu - \lambda' - 5\mu' = 0 \\ \lambda + 4\mu - \lambda' + \mu' = 0 \end{cases}$$

se obtiene la solución:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \lambda & \mu & \lambda' & \mu' \\ \hline \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \end{array}.$$

de donde: $\frac{\lambda}{4} = \frac{\mu}{-2} = \rho$, de donde $\lambda = 4\rho$, $\mu = -2\rho$ y como $\lambda + \mu = 1$, será $2\rho = 1$,

$\rho = \frac{1}{2}$, luego, $\lambda = 2$, $\mu = -1$. Por consiguiente, el punto común a los dos vectores es:

$(x_1 = 7, x_2 = -2)$.

474. a) $2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = -12 \neq 0$, luego P no es incidente con la recta.

b) $2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 0$, luego Q es incidente con la recta.

c) $2 + 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 0$, luego R es incidente con la recta.

475. r: $x_2 = 4$; s: $x_1 = -3$.

476. Por ser la recta incidente con el origen su ecuación será de la forma (54) y por ser incidente con P será:

$$u_1 \cdot 2 + u_2 \cdot 5 = 0$$

de donde $\frac{u_1}{5} = \frac{u_2}{-2}$, luego la ecuación es

$$5x_1 - 2x_2 = 0.$$

477. La especialización dada equivale a considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \\ u_2 = 0 \end{array} \left\{ \sim \begin{array}{l} u_0 + u_1 x_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{array} \right\} \sim \begin{array}{l} x_1 = c \\ u_2 = 0 \end{array} \left\{ \right.$$

que representa el conjunto de todas las rectas paralelas al eje x_2 .

$$478. \begin{array}{l} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \\ u_0 = 0 \end{array} \left\{ \sim \begin{array}{l} u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \\ u_0 = 0 \end{array} \right\}, \text{ que representa todas las rectas}$$

incidentes con el origen de coordenadas.

$$479. \begin{array}{l} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{array} \left\{ \sim \begin{array}{l} u_2 x_2 = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{array} \right\} \sim \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{array} \left\{ \right., \text{ que representa el eje } x_1.$$

$$480. \begin{array}{l} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0 \\ u_0 - u_1 + u_2 = 0 \end{array} \left\{ \sim \begin{array}{l} u_1 (x_1 + 1) + u_2 (x_2 - 1) = 0 \\ u_0 - u_1 + u_2 = 0 \end{array} \right\}, \text{ que representa el}$$

conjunto de todas las rectas del plano incidentes con el punto $(-1, 1)$.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 &= 0 \\ 481. \quad u_0 + 2u_1 - u_2 &= 0 \\ -u_0 + u_1 + 3u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \sim \left. \begin{aligned} u_1(x_1 - 2) + u_2(x_2 + 1) &= 0 \\ 3u_1 + 2u_2 &= 0 \\ u_0 + 2u_1 - u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \\
 & \sim \left. \begin{aligned} u_2(7 - 2x_1 + 3x_2) &= 0 \\ 3u_1 + 2u_2 &= 0 \\ u_0 + 2u_1 - u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ luego la especialización es}
 \end{aligned}$$

$$7 - 2x_1 + 3x_2 = 0.$$

$$482. \text{ a) } u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0. \quad \text{b) } u_1(x_1 - 3) + u_2(x_2 + 4) = 0.$$

$$483. \quad x_1 = \frac{5}{11}, \quad x_2 = -\frac{7}{11}.$$

$$484. \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \text{ luego son paralelas.}$$

$$485. \quad \begin{vmatrix} m & -1 \\ p & -1 \end{vmatrix} = p - m = 0, \quad \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} = n p - m q = m(n - q) \neq 0.$$

$$486. \quad u_0 + 3x_1 - 5x_2 = 0.$$

487. El haz de rectas paralelas a la recta r es

$$u_0 - x_1 + 2x_2 = 0$$

y la condición de incidencia con P da:

$$u_0 - p_1 + 2p_2 = 0,$$

luego la recta solución es

$$-(x_1 - p_1) + 2(x_2 - p_2) = 0.$$

$$488. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad r(A) = 2, \quad r(B) = 3,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego las rectas forman triángulo (fig. 46 a)).

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2, \quad r(B) = 3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

luego r y s son paralelas y t secante (fig. 46 b)).

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(A) = r(B) = 2.$$

Las rectas son incidentes con el mismo punto (fig. 47).

$$d) \quad r(A) = 1, \quad r(B) = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego las rectas son distintas dos a dos y paralelas entre sí (fig. 48 a)).

$$e) \quad r(A) = 1, \quad r(B) = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

luego s y t coinciden y r es paralela a ellas (fig. 48 b)).

$$489. \quad \lambda(1 - 2x_1 + 3x_2) + \mu(4 + x_1 + x_2) = 0.$$

490. El haz de rectas determinado por s y t es:

$$4\lambda - \mu + (\lambda + \mu)x_1 + (\lambda - 2\mu)x_2 = 0.$$

Especializando mediante la condición de pasar por el origen de coordenadas: $4\lambda - \mu = 0$, resulta: $5\lambda x_1 - 7\lambda x_2 = 0$, o bien, $5x_1 - 7x_2 = 0$.

491. El haz de rectas determinado por r y s es el del ejercicio 489, que se puede escribir en la siguiente forma:

$$\lambda + 4\mu + (-2\lambda + \mu)x_1 + (3\lambda + \mu)x_2 = 0$$

Especializada esta ecuación con la condición de paralelismo a la recta t :

$$\begin{vmatrix} -2\lambda + \mu & 3\lambda + \mu \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

resulta: $7 - 5x_1 + 10x_2 = 0$.

492. La ecuación del haz de rectas paralelas a la recta r es:

$$\lambda - 2x_1 + 3x_2 = 0,$$

especializando con la condición de incidencia con P , se obtiene:

$$\lambda - 8 + 3 = 0, \quad \lambda = 5,$$

luego la ecuación de la recta es $5 - 2x_1 + 3x_2 = 0$.

493. El haz determinado por r y t es

$$\lambda - \mu + (-2\lambda + \mu)x_1 + (3\lambda - 2\mu)x_2 = 0,$$

y el determinado por s y t

$$\lambda' - 2\mu' + (-2\lambda' + 3\mu')x_1 + (4\lambda' + \mu')x_2 = 0,$$

la recta buscada ha de pertenecer a los dos haces, luego:

$$\frac{\lambda - \mu}{\lambda' - 2\mu'} = \frac{-2\lambda + \mu}{-2\lambda' + 3\mu'} = \frac{3\lambda - 2\mu}{4\lambda' + \mu'}$$

o bien, poniendo $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$, $\frac{\lambda'}{\mu'} = \rho'$:

$$\frac{\rho - 1}{\rho' - 2} = \frac{-2\rho + 1}{-2\rho' + 3} = \frac{3\rho - 2}{4\rho' + 1} = t, \sim \begin{cases} \rho - 1 - t\rho' + 2t = 0 \\ -2\rho + 1 + 2t\rho' - 3t = 0 \\ 3\rho - 2 - 4t\rho' - t = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} -1 + t = 0 \\ 1 - t\rho' - 7t = 0 \\ \rho - 1 - t\rho' + 2t = 0, \end{cases}$$

de donde $t = 1$, $\rho' = -6$, $\rho = -7$, luego la recta buscada es

$$-8 + 15x_1 - 23x_2 = 0.$$

494. a) $[AB]: 1 = \lambda + \mu, \quad x_1 = 5\lambda + 4\mu, \quad x_2 = -3\lambda + \mu, \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0.$
 b) $\uparrow AB: 1 = \lambda + \mu, \quad x_1 = 5\lambda + 4\mu, \quad x_2 = -3\lambda + \mu, \quad \mu \geq 0$
 c) $\downarrow AB: 1 = \lambda + \mu, \quad x_1 = 5\lambda + 4\mu, \quad x_2 = -3\lambda + \mu, \quad \mu \leq 0.$

495. El primer miembro de la ecuación de a toma el valor -4 cuando se sustituyen las variables x_1, x_2 por las coordenadas del origen $(0, 0)$, luego el semiplano es:

$$-4 + 2x_1 - 5x_2 \leq 0.$$

496. $-4 + 2 \cdot 7 - 5(-1) = 16 > 0$, luego el semiplano es:

$$-4 + 2x_1 - 5x_2 \geq 0.$$

497. Un punto del semieje positivo de las x_2 es $(0, 1)$ y el primer miembro de la ecuación de b toma el valor -3 en este punto, luego el semiplano es:

$$4x_1 - 3x_2 \leq 0,$$

498. De $-4 + 2(-2) - 5(-1) = -2 < 0$ y $4(-2) - 3(-1) = -5 < 0$, resulta que los semiplanos de bordes a y b que contienen a P son:

$$-4 + 2x_1 - 5x_2 \leq 0, \quad 4x_1 - 3x_2 \leq 0,$$

luego el conjunto de las dos relaciones anteriores define la región angular.

499. $-4 + 2x_1 - 5x_2 \geq 0$, y $-4 + 2x_1 - 5x_2 \leq 0$, $4x_1 - 3x_2 \geq 0$.

500. Un lado es $\begin{cases} -4 + 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{cases}$ y el otro $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ -4 + 2x_1 - 5x_2 \leq 0 \end{cases}$.

501. Solución a).

AB: $-2 + 2x_1 - x_2 = 0$; AC: $-2 + 2x_1 + x_2 = 0$; BC: $6 + 2x_1 - 3x_2 = 0$.

$-2 + 2 \cdot 0 - 2 = -4 < 0$; $-2 + 2 \cdot 3 + 4 = 8 > 0$; $6 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 8 > 0$,

luego:

región de vértice A $\begin{cases} -2 + 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0, \end{cases}$ región de vértice B $\begin{cases} -2 + 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ 6 + 2x_1 - 3x_2 \geq 0, \end{cases}$
región de vértice C $\begin{cases} -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0, \\ 6 + 2x_1 - 3x_2 \geq 0. \end{cases}$

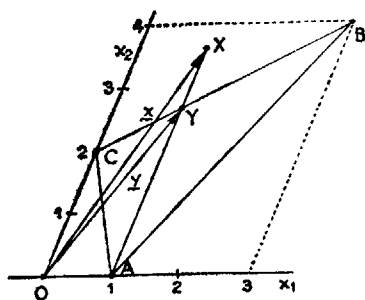


Fig. 23'.

Solución b). Un punto X (fig. 23') de la región angular de vértice A, posee un vector de posición $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{y}, \quad \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

siendo $\mathbf{y}$ el vector de posición de un punto Y del segmento $[BC]$, luego

$$\mathbf{y} = \nu \mathbf{b} + \rho \mathbf{c} \quad \begin{cases} \nu + \rho = 1 \\ \nu \geq 0, \rho \geq 0, \end{cases}$$

luego:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \nu \mathbf{b} + \mu \rho \mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0,$$

luego:

región de vértice A: $\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ x_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2, \\ x_2 = 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases} \quad \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0.$

Análogamente:

$$\text{región de vértice B: } \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ x_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2, \\ x_2 = 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases} \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_3 \geq 0.$$

$$\text{región de vértice C: } \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ x_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2, \\ x_2 = 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases} \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

$$502. \text{ Solución a): } \begin{cases} -2 + 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ -2 + 2x_1 + x_2 \geq 0, \\ 6 + 2x_1 - 3x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Solución b): } \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ x_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2, \\ x_2 = 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases} \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0.$$

503. Si $\mathbf{g}$ es el vector de posición del baricentro, será:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{3} \mathbf{a} + \frac{1}{3} \mathbf{b} + \frac{1}{3} \mathbf{c}, \quad \text{luego: } \begin{cases} g_1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}, \\ g_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2, \end{cases}$$

el baricentro pertenece, por tanto, al triángulo.

504. Basta observar que cada desigualdad representa un semiplano y que todos ellos contienen al origen de coordenadas, luego la región representada por las cinco inecuaciones es el polígono convexo rayado en la figura 24'.

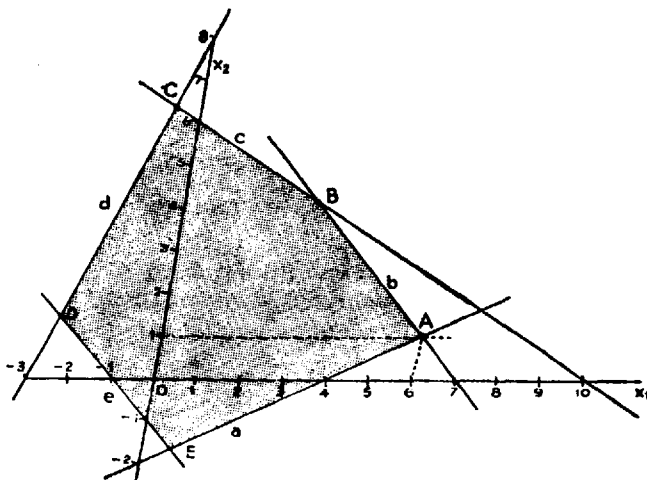


Fig. 24'.

505. Los vértices pertenecen a los bordes de dos semiplanos y también al polígono, luego sus coordenadas han de verificar a dos de las ecuaciones del ejercicio 504 y a todas las inecuaciones. Por consiguiente, para hallar los vértices situados en el borde del semiplano a , consideraremos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} -4 + x_1 - 2x_2 &= 0, & 7 - x_1 - x_2 &\geq 0, & -30 + 3x_1 + 5x_2 &\leq 0, \\ 24 + 8x_1 - 3x_2 &\geq 0, & 1 + x_1 + x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

que es equivalente al siguiente:

$$(1) \quad x_1 = 4 + 2x_2, \quad x_2 \leq 1, \quad x_2 \leq \frac{18}{11}, \quad x_2 \geq -\frac{56}{13}, \quad x_2 \geq -\frac{5}{3}.$$

Ahora bien, se verifica que

$$-\frac{56}{13} < -\frac{5}{3} < 1 < \frac{18}{11}$$

luego se verificarán todas las inecuaciones (1) si, y solamente si, se verifican las siguientes:

$$(2) \quad x_1 = 4 + 2x_2, \quad -\frac{56}{13} < -\frac{5}{3} \leq x_2 \leq 1 < \frac{18}{11}.$$

De (2) se deduce que obtendremos un vértice del borde del semiplano a cuando x_2 verifique una de las dos posibles igualdades de (2), luego dichos vértices se obtienen para $x_2 = 1$ y para $x_2 = -\frac{5}{3}$; por consiguiente, dichos vértices son:

$$A = (6, 1), \quad E = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Además, puede asegurarse que el vértice A pertenece al borde del semiplano b y el vértice E al borde del semiplano e . Para hallar otros dos, convendrá, por tanto, elegir uno de los semiplanos c o d . Eliendo c se obtiene, análogamente:

$$x_1 = 10 - \frac{5}{3}x_2, \quad \frac{18}{11} < \frac{9}{2} \leq x_2 \leq \frac{312}{49} < \frac{33}{2},$$

luego los vértices situados en el borde del semiplano c son:

$$B = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), \quad C = \left(-\frac{30}{49}, \frac{312}{49}\right).$$

El vértice B es intersección del borde de b con el borde de c y C es intersección del borde de c con el borde de d . Por consiguiente, el último vértice, D , será intersección del borde de d con el borde de e : $D = \left(-\frac{27}{11}, \frac{16}{11}\right)$.

506. a : $-1 + x_1 + 2x_2 \geq 0$; b : $2 - x_1 + 2x_2 \geq 0$; c : $-6 + x_1 \leq 0$; d : $10 + x_1 - 2x_2 \geq 0$; e : $-1 + 5x_1 + x_2 \geq 0$.

$$507. \quad ABC: \begin{cases} 1 = \lambda + \mu + \nu \\ x_1 = \lambda + 3\mu - \nu \\ x_2 = -\lambda + 5\mu + 4\nu, \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0. \end{cases}$$

508. El triángulo ABC es intersección del semiplano de borde AB que contiene a C con el semiplano de borde BC que contiene a A y con el semiplano de borde CA que contiene a B. Se verifica que

$$AB: -11 + 7x_1 - 2x_2 = 0; \quad BC: 17 + x_1 - 4x_2 = 0; \quad CA: -8 + 6x_1 + 2x_2 = 0.$$

Sustituyendo en el primer miembro de la ecuación de AB las coordenadas de C se obtiene un número negativo; sustituyendo en el primer miembro de la ecuación de BC las coordenadas de A se obtiene un número positivo, y sustituyendo en el primer miembro de la ecuación de CA las coordenadas de B se obtiene un número positivo, luego las relaciones implícitas del triángulo ABC son:

$$ABC: \begin{cases} -11 + 7x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ 17 + x_1 - 4x_2 \geq 0, \\ -8 + 6x_1 + 2x_2 \geq 0. \end{cases}$$

509. Obsérvese que las coordenadas de los puntos de un lado se obtienen haciendo cero uno de los parámetros, luego las coordenadas de los vértices se obtendrían anulando dos de los parámetros y dando al tercero el valor 1. En cuanto a las relaciones implícitas, bastará resolver los sistemas formados por cada dos ecuaciones correspondientes a los bordes de los semiplanos.

510.

$$(0) \quad C(A, B, C, D) = \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ x_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + \frac{9}{10}\lambda_4, \\ x_2 = -2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{29}{20}\lambda_4, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0. \end{cases}$$

Los vértices pertenecerán a los bordes de los semiplanos definidos por las relaciones implícitas, luego vamos a hallar dichos semiplanos. Esto, según se ha visto en el ejercicio 508, equivale a eliminar en el sistema anterior los parámetros. La recta AB tiene por ecuación:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

y será borde de un semiplano cuando deje al mismo lado a los otros dos puntos, C y D, esto es, cuando

$$(2) \quad \text{sig.} \begin{vmatrix} C & A & B \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} D & A & B \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{9}{10} & 1 & 3 \\ \frac{29}{20} & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Ahora bien, el primer determinante es igual a 26 y el segundo a $\frac{38}{5}$, luego (1) es la ecuación

ción del borde de un semiplano de C , y, por tanto, A y B serán dos vértices. Para ver si AC es borde de otro semiplano bastará ver el signo de

$$(3) \quad \begin{vmatrix} & C & A & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \frac{9}{10} \\ 4 & -2 & \frac{29}{20} & \end{vmatrix} > 0,$$

luego CA es borde de otro semiplano de C , y, por tanto, C y A son vértices. Como se ha llegado a otro vértice anterior, puede decirse que D no es vértice, luego los vértices de $C(A, B, C, D)$ son A, B y C . Por consiguiente, las relaciones (0) son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ x_1 = \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3, \\ x_2 = -2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3, \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

511. En virtud del ejercicio precedente, las ecuaciones implícitas son las del ejercicio 508.

512. Teniendo en cuenta la solución del ejercicio 506, resulta:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5, \\ x_1 = 6\lambda_1 + \frac{5}{2}\lambda_2 - \frac{30}{49}\lambda_3 - \frac{27}{11}\lambda_4 + \frac{2}{3}\lambda_5, \\ x_2 = \lambda_1 + \frac{9}{2}\lambda_2 + \frac{312}{49}\lambda_3 + \frac{16}{11}\lambda_4 - \frac{5}{3}\lambda_5, \end{cases} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_5 \geq 0.$$

513.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = |A_1 A_2 A_3| = 4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = |A_1 A_2 A_4| = 4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= |A_1 A_2 A_5| = -2, \quad \text{luego } A_1 \text{ es punto interior.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = |A_2 A_3 A_4| = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |A_2 A_3 A_5| = 7, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |A_2 A_4 A_5| = 5, \quad \text{luego } A_2 A_4 \text{ es borde,}$$

de donde $A_3 A_5$ también es borde, luego los vértices son A_2, A_4, A_3, A_5 y los bordes $[A_2 A_4]$, $[A_4 A_3]$, $[A_3 A_5]$, $[A_5 A_2]$.

514. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} \leq 0.$$

515.

$$x_1 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, \quad x_2 = 3\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4, \quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0.$$

516. a) Vértices situados en la recta $x_1 + x_2 - 3 = 0$. Los puntos de intersección de esta recta con los bordes de los otros tres semiplanos son:

$$A_1 = (5, -2), \quad A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right), \quad A_3 = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Ordenados por la primera coordenada son: A_2, A_3, A_1 . El punto A_2 verifica todas las relaciones del enunciado, luego es vértice. Lo mismo sucede a A_3 , luego los vértices del borde del primer semiplano son:

$$A = A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right) \quad \text{y} \quad B = A_3 = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

A pertenece al borde del tercer semiplano y B al borde del cuarto semiplano. Veamos los vértices del borde del segundo semiplano; la intersección de este semiplano con los bordes de los semiplanos 1.º, 3.º y 4.º son, respectivamente:

$$B_1 = (5, -2), \quad B_2 = \left(\frac{13}{14}, -\frac{9}{14}\right), \quad B_3 = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right).$$

Ordenados por la primera coordenada son: B_3, B_2, B_1 y ninguno de ellos verifica las relaciones del enunciado, luego C está determinado como intersección de los semiplanos 1, 3 y 4, y no es un polígono. Sus relaciones paramétricas pueden ponerse en la siguiente forma no lineal:

$$1 = \lambda + \mu, \quad x_1 = \frac{4}{3}\lambda + \left(\frac{1}{4} + t\right)\mu, \quad x_2 = \frac{5}{3}\lambda + \left(\frac{11}{4} + 5t\right)\mu, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad t \geq 0.$$

517. Sean A_1, A_2, A_3, A_4 las intersecciones del borde a con b, c, d y e , respectivamente, será:

$$A_1 = \left(-\frac{18}{7}, \frac{4}{7}\right), \quad A_2 = (-15, -16), \quad A_3 = \left(\frac{3}{5}, \frac{24}{5}\right), \quad A_4 = \left(\frac{3}{2}, 6\right).$$

Ordenados respecto de la primera coordenada, son: A_2, A_1, A_3, A_4 . Los vértices son:

$$A = A_1 = \left(-\frac{18}{7}, \frac{4}{7}\right) \quad \text{y} \quad B = A_3 = \left(\frac{3}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

y pertenecen a los bordes de a , b y d , respectivamente. Sean B_1 , B_2 , B_3 y B_4 los puntos de intersección del borde de c con los bordes de a , b , d y e , respectivamente. Se verifica que

$$B_1 = (-15, -16), \quad B_2 = \left(\frac{10}{9}, -\frac{28}{9}\right), \quad B_3 = \left(\frac{25}{7}, -\frac{8}{7}\right), \quad B_4 = \left(\frac{45}{8}, \frac{1}{2}\right).$$

Ordenados respecto de la primera coordenada, son: B_1, B_2, B_3, B_4 . Los vértices son:

$$C = B_2 = \left(\frac{10}{9}, -\frac{28}{9}\right) \quad \text{y} \quad D = B_3 = \left(\frac{25}{7}, -\frac{8}{7}\right)$$

y pertenecen a los bordes de c y de b y d , respectivamente. Como ninguno de los cuatro vértices hallados pertenece al borde de e , en esta recta no puede haber ningún vértice, luego los bordes del polígono C son: $[AC]$, $[CD]$, $[DB]$ y $[BA]$. Las relaciones explícitas serán:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \quad x_1 = -\frac{18}{7}\lambda_1 + \frac{3}{5}\lambda_2 + \frac{10}{9}\lambda_3 + \frac{25}{7}\lambda_4, \\ x_2 &= \frac{4}{7}\lambda_1 + \frac{24}{5}\lambda_2 - \frac{28}{9}\lambda_3 - \frac{8}{7}\lambda_4, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 518. \quad (A B C) R (A' B' C') &\Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ 0 & c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 0 & b'_1 - a'_1 & b'_2 - a'_2 \\ 0 & c'_1 - a'_1 & c'_2 - a'_2 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow (b - a, c - a) R' (b' - a', c' - a'). \end{aligned}$$

Análogamente, $(A B C) \text{ no } R (A' B' C') \Leftrightarrow (b - a, c - a) \text{ no } R (b' - a', c' - a')$.

519. Dado $(a, b) \in B$, si $\overrightarrow{OA} \in a$, $\overrightarrow{OB} \in b$, se verifica que $\varphi(O, A, B) = (a, b)$.

520. En primer lugar obsérvese que si, para un par de puntos distintos A y B de la recta r , se verifica $a_1 = b_1$, resulta que $u_2(a_2 - b_2) = 0$, de donde $u_2 = 0$, luego la ecuación de la recta sería de la forma $x_1 = a_1$, luego se verificará la igualdad de la primera coordenada para cualquier otro par de puntos. Si $u_2 \neq 0$ y $A \leq B$, $B \leq A$, será $a_1 \leq b_1$ y $b_1 \leq a_1$, luego $a_1 = b_1$, de donde $a_2 = b_2$ y $A = B$. Si $A \leq B$ y $B \leq C$, será $a_1 \leq b_1$ y $b_1 \leq c_1$, de donde $a_1 \leq c_1$ y $A \leq C$. La ordenación es total.

Si $X = (x_1, x_2)$ es un punto que no pertenece a la recta r y A y B son dos puntos de la recta r , se verificará:

$$\left. \begin{aligned} u_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 &= 0 \\ u_0 + u_1 b_1 + u_2 b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \sim \frac{u_0}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{u_1}{\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{u_2}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix}},$$

de donde

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2,$$

luego

$$(A B X) R (M N P) \Leftrightarrow \text{sig.}(u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2) = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 \\ 1 & n_1 & n_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

que prueba que el conjunto de todos los puntos X del plano tales que $(A B X) R (M N P)$, siendo A y B dos puntos cualesquiera de la recta es un semiplano cuyo borde es r .

§ 2. EL ESPACIO AFÍN

521. Sean los puntos:

$$y = a + \lambda_1 (b - a) + \mu_1 (c - a),$$

$$z = a + \lambda_2 (b - a) + \mu_2 (c - a),$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ números arbitrarios de K . La ecuación de la recta YZ es

$$\begin{aligned} x &= y + \rho (z - y) = a + \lambda_1 (b - a) + \mu_1 (c - a) + \rho [(\lambda_2 - \lambda_1) (b - a) + (\mu_2 - \mu_1) (c - a)] \\ &= a + [\lambda_1 + \rho (\lambda_2 - \lambda_1)] (b - a) + [\mu_1 + \rho (\mu_2 - \mu_1)] (c - a). \end{aligned}$$

Por consiguiente, haciendo la especialización:

$$\begin{cases} \lambda = t + \rho s, \\ \mu = t' + \rho s', \end{cases}$$

en donde t, s, t', s' son números dados y ρ una variable, en la ecuación del plano se obtiene una recta del plano.

522. La ecuación de la recta r) es:

$$r) \quad x = a + (m + \rho n) (b - a) + (p + \rho q) (c - a).$$

y la de s):

$$s) \quad x = a + (m' + \rho n') (b - a) + (p' + \rho q') (c - a).$$

La condición necesaria y suficiente para que tengan un punto común p es que:

$$\begin{aligned} p &= a + (m + \rho_1 n) (b - a) + (p + \rho_1 q) (c - a) \\ &= a + (m' + \rho_2 n') (b - a) + (p' + \rho_2 q') (c - a), \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que $b - a$ y $c - a$ son l. i., resulta:

$$\begin{cases} m + \rho_1 n = m' + \rho_2 n' \\ p + \rho_1 q = p' + \rho_2 q' \end{cases} \sim \begin{cases} m - m' + \rho_1 n - \rho_2 n' = 0 \\ p - p' + \rho_1 q - \rho_2 q' = 0 \end{cases} \sim r \begin{pmatrix} n & n' \\ q & q' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} m - m' & n & n' \\ p - p' & q & q' \end{pmatrix}$$

luego la condición de paralelismo o coincidencia, será:

$$\frac{n}{n'} = \frac{q}{q'}.$$

523. En virtud del ejercicio 521, esto equivale a que se puedan determinar m, n, p, q de modo que

$$\begin{cases} \lambda_1 = m + \rho_1 n, \\ \mu_1 = p + \rho_1 q, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = m + \rho_2 n, \\ \mu_2 = p + \rho_2 q, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = m + \rho_3 n, \\ \mu_3 = p + \rho_3 q, \end{cases}$$

de donde:

$$\frac{\lambda_1 - m}{n} = \frac{\mu_1 - p}{q}, \quad \frac{\lambda_2 - m}{n} = \frac{\mu_2 - p}{q}, \quad \frac{\lambda_3 - m}{n} = \frac{\mu_3 - p}{q},$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), (\lambda_3, \mu_3) \text{ están alineados en el plano } (\lambda, \mu) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 1 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 1 & \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

524. Es consecuencia de los ejercicios anteriores.

525. a) $[\vec{O\vec{O}}] = o \vec{u}_1 + o \vec{u}_2 + o \vec{u}_3$. b) $X \in x_1 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] \parallel \vec{u}_1 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] = x_1 \vec{u}_1$.
 $X \in x_2 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] \parallel \vec{u}_2 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] = x_2 \vec{u}_2$. $X \in x_3 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] \parallel \vec{u}_3 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] = x_3 \vec{u}_3$.
 c) $X \in x_1 x_2 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] \text{ d. l. } (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$. $X \in x_2 x_3 \Leftrightarrow$
 $[\vec{O\vec{X}}] \text{ d. l. } (\vec{u}_2, \vec{u}_3) \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] = x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$. $X \in x_1 x_3 \Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] \text{ d. l. } (\vec{u}_1, \vec{u}_3)$
 $\Leftrightarrow [\vec{O\vec{X}}] = x_1 \vec{u}_1 + x_3 \vec{u}_3$.

526.

$$(1, x_1, x_2, x_3) = (1, x_1^*, x_2^*, x_3^*) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde:

$$(1, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 527. \quad \vec{u}_1^* &= [\vec{O^* \vec{U}_1^*}] = [\vec{O \vec{U}_1^*}] - [\vec{O \vec{O}^*}] = (2 \vec{u}_1 + \vec{u}_2) - (\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \\ &= \vec{u}_1 + 2 \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \\ \vec{u}_2^* &= [\vec{O^* \vec{U}_2^*}] = [\vec{O \vec{U}_2^*}] - [\vec{O \vec{O}^*}] = -2 \vec{u}_1 + 2 \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \\ \vec{u}_3^* &= [\vec{O^* \vec{U}_3^*}] = [\vec{O \vec{U}_3^*}] - [\vec{O \vec{O}^*}] = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 4 \vec{u}_3. \end{aligned}$$

luego, teniendo en cuenta el ejercicio anterior:

$$(1, x_1, x_2, x_3) = (1, x_1^*, x_2^*, x_3^*) A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

528. a) Recordando el ejercicio 525, resulta que: el plano $x_1 x_2$ tiene por ecuación $x_3 = 0$, el $x_2 x_3$ tiene por ecuación $x_1 = 0$ y el $x_3 x_1$ tiene por ecuación $x_2 = 0$.

b) Si π_1 es un plano paralelo al $x_1 x_2$ la tercera coordenada de todos sus puntos es constante, y reciprocamente, luego la ecuación de π_1 es $x_3 = a_3$. Análogamente, un plano π_2 paralelo al $x_2 x_3$ tiene por ecuación $x_1 = a_1$ y un plano π_3 , paralelo a $x_1 x_3$, tiene por ecuación $x_2 = a_2$.

c) Para determinar un plano que contenga al eje x_3 se pueden elegir el punto O y otro punto del eje x_3 : $(0, 0, a)$, juntamente con un punto arbitrario. Sustituyendo en la ecuación (15) se obtiene: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Análogamente, un plano incidente con el eje x_2 tiene por ecuación $a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0$, y un plano incidente con x_1 tiene por ecuación $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$.

d) Para determinar un plano paralelo al eje x_3 se pueden elegir (fig. 55) los puntos B, D, E, siendo $BD \parallel x_3$, con lo que las coordenadas de estos puntos serán: D $(a, 0, 0)$, B $(a, 0, b)$, E $(0, c, 0)$ y aplicando la ecuación (16) se obtiene: $u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$. Análogamente, un plano paralelo al eje x_2 tiene por ecuación: $u_0 + u_1 x_1 + u_3 x_3 = 0$, y un plano paralelo al eje x_1 : $u_0 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$.

e) Un plano incidente con el origen debe tener la solución $(0, 0, 0)$, luego el término independiente debe ser nulo.

529. a) Eje x_1 : $X \in x_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OX} = \lambda \mathbf{u}_1 \Leftrightarrow x_1 = \lambda, x_2 = 0, x_3 = 0$, que son las ecuaciones explícitas, equivalentes a las ecuaciones implícitas, que se obtienen eliminando λ : $x_2 = 0, x_3 = 0$. Análogamente para los otros ejes.

$$b) \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 + 2}{2} = \frac{x_3 - 1}{-3}.$$

$$c) \begin{cases} 5 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$d) \frac{x_1}{4} = \frac{x_2}{7} = \frac{x_3}{-2}$$

530. Sea el plano (28). En virtud de (26) y (29) será.

$$\begin{cases} w_0 + 5w_1 - w_2 + 2w_3 = 0 \\ r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

$$\sim 2\lambda + 3\mu + 5(-\lambda + 2\mu) - (3\lambda - \mu) + 2(-2\lambda + 4\mu) = 0 \sim -10\lambda + 22\mu = 0$$

$$\sim \frac{\lambda}{11} = \frac{\mu}{5}. \text{ Luego la ecuación del plano es}$$

$$37 - x_1 - 28x_2 - 2x_3 = 0.$$

531.

$$\left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \\ u_0 \\ v_0 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{array} \right| \\ u_1 \\ v_1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{array} \right| \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{array} \right| \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right) = 2.$$

532. De $T_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se deduce que el sistema r) es equivalente al

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \lambda, \\ x_2 = 5 + \lambda, \\ x_3 = \lambda, \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta.

533. Sea el plano

$$u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

La condición de paralelismo con el plano dado es:

$$\frac{u_1}{-1} = \frac{u_2}{1} = \frac{u_3}{-3} = t,$$

de donde la ecuación del plano se escribirá:

$$u_0 + t(-x_1 + x_2 - 3x_3) = 0,$$

y la condición de incidencia con A:

$$u_0 - 12t = 0,$$

de donde

$$\frac{u_0}{t} = 12,$$

y el plano es

$$12 - x_1 + x_2 - 3x_3 = 0.$$

534. La condición de incidencia es (27):

$$\begin{aligned} u_0 + 3u_1 - u_2 + u_3 &= 0, \\ -u_1 + 6u_2 - 7u_3 &= 0, \end{aligned}$$

y la de paralelismo (35):

$$-5u_1 - 2u_2 + 6u_3 = 0,$$

luego la ecuación del plano es

$$153 - 22x_1 - 41x_2 - 32x_3 = 0.$$

535. El haz de planos incidentes con r es:

$$2\lambda - \mu + (4\lambda - 2\mu)x_1 + (-\lambda + \mu)x_2 + (3\lambda + 2\mu)x_3 = 0,$$

y la condición de paralelismo de este plano y la recta s es (35):

$$-(4\lambda - 2\mu) + (-\lambda + \mu) + (3\lambda + 2\mu) = 0,$$

con lo que la ecuación del plano es:

$$8 + 16x_1 - 3x_2 + 19x_3 = 0.$$

$$536. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4 + x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

537. La ecuación de la radiación determinada por los tres planos es:

$$b) \quad (\lambda - \mu + 2\nu) + (-\lambda + 3\nu)x_1 + (\mu - \nu)x_2 + (\lambda - 2\mu)x_3 = 0,$$

y la condición de paralelismo al plano dado es

$$\frac{-\lambda + 3\nu}{2} = \frac{\mu - \nu}{-3} = \frac{\lambda - 2\mu}{6},$$

de donde

$$9 + 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0.$$

538. La radiación de planos determinada por los planos a) es la b) del ejercicio anterior. La condición de incidencia de b) con la recta AB es (27):

$$\begin{cases} \lambda - \mu + 2\nu + 4(-\lambda + 3\nu) - 5(\mu - \nu) + (\lambda - 2\mu) = 0, \\ -6(-\lambda + 3\nu) + 6(\mu - \nu) + 2(\lambda - 2\mu) = 0, \end{cases}$$

de donde:

$$\frac{\lambda}{77} = \frac{\mu}{52} = \frac{\nu}{30},$$

y el plano es:

$$85 + 79x_1 + 22x_2 - 27x_3 = 0.$$

539. Por ser coplanaria con r estará en uno de los planos del haz:

$$2\lambda + 4\mu + (-3\lambda + \mu)x_1 + (5\lambda + 2\mu)x_2 + (-\lambda + \mu)x_3 = 0.$$

Por ser incidente con c) y cortar a la recta d), será incidente con el punto de intersección de c) y d):

$$P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{7}{8} \right),$$

luego estará en el plano

$$e) \quad -26 - 24x_1 + 7x_2 - 14x_3 = 0,$$

y sus ecuaciones serán c) y e).

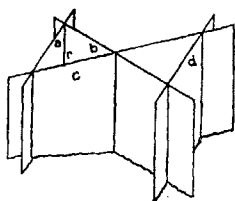


Fig. 25'

540. Sea A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada con los términos constantes. Se verifica: $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, luego los planos no tienen ningún punto común. El plano d) es paralelo al plano a). Como el rango de la matriz de los coeficientes de a), b) y c) es dos y el rango de la matriz ampliada es 3, se verifica que el plano c) es paralelo a la recta r intersección de a) y b), luego los planos a), b) y c) forman un prisma triangular y el plano d) es paralelo a una de las caras del prisma (fig. 25').

541. La recta r será coplanaria con los puntos A, B, P, esto es, será incidente con el plano

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & x_2 + 1 & x_3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -9 + 5x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Las rectas coplanarias con la recta intersección de a) y b) son incidentes con alguno de los planos del haz cuya base es la intersección de a) y b). La ecuación de este haz es:

$$\lambda - 2\mu + (2\lambda - \mu)x_1 + (2\lambda + \mu)x_2 + (-\lambda + 4\mu)x_3 = 0,$$

y como la recta ha de ser incidente con P, será incidente con el plano de este haz incidente con P, esto es, con el plano:

$$9 + 12x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 0,$$

luego las ecuaciones de r son:

$$\begin{cases} -9 + 5x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 9 + 12x_1 + 8x_2 - 13x_3 = 0. \end{cases}$$

542. El haz determinado por a) y b) es:

$$\lambda - 2\mu + (2\lambda - \mu)x_1 + (2\lambda + \mu)x_2 + (-\lambda + 4\mu)x_3 = 0,$$

y el determinado por c) y d):

$$\lambda' + 3\mu' - 2\mu'x_1 + (4\lambda' - 2\mu')x_2 + (7\lambda' + \mu')x_3 = 0.$$

Para que las rectas sean coplanarias es necesario y suficiente que estos dos haces tengan un plano común, lo que proporciona:

$$\frac{\lambda - 2\mu}{\lambda' + 3\mu'} = \frac{2\lambda - \mu}{-2\mu'} = \frac{2\lambda + \mu}{4\lambda' - 2\mu'} = \frac{-\lambda + 4\mu}{7\lambda' + \mu'} = \rho \neq 0,$$

sistema equivalente a

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu - \rho\lambda' - 3\rho\mu' = 0, \\ 2\lambda - \mu + 2\rho\mu' = 0, \\ 2\lambda + \mu - 4\rho\lambda' + 2\rho\mu' = 0, \\ -\lambda + 4\mu - 7\rho\lambda' - \rho\mu' = 0. \end{cases}$$

La condición de compatibilidad de este sistema respecto de $(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$ es

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

y como el determinante es efectivamente nulo, las rectas son coplanarias.

543. Por ser incidente con P tendrá por ecuaciones:

$$\frac{x_1 - 3}{\lambda} = \frac{x_2 + 1}{\mu} = \frac{x_3}{\nu}$$

En virtud de (42), la condición de paralelismo con π es:

$$-3\lambda + \mu - 4\nu = 0$$

y la condición para que sea coplanaria con a) es (49):

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5\mu + 2\nu = 0.$$

luego las ecuaciones de la recta son:

$$\frac{x_1 - 3}{22} = \frac{x_2 + 1}{6} = \frac{x_3}{-15}$$

544. El plano pertenecerá a la radiación:

$$\lambda - \mu + 2\nu + (-\lambda + 3\nu)x_1 + (\mu - \nu)x_2 + (\lambda - 2\mu)x_3 = 0.$$

La condición de paralelismo a la recta a) es (42):

$$2(-\lambda + 3\nu) - 2(\mu - \nu) + 5(\lambda - 2\mu) = 0,$$

y la condición de paralelismo a b) es (35):

$$9(-\lambda + 3\nu) + 5(\mu - \nu) - 11(\lambda - 2\mu) = 0,$$

luego la ecuación del plano es:

$$632 - 3x_1 + 7x_2 + 148x_3.$$

545. Los vectores $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$ y $\mathbf{c} = (-1, -2, 2)$ son paralelos a las rectas a , b y c , respectivamente, y como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

los vectores son linealmente dependientes, luego pertenecen al mismo plano vectorial. El plano

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0,$$

es incidente con el origen y paralelo a las tres rectas dadas.

Escribiendo la recta a) en forma paramétrica:

$$a) \begin{cases} x_1 = 1 + 2\lambda, \\ x_2 = -\lambda, \\ x_3 = 4\lambda, \end{cases}$$

y proyectando el punto genérico de a) desde b) y c), los planos que resultan determinan una recta coplanaria con las tres rectas dadas:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1+2\lambda & -\lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1+2\lambda & -\lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad \begin{cases} (-7 + 6\lambda)x_1 + (5 - 8\lambda)(x_2 + 3) + (8 - 5\lambda)(x_3 - 1) = 0, \\ -6\lambda(x_1 + 2) + (5 + 8\lambda)(x_2 + 1) + (5 + 5\lambda)(x_3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Al variar λ en (1) se obtienen todas las rectas coplanarias con a), b) y c). De las fórmulas (31') se deduce que el vector (T_{23}, T_{31}, T_{12}) tiene la dirección de la recta (30), luego el vector

$$\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 5-8\lambda & 8-5\lambda \\ 5+8\lambda & 5+5\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8-5\lambda & -7+6\lambda \\ 5+5\lambda & -6\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7+6\lambda & 5-8\lambda \\ -6\lambda & 5+8\lambda \end{vmatrix} \right)$$

tiene la dirección de la recta (1). Ahora bien,

$$\mathbf{v} = (-15 - 54\lambda, 35 - 43\lambda, -35 + 4\lambda) = (-15, 35, -35) + \lambda(-54, -43, 4),$$

que prueba que todas las rectas (1) son paralelas al plano:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -3 & 7 & -7 \\ -54 & -43 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

546. El punto medio, M, de [CD] viene definido por el vector $[\overrightarrow{OM}]$ tal que

$$2[\overrightarrow{CM}] = [\overrightarrow{CD}] \Leftrightarrow [\overrightarrow{OM}] - [\overrightarrow{OC}] = \frac{1}{2}([\overrightarrow{OD}] - [\overrightarrow{OC}]) \Leftrightarrow$$

$$[\overrightarrow{OM}] = \frac{1}{2}([\overrightarrow{OD}] + [\overrightarrow{OC}]),$$

luego:

$$[\overrightarrow{OM}] = \left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}, \frac{c_3 + d_3}{2} \right),$$

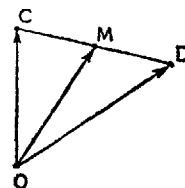


Fig. 26'

y por tanto, el plano mediador ABM tendrá por ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & \frac{c_1 + d_1}{2} & \frac{c_2 + d_2}{2} & \frac{c_3 + d_3}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & \frac{b_1 + c_1 + d_1}{3} & \frac{b_2 + c_2 + d_2}{3} & \frac{b_3 + c_3 + d_3}{3} \end{vmatrix} = 0$$

(La última ecuación se obtiene multiplicando la última fila de la ecuación anterior por $\frac{2}{3}$

y sumándole la anterior multiplicada por $\frac{1}{3}$). Los planos mediadores de aristas AC y AD se pueden escribir análogamente y se observará que en todos ellos la segunda y la cuarta filas son iguales, lo que prueba que los tres planos mediadores de aristas AB, AC y AD son incidentes con una misma recta AA', siendo A' el punto de intersección de esta recta con la cara opuesta al vértice A. Designando por $\mu(AB)$, $\mu(CD)$, etc., a los planos mediadores de aristas AB, CD, etc., y poniendo $g(A) = \mu(AB) \cap \mu(AC) \cap \mu(AD)$, se verifica que $G = g(A) \cap \mu(BC) \in \mu(BA) \cap \mu(BC) \cap \mu(BD)$ y, por tanto, $G \in \mu(CA) \cap \mu(CB)$

$\cap \mu(CD)$, luego G es incidente con los seis planos medidores. Obsérvese que la última de las ecuaciones anteriores puede escribirse en la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & \frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4} & \frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4} & \frac{a_3+b_3+c_3+d_3}{4} \end{vmatrix} = 0,$$

y la última fila es la misma para todos los planos medidores, lo que prueba que las coordenadas del baricentro son:

$$G = \left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}, \frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}, \frac{a_3+b_3+c_3+d_3}{4} \right).$$

El punto A' de intersección de AG con BCD es el baricentro del triángulo BCD y tiene por coordenadas:

$$A' = \left(\frac{b_1+c_1+d_1}{3}, \frac{b_2+c_2+d_2}{3}, \frac{b_3+c_3+d_3}{3} \right),$$

luego:

$$\frac{[AG]}{[AA']} = \frac{\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4} - a_1}{\frac{b_1+c_1+d_1}{3} - a_1} = \frac{\frac{b_1+c_1+d_1-3a_1}{4}}{\frac{b_1+c_1+d_1-3a_1}{3}} = \frac{3}{4}$$

547. De (60) y (54) resulta:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) (3, -1, 4, -2)' = (1, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} (3, -1, 4, -2)' = 0.$$

548. Las ecuaciones de la recta se pueden escribir en la siguiente forma:

$$(1, x_1, x_2, x_3) = (1, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

y teniendo en cuenta (53),

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) A = (1, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

o bien:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

549. Como en el plano, se comprueba que las relaciones del tetraedro son:

$$(1, x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) A$$

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0,$$

o bien, empleando coordenadas afines:

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0.$$

550. Tomando como sistema de referencia afín A B C D y teniendo en cuenta el resultado del ejercicio 546, las coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ de G, serán (54):

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \end{aligned}$$

551.

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda_1 & + 4\lambda_3 & + \lambda_5 \\ x_2 = & 3\lambda_2 + 4\lambda_3 & + 2\lambda_5 \\ x_3 = & & 5\lambda_4 + 3\lambda_5 \\ 1 = & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0, \lambda_5 \geq 0. \end{cases}$$

552. Como D y E están en un mismo semiespacio respecto del plano A B C, resulta que una cara es A B C. La ecuación del plano A B E es

$$18 - 9x_1 - 6x_2 + x_3 = 0,$$

sustituyendo en ella las coordenadas de D se obtiene un número positivo y sustituyendo las

de C se obtiene un número negativo, luego ABE no es cara, luego lo será ABD. La ecuación del plano ACE es

$$24 - 12x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0,$$

y B y D hacen positivo al primer miembro, luego ACE es otra cara. Análogamente, se comprueba que las otras caras son ADE, CBE y DEB.

553. Teniendo en cuenta que las caras son ABC, ABD, ACE, ADE, CBE y DBE, escribiendo las ecuaciones de estos planos, resultan las siguientes relaciones implícitas del poliedro:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 \geq 0 \\ 30 - 15x_1 - 10x_2 - 6x_3 \leq 0 \\ 24 - 12x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geq 0 \\ -20 + 10x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 0 \\ -36 - 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 0 \\ 15 + 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

554. Las coordenadas de los vértices serán: A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (-1, 0, 0), D = (0, -1, 0), E = (0, 0, 1), F = (0, 0, -1), luego las relaciones explícitas serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 \quad -\lambda_3 \\ x_2 = \lambda_2 \quad -\lambda_4 \\ x_3 = \lambda_5 - \lambda_6 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0, \lambda_5 \geq 0, \lambda_6 \geq 0. \end{array} \right.$$

555.

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ -1 - x_1 + x_2 + x_3 \leq 0 \\ -1 - x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ -1 + x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ -1 + x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\ -1 - x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\ -1 - x_1 - x_2 - x_3 \leq 0 \\ -1 + x_1 - x_2 - x_3 \leq 0. \end{array} \right.$$

556. Siendo (0, 0, 0), (1, 0, 0) y (0, 1, 0) las coordenadas de O, U₁, U₂, respectivamente, resulta que las coordenadas de A, B y C son

$$\left(0, 0, -\frac{a_0}{a_3}\right), \left(1, 0, -\frac{a_0 + a_1}{a_3}\right), \left(0, 1, -\frac{a_0 + a_2}{a_3}\right),$$

respectivamente. Tomando en el plano como sistema de referencia $R' = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ y $\overrightarrow{AA'} = a'_1 \overrightarrow{AB} + a'_2 \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB'} = b'_1 \overrightarrow{AB} + b'_2 \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC'} = c'_1 \overrightarrow{AB} + c'_2 \overrightarrow{AC}$, se verifica que $\overrightarrow{OA'_1} = a'_1 \overrightarrow{OU_1} + a'_2 \overrightarrow{OU_2}$, $\overrightarrow{OB'_1} = b'_1 \overrightarrow{OU_1} + b'_2 \overrightarrow{OU_2}$, $\overrightarrow{OC'_1} = c'_1 \overrightarrow{OU_1} + c'_2 \overrightarrow{OU_2}$, luego:

$$(A B C) R (A' B' C') \Leftrightarrow \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (O U_1 U_2) R (A'_1 B'_1 C'_1).$$

557. Teniendo en cuenta las coordenadas de A, B, C (véase el ej. anterior), resulta:

$$\begin{aligned} \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_3} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{a_0+a_1}{a_3} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{a_0+a_2}{a_3} \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} &= \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_3} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{a_0+a_1}{a_3} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{a_0+a_2}{a_3} \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \\ \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} x_1 + \frac{a_2}{a_3} x_2 + x_3 \end{vmatrix} &= \text{sig.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a_0}{a_3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a_1}{a_3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_0}{a_3} + \frac{a_1}{a_3} y_1 + \frac{a_2}{a_3} y_2 + y_3 \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow \text{sig.} (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) &= \text{sig.} (a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3). \end{aligned}$$

§ 3. EL ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO ORDINARIO

558. Sea la recta vectorial $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$. Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortonormal y $\mathbf{z}$ un vector ortogonal a todos los vectores de la recta, se verificará:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = \lambda (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0,$$

luego los vectores ortogonales a la recta vectorial $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$ son todas las soluciones de

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

que es un plano vectorial.

Sea $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ un plano vectorial. Si $\mathbf{z} = z_1 \mathbf{u}_1 + z_2 \mathbf{u}_2 + z_3 \mathbf{u}_3$ es ortogonal a $\mathbf{x}$, se verificará:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{z}) + \mu (\mathbf{b} \cdot \mathbf{z}) = 0, \quad \forall \lambda \text{ y } \forall \mu,$$

de donde

$$\begin{cases} a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = 0, \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 = 0, \end{cases}$$

y los vectores solución del sistema anterior forman una recta vectorial, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$z_1 = \lambda \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad z_2 = \lambda \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad z_3 = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

559. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base arbitraria, sea $g_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ y sea $\mathbf{v}_1 = v_{11} \mathbf{u}_1 + v_{12} \mathbf{u}_2 + v_{13} \mathbf{u}_3$. Sea $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{u}_3$ un vector ortogonal a $\mathbf{v}_1$. Se verificará:

$$(v'_1, v'_2, v'_3) (x_1, x_2, x_3)' = 0, \quad (v'_1, v'_2, v'_3) = (v_{11}, v_{12}, v_{13}) g.$$

Por consiguiente, el conjunto de todos los vectores ortogonales a $\mathbf{v}_1$ son las soluciones de la ecuación:

$$v'_1 x_1 + v'_2 x_2 + v'_3 x_3 = 0.$$

Una solución de esta ecuación es $\mathbf{w} = v'_2 \mathbf{u}_1 - v'_1 \mathbf{u}_2$. Los vectores ortogonales a $\mathbf{w}$ son las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} w'_1 x_1 + w'_2 x_2 + w'_3 x_3 &= 0, \quad (w'_1, w'_2, w'_3) = (v'_2, -v'_1, 0) g \\ &= (g_{11} v'_2 - g_{21} v'_1, \quad g_{12} v'_2 - g_{22} v'_1, \quad g_{13} v'_2 - g_{23} v'_1). \end{aligned}$$

El sistema

$$\begin{cases} v'_1 x_1 + v'_2 x_2 + v'_3 x_3 = 0, \\ w'_1 x_1 + w'_2 x_2 + w'_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

tiene como solución:

$$\mathbf{t} = \begin{vmatrix} v'_2 & v'_3 \\ w'_2 & w'_3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} v'_3 & v'_1 \\ w'_3 & w'_1 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} v'_1 & v'_2 \\ w'_1 & w'_2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3$$

El vector $\mathbf{t}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y a $\mathbf{t}$, luego los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{t}$ son ortogonales dos a dos. Los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|},$$

son unitarios, ya que $\mathbf{v}_2^2 = \frac{\mathbf{w}^2}{|\mathbf{w}|^2}$, $\mathbf{v}_3^2 = \frac{\mathbf{t}^2}{|\mathbf{t}|^2}$. Solución: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

560. El vector $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ cumple las condiciones pedidas, ya que es proporcional a $\mathbf{v}$, por lo que tiene su misma dirección, y

$$\left| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right| = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^2}{|\mathbf{v}|^2}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}} = 1.$$

$$561. \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \mathbf{u}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{u}_3 = -5 \mathbf{u}_1 - 14 \mathbf{u}_2 + 11 \mathbf{u}_3$$

es perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, luego un vector ortogonal y unitario será:

$$\frac{-5 \mathbf{u}_1 - 14 \mathbf{u}_2 + 11 \mathbf{u}_3}{\sqrt{342}}.$$

562. El vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es perpendicular a $\mathbf{x}$ y a $\mathbf{y}$, luego es perpendicular a todos los vectores coplanarios con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, luego $\mathbf{z}$ es coplanario con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{z} \perp \mathbf{x} \times \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$. Luego el lugar buscado son las soluciones de

$$-5 z_1 - 14 z_2 + 11 z_3 = 0.$$

$$\begin{aligned} 563. \quad \lambda [\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] &= \lambda [(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}] \\ &= \lambda [(6 + 5)(2, -1, 4) - (6, -4 - 4)(2, 0, -5)] \\ &= \lambda [(22, -11, 44) + (4, 0, -10)] = \lambda (26, -11, 34). \end{aligned}$$

564. Recordando que $\text{ár.}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}) = \frac{1}{2} [\mathbf{A} \mathbf{B}] [\mathbf{A} \mathbf{C}] \text{sen} [\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{C}]$, resulta:

$$\begin{aligned} \text{ár.}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}) &= \frac{1}{2} |\mathbf{b} - \mathbf{a}| |\mathbf{c} - \mathbf{a}| \text{sen}(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{2} |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 19^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \sqrt{674}. \end{aligned}$$

565. Observando que

$$\begin{aligned} \text{vol.}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}) &= \frac{1}{6} \text{vol.}(\overrightarrow{[\mathbf{A} \mathbf{B}]}, \overrightarrow{[\mathbf{A} \mathbf{C}]}, \overrightarrow{[\mathbf{A} \mathbf{D}]}) = \frac{1}{6} |\{ \overrightarrow{[\mathbf{A} \mathbf{B}]}, \overrightarrow{[\mathbf{A} \mathbf{C}]}, \overrightarrow{[\mathbf{A} \mathbf{D}]} \}| \\ &= \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 2 & -8 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} \right| = 2. \end{aligned}$$

566. El vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (-3, 3, 5)$ es perpendicular al plano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, luego el plano buscado es

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -3 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 4. EL ESPACIO EUCLÍDEO

567. a) $\mathbf{v} = (-2, 3)$. b) $(-3, 4)$. c) $(7, 5)$. d) $(1, 4)$.

568. a) $(3, 2)$. b) $(4, 3)$. c) $(5, -7)$. d) $(4, -1)$.

569. a) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, b) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, c) $\left(\frac{5}{\sqrt{74}}, \frac{-7}{\sqrt{74}}\right)$, d) $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$.

570. Los vectores $\overrightarrow{[AB]} = (1, 3)$ y $\overrightarrow{[CD]} = (4, 4)$ son paralelos a los vectores dados; luego, en virtud de (11), es:

$$\cos(A B, C D) = \frac{4 + 12}{\sqrt{10} \sqrt{32}} = \frac{16}{8 \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

571. $\overrightarrow{[AB]} = (2, -4)$, $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{r} = (-2, 3)$, luego:

$$\cos(A B, \mathbf{r}) = \frac{|-4 - 12|}{\sqrt{20} \sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{65}}.$$

572. $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{s} \parallel \mathbf{s}$, $\mathbf{r} = (-2, 5)$, $\mathbf{s} = (4, 2)$:

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{-8 + 10}{\sqrt{29} \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{145}}.$$

573. $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{s} \parallel \mathbf{s}$, $\mathbf{r} = (6, 5)$, $\mathbf{s} = (1, 2)$:

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{6 + 10}{\sqrt{61} \sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{305}}.$$

574. $\overrightarrow{[AB]} = (-3, 2)$. El vector $\mathbf{v} = (2, 3)$ es perpendicular a $\overrightarrow{[AB]}$, luego será paralelo a la recta pedida, luego ésta será:

$$x_1 = 2 + 2\lambda, \quad x_2 = -5 + 3\lambda.$$

575. La ecuación del haz engendrado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ es:

$$-2\lambda + \mu + (4\lambda + 2\mu)x_1 + (-\lambda + 3\mu)x_2 = 0.$$

Un vector perpendicular a $\mathbf{t}$ es $\mathbf{t} = (-5, 2)$, luego:

$$\frac{4\lambda + 2\mu}{-5} = \frac{-\lambda + 3\mu}{2},$$

de donde

$$\lambda = 19, \quad \mu = -3,$$

y la recta solución es

$$-41 + 70x_1 - 28x_2 = 0.$$

576. El vector $\mathbf{v} = (-2, 5)$ es perpendicular a r y el vector $\mathbf{s} = (3, -2)$ es perpendicular a s , luego:

$$\cos(r, s) = \frac{|-6 - 10|}{\sqrt{29} \sqrt{13}} = \frac{16}{\sqrt{377}}.$$

577. $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = (-2, 4)$, $\mathbf{b} = (3, -4)$:

$$\cos(a, b) = \frac{|-6 - 16|}{\sqrt{20} \sqrt{25}} = \frac{22}{10 \sqrt{5}} = \frac{11}{5 \sqrt{5}}.$$

Sean s y t las rectas solución:

$$s) \quad u_1(x_1 - 1) + u_2(x_2 - 1) = 0, \quad t) \quad v_1(x_1 - 1) + v_2(x_2 - 1) = 0.$$

$$\cos(r, s) = \frac{|-3u_1 + u_2|}{\sqrt{10} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{11}{5 \sqrt{5}},$$

de donde

$$125(9u_1^2 - 6u_1u_2 + u_2^2) = 121 \cdot 10(u_1^2 + u_2^2),$$

$$17u_1^2 + 150u_1u_2 + 217u_2^2 = 0,$$

$$u_1 = 31, u_2 = -17; \quad v_1 = 7, v_2 = -1,$$

luego las soluciones son:

$$s) \quad 31(x_1 - 1) - 17(x_2 - 1) = 0, \quad t) \quad 7(x_1 - 1) - (x_2 - 1) = 0.$$

578. El punto $P = u \cap e$ es $P = \left(\frac{2}{11}, -\frac{7}{11} \right)$. Sea v la recta simétrica de u :

$$v_1 \left(x_1 - \frac{3}{11} \right) + v_2 \left(x_2 + \frac{7}{11} \right) = 0.$$

se verificará

$$\cos(v, e) = \frac{|v_1 + 2v_2|}{\sqrt{5} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \cos(u, e) = \frac{|-4 + 6|}{\sqrt{5} \sqrt{25}} = \frac{2}{5 \sqrt{5}},$$

de donde

$$25(v_1^2 + 4v_1v_2 + 4v_2^2) = 4(v_1^2 + v_2^2),$$

$u = (-4, 8)$, $v = (-24, 7)$, luego la recta pedida es

$$-24\left(x_1 - \frac{3}{11}\right) + 7\left(x_2 + \frac{7}{11}\right) = 0.$$

579. El vector $r' = (5, -2)$ es paralelo a r y el vector $s = (5, -6)$ es perpendicular a s , luego:

$$\sin(r, s) = \frac{|25 + 12|}{\sqrt{29} \sqrt{61}} = \frac{37}{\sqrt{1769}}, \quad [r, s] \leq \frac{\pi}{2}.$$

580. Sea $B = (b_1, b_2)$ el simétrico de A . Se verificará que $AB \perp e$, de donde $[\overrightarrow{AB}] \parallel e$, $e = (-3, 2)$; y $\frac{1}{2}(a + b) \in e$, lo que proporciona las ecuaciones:

$$\frac{b_1 - 4}{-3} = \frac{b_2 + 5}{2}, \quad 2 - 3 \frac{4 + b_1}{2} + 2 \frac{-5 + b_2}{2} = 0,$$

de donde

$$B = \left(-\frac{68}{13}, \frac{15}{13}\right)$$

581. Ecuaciones paramétricas de la recta AC :

$$AC: \begin{cases} x_1 = 1 + 3\lambda \\ x_2 = 2 + 6\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad CA: \begin{cases} x_1 = 4 - 3\lambda \\ x_2 = 8 - 6\lambda \end{cases}$$

Los lados AB y AD tendrán por ecuaciones:

$$AB: \begin{cases} x_1 = 1 + d_1 \lambda \\ x_2 = 2 + d_2 \lambda \end{cases} \quad AD: \begin{cases} x_1 = 1 + e_1 \lambda \\ x_2 = 2 + e_2 \lambda \end{cases}$$

y se verificará que

$$\cos(AB, AC) = \cos(AD, AC) = \frac{|3d_1 + 6d_2|}{\sqrt{45} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

de donde

$$2(9d_1^2 + 36d_1d_2 + 36d_2^2) = 45(d_1^2 + d_2^2),$$

y

$$(d_1 = -1, d_2 = 3), \quad (e_1 = 3, e_2 = 1).$$

Por consiguiente, las rectas son:

$$\begin{aligned} AB: \begin{cases} x_1 = 1 - \lambda \\ x_2 = 2 + 3\lambda \end{cases} & \quad AD: \begin{cases} x_1 = 1 + 3\lambda \\ x_2 = 2 + \lambda \end{cases} \\ CD: \begin{cases} x_1 = 4 - \lambda \\ x_2 = 8 + 3\lambda \end{cases} & \quad CB: \begin{cases} x_1 = 4 + 3\lambda \\ x_2 = 8 + \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

582. Sea $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ el simétrico del punto $X = (x_1, x_2)$. Se verificará:

$$[\overrightarrow{XX^*}] \perp e \Leftrightarrow [\overrightarrow{XX^*}] \parallel e, e = (e_1, e_2) \Leftrightarrow \frac{x_1^* - x_1}{e_1} = \frac{x_2^* - x_2}{e_2}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}^*) \in e \Leftrightarrow e_0 + e_1 \frac{x_1 + x_1^*}{2} + e_2 \frac{x_2 + x_2^*}{2} = 0,$$

de donde:

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{(e_1^2 - e_2^2)x_1 + 2e_1e_2x_2 + 2e_0e_1}{e_1^2 + e_2^2} \\ x_2^* = \frac{2e_1e_2x_1 + (e_2^2 - e_1^2)x_2 + 2e_0e_2}{e_1^2 + e_2^2} \end{cases}$$

583. $\text{dist.}(P, r) = \frac{-1-3+8}{\sqrt{1+16}} = \frac{4}{\sqrt{17}} > 0$, y como $\text{dist.}(O, r) = \frac{-1}{\sqrt{17}} < 0$,
P y O están en distinto semiplano respecto de r .

584. Sean los puntos A, B, C de coordenadas (a_i) (b_i) (c_i) . Se verifica que la ecuación normal de la recta AB es

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}} = 0, \text{ luego}$$

$$\text{dist.}(A, B) \cdot \text{dist.}(C, AB) = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

585. Sea $C = (c_1, c_2)$ el punto dado, $X = (x_1, x_2)$ un punto del lugar, se verifica que:

$$\begin{aligned} X \in \text{la circunferencia} &\Leftrightarrow \text{dist.}(C, X) = r \Leftrightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{c}| = r \Leftrightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{c})^2 = r^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{c}^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2c_1x_1 - 2c_2x_2 + c_1^2 + c_2^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

586. En el ejercicio anterior se ha visto que la ecuación de la circunferencia es

$$x_1^2 + x_2^2 - 2c_1x_1 - 2c_2x_2 + c_1^2 + c_2^2 - r^2 = 0,$$

luego, para que la ecuación del enunciado sea la de una circunferencia será necesario y suficiente que

$$c = a^2 + b^2 - r^2$$

siendo r el radio de la circunferencia, de donde

$$r^2 = a^2 + b^2 - c > 0.$$

587. Se trata de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2a x_1 - 2b x_2 + c = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2a' x_1 - 2b' x_2 + c' = 0, \end{cases}$$

que es equivalente al:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2a x_1 - 2b x_2 + c = 0 \\ 2(a' - a)x_1 + 2(b' - b)x_2 + (c - c') = 0. \end{cases}$$

588. El trapecio es el A B D C. Sea $M = p. m. [A C]$ y $N = p. m. [B D]$, se verifica que

$$M = \left(\frac{1}{2} (a_1 + c_1), \frac{1}{2} (a_2 + c_2) \right), \quad N = \left(\frac{c_1 + \lambda(b_1 - a_1) + b_1}{2}, \frac{c_2 + \lambda(b_2 - a_2) + b_2}{2} \right),$$

luego:

$$\text{ár. (A B D C)} = \text{dist. (M, N)} \cdot \text{dist. (C, A B)} =$$

$$= \frac{\lambda + 1}{2} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}} = \frac{\lambda + 1}{2} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que si $\lambda = 0$, y D coincide con C, la fórmula es la del área del triángulo.

$$589. (\text{fig. 27'}) \text{ ár. (A B C D)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \\ 1 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \\ 0 & b_1 - d_1 & b_2 - d_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

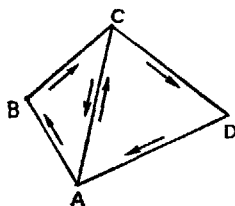


Fig. 27'.

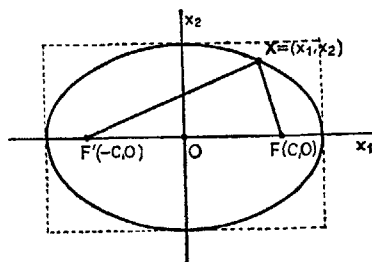


Fig. 28'.

590. Tomando el eje FF' como eje x_1 (fig. 28') y la mediatriz del segmento FF' como eje x_2 , y llamando $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ a las coordenadas de F y F' respectivamente, resulta:

$$r^2 = (x_1 - c)^2 + x_2^2, \quad r'^2 = (x_1 + c)^2 + x_2^2,$$

de donde

$$r'^2 - r^2 = (r' - r)(r' + r) = 4c x_1,$$

y como $r' + r = 2a$, por hipótesis, resulta:

$$\begin{cases} r' + r = 2a, \\ r' - r = \frac{2cx_1}{a}, \end{cases}$$

de donde

$$r' = \frac{a^2 + cx_1}{a}, \quad r = \frac{a^2 - cx_1}{a}$$

y

$$\frac{(a^2 - cx_1)^2}{a^3} = x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x_1^2 + a^2x_2^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $2c < 2a$, se verifica que existe un número b tal que $b^2 = a^2 - c^2$, con lo que la ecuación anterior se escribe:

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Se ha probado que $X \in$ a la elipse $\Rightarrow (x_1, x_2)$ verifican

(1) Es preciso probar también que: (x_1, x_2) verifican (1)
 $\Rightarrow X \in$ a la elipse. En efecto,

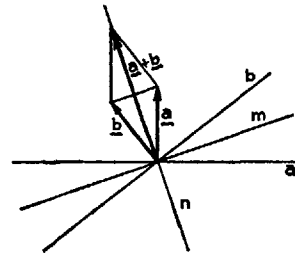


Fig. 29'.

$$\begin{aligned} FX = r &= \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} = \sqrt{x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + b^2} = \frac{1}{a} \sqrt{c^2x_1^2 - 2ca^2x_1 + a^4} = \frac{a^2 - cx_1}{a}. \end{aligned}$$

Análogamente, $F'X = r' = \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = \frac{a^2 + cx_1}{a}$ y sumando, $FX + F'X = 2a$.

591. Obsérvese que si a y b son vectores unitarios y perpendiculares a a y b , respectivamente (fig. 29'), el vector $a + b$ es paralelo a la bisectriz del ángulo $\widehat{a, b}$, y, por tanto, perpendicular a una de las bisectrices, m , del ángulo $\widehat{a, b}$ y que el vector $a - b$ es perpendicular al $a + b$, y, por tanto, perpendicular a la otra bisectriz, n , de $\widehat{a, b}$. Por tanto, las ecuaciones de las bisectrices son:

$$\frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = 0,$$

y

$$\frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} - \frac{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = 0.$$

592. Tomaremos como eje x_1 la recta FF' (fig. 30') y como eje x_2 la mediatriz del segmento FF' . Sean $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ las coordenadas de F y F' , respectivamente, y (x_1, x_2) las de un punto de la hipérbola. Se verifica:

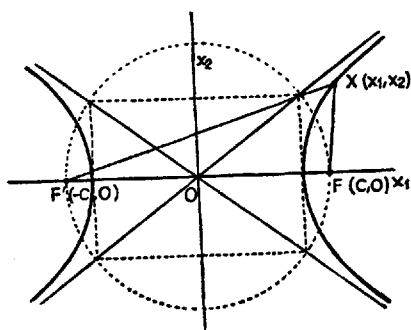


Fig. 30'.

$$r^2 = \text{dist.}^2(F, X) = (x_1 - c)^2 + x_2^2,$$

$$r'^2 = \text{dist.}^2(F', X) = (x_1 + c)^2 + x_2^2,$$

de donde

$$(r + r') |r - r'| = 4c |x_1|,$$

y

$$r + r' = \frac{2c |x_1|}{a}, \quad |r - r'| = 2a.$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 > 0 &\Rightarrow r + r' = \frac{2cx_1}{a}, \quad r - r' = 2a \Rightarrow r = \frac{cx_1 - a^2}{a}, \quad r' = \frac{a^2 + cx_1}{a} \\ x_1 < 0 &\Rightarrow r + r' = -\frac{2cx_1}{a}, \quad r - r' = 2a \Rightarrow r = \frac{a^2 - cx_1}{a}, \quad r' = -\frac{a^2 + cx_1}{a} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{|cx_1 - a^2|}{a} \\ r' = \frac{|a^2 + cx_1|}{a} \end{cases}$$

y teniendo en cuenta el valor hallado anteriormente para r^2 :

$$\frac{(cx_1 - a^2)^2}{a^2} = x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Como en el caso de la elipse se comprueba que todo punto que verifica esta última ecuación pertenece a la hipérbola.

593. Tomaremos como eje x_1 la recta FF' y como eje x_2 la mediatriz del segmento FF' . Sea $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, $X = (x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} X \in \text{al óvalo} &\Leftrightarrow \text{dist.}(F, X) \cdot \text{dist.}(F', X) = \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = a^2 \\ &\Leftrightarrow [(x_1^2 + x_2^2 + c^2 - 2cx_1)(x_1^2 + x_2^2 + c^2 + 2cx_1)] - a^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2 + c^2)^2 - 4c^2x_1^2 - a^4 = 0. \end{aligned}$$

594. Eje x_1 el FF' , eje x_2 la mediatriz del segmento FF' . $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$.

$$\begin{aligned} a \text{ dist.}(F, X) \pm b \text{ dist.}(F', X) = l &\Leftrightarrow a \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} \pm b \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = l \\ &\Leftrightarrow [(a^2 + b^2)(x_1^2 + x_2^2 + c^2) + 2(b^2 - a^2)cx_1 - l^2]^2 = 4a^2b^2[(x_1^2 + x_2^2 + c^2)^2 - 4c^2x_1^2]. \end{aligned}$$

595. Las fórmulas que habrá que aplicar serán las inversas de las (27), ya que los datos son las coordenadas de O' respecto de R , luego:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) & \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) \\ 0 & \cos(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) & \cos(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{8}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

596. El eje x_2^* tiene por ecuación respecto de R :

$$4(x_1 - 5) + 3(x_2 - 1) = 0,$$

luego el punto O' es el punto: $\left(\frac{77}{25}, \frac{89}{25}\right)$, $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

(Obsérvese que, por ser $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{4}{5} > 0$, el ángulo $\widehat{\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1}$ es agudo, y por ser

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

la orientación $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ es igual a la $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.) Procediendo como en el caso anterior, será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{77}{25} & \frac{89}{25} \\ 0 & \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2 \\ 0 & \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{77}{25} & \frac{89}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{23}{5} & -\frac{27}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

597. $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. $\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Como x_1 y x_2 son negativos se verifica que $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

598. $\rho = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. pero como $x_1 > 0$ y $x_2 < 0$, será $\varphi = \frac{11\pi}{6}$.

599. Empleando coordenadas polares, respecto del sistema $(P, P O, \sigma)$, σ arbitrario, y llamando (ρ, φ) a las coordenadas de un punto de la cisoide, resulta:

$$\rho = \frac{2r}{\cos \varphi} \pm 2r \cos \varphi.$$

que es la ecuación de la cisoide en coordenadas polares. Pasando a coordenadas cartesianas, se obtiene (34):

$$x_1(x_1^2 + x_2^2) - 2rx_2^2 = 0.$$

600. Tomando O como polo y la semirrecta de origen O perpendicular a y como origen, se obtiene como ecuación de la conchoide:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm l,$$

o bien, en coordenadas cartesianas:

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_1 - a)^2 = l^2 x_1^2.$$

601. De (5) se deduce que

$$\begin{aligned} X \in \text{la superficie esférica} &\Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2. \\ \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 - 2a_3x_3 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2 &= 0, \end{aligned}$$

que es la ecuación de la superficie esférica.

602. Para que la ecuación dada represente una superficie esférica de centro $A=(a_1, a_2, a_3)$ y radio r , es necesario y suficiente que

$$r^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4 > 0.$$

603. En virtud de 2 y de (4), resulta:

$$\cos(a, b) = \frac{|-12 + 2 - 1|}{\sqrt{9+4+1} \sqrt{16+1+4}} = \frac{11}{\sqrt{294}}.$$

604. El vector $d = (-3, 2, 1)$ es paralelo a a y el vector:

$$d' = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (7, 7, 14) = 7(1, 1, 2)$$

es paralelo a c), luego

$$\cos(a, c) = \frac{|-3+2+2|}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{21}}.$$

605. El vector $d' = (1, 1, 2)$ es paralelo a c y el vector $d'' = (-1, 3, -1)$ es paralelo a r), luego:

$$\cos(c, r) = \frac{|-1+3-2|}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = 0,$$

luego $c \perp r$.

606. Si A y B son dos puntos incidentes con la recta que se busca, verificarán ambos la ecuación de π , luego se verificará que

$$3(a_1 - b_1) - 8(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = 0,$$

y como $\overrightarrow{[BA]}$ es un vector paralelo a la recta solución, será perpendicular al vector $d = (-3, 2, -1)$, luego:

$$-3(a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2) - (a_3 - b_3) = 0,$$

luego un vector de la recta AB es $(6, 0, -18) = 6(1, 0, -3)$, y un punto, el P de intersección de a con π :

$$P = \left(\frac{31}{26}, \frac{20}{13}, \frac{97}{26} \right),$$

luego las ecuaciones de las rectas solución son:

$$x_1 = \frac{31}{26} + \lambda, \quad x_2 = \frac{20}{13}, \quad x_3 = \frac{97}{26} - 3\lambda$$

607. El vector

$$u = \overrightarrow{[AB]} \times \overrightarrow{[AC]} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \right) = (-7, -2, 13)$$

es perpendicular al plano ABC y el vector

$$v = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-7, 1, 5)$$

es perpendicular a π , luego:

$$\cos(ABC, \pi) = \frac{|49 - 2 + 65|}{\sqrt{222}\sqrt{75}} = \frac{112}{15\sqrt{74}}$$

608. Se ha visto en el ejercicio anterior que $\mathbf{v} = (-7, 1, 5)$ es normal a π . Como $\mathbf{t} = (-3, 1, -2)$ es normal a σ , resulta:

$$\cos(\pi, \sigma) = \frac{|21 + 1 - 10|}{\sqrt{75} \sqrt{14}} = \frac{12}{5\sqrt{42}}$$

609. El vector $\mathbf{t} = (-3, 1, -2)$ es perpendicular a σ y, por tanto, paralelo al plano que se busca, luego la ecuación de este plano será:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3\lambda - 3\mu \\ x_2 = 1 + 2\lambda + \mu \\ x_3 = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases}$$

610. El haz de planos de base c es

$$2\lambda + \mu + (\lambda + 4\mu)x_1 + (-3\lambda + 2\mu)x_2 + (\lambda - 3\mu)x_3 = 0.$$

el vector $(\lambda + 4\mu, -3\lambda + 2\mu, \lambda - 3\mu)$ es perpendicular al plano anterior, luego en el caso del plano solución, estará en el plano π , y el producto mixto de este vector y de los vectores $(2, -1, 3)$ $(1, 2, 1)$ del plano π será cero:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 4\mu & -3\lambda + 2\mu & \lambda - 3\mu \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 5\lambda + 41\mu = 0,$$

luego el plano buscado es $11 + 3x_1 - 19x_2 + 8x_3 = 0$.

611. Los planos bisectores serán incidentes con la recta r , luego pertenecerán al haz

$$4\lambda + 3\mu + (2\lambda - \mu)x_1 + (\lambda - \mu)x_2 + (-5\lambda + 4\mu)x_3 = 0.$$

El vector $(2, 1, -5)$ es perpendicular al primer plano y el vector $(-1, -1, 4)$ lo es al segundo, luego un vector que esté en la bisectriz del ángulo de estos dos vectores será perpendicular a un plano bisector, y el que esté en la bisectriz del ángulo formado por uno de ellos y el opuesto al otro será perpendicular al segundo plano bisector. Ahora bien, estos vectores son las sumas de los vectores unitarios correspondientes a los vectores anteriores, luego un vector normal al primer plano bisector será:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}} \right) = \left(2\frac{1}{\sqrt{30}} - \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{30}} - \frac{1}{\sqrt{18}}, -5\frac{1}{\sqrt{30}} + 4\frac{1}{\sqrt{18}} \right)$$

y el plano bisector correspondiente será:

$$\frac{4 + 2x_1 + x_2 - 5x_3}{\sqrt{30}} + \frac{3 - x_1 - x_2 + 4x_3}{\sqrt{18}} = 0,$$

y el otro plano bisector será:

$$\frac{4 + 2x_1 + x_2 - 5x_3}{\sqrt{30}} - \frac{3 - x_1 - x_2 + 4x_3}{\sqrt{18}} = 0.$$

612. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector perpendicular a la recta r que forme un ángulo de 30° con su proyección ortogonal sobre π . El vector $\mathbf{u}$ formará un ángulo de 60° con un vector perpendicular a π o con el opuesto a este vector, luego si tomamos $\mathbf{u}$ unitario, será:

$$2u_1 - u_2 + 3u_3 = 0, \quad \frac{-7u_1 + u_2 + 5u_3}{5\sqrt{3}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1,$$

de donde:

$$u_1 = \frac{-77\sqrt{3} \pm 6\sqrt{14}}{210}, \quad u_2 = \frac{14\sqrt{3} \pm 93\sqrt{14}}{420}, \quad u_3 = \frac{14\sqrt{3} \pm 3\sqrt{14}}{84},$$

luego los planos buscados son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 + 2\lambda + \frac{-77\sqrt{3} + 6\sqrt{14}}{210} \mu \\ x_2 = 2 - \lambda + \frac{14\sqrt{3} + 93\sqrt{14}}{420} \mu \\ x_3 = -1 + 3\lambda + \frac{14\sqrt{3} + 3\sqrt{14}}{84} \mu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 + 2\lambda + \frac{-77\sqrt{3} - 6\sqrt{14}}{210} \mu \\ x_2 = 2 - \lambda + \frac{14\sqrt{3} - 93\sqrt{14}}{420} \mu \\ x_3 = -1 + 3\lambda + \frac{14\sqrt{3} - 3\sqrt{14}}{84} \mu \end{array} \right.$$

613. El vector $\mathbf{a} = (-3, 2, -1)$ es paralelo a la recta α y el vector $\mathbf{u} = (-3, 1, -2)$ es perpendicular al plano σ , luego:

$$\sin(\alpha, \sigma) = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{u}|} = \frac{9 + 2 + 2}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{13}{14}.$$

614.

$$\sin(\alpha, \pi) = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{14} \sqrt{75}} = \frac{18}{5\sqrt{42}}$$

615. Sea $\mathbf{a} = (1, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (4, 2, -3)$, $\mathbf{u} = (3, -8, 1)$. El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es paralelo a la recta c y $\mathbf{u}$ perpendicular a π , luego:

$$\sin(c, \pi) = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{21}{14\sqrt{111}} = \frac{3}{2\sqrt{111}}.$$

616. El vector $\mathbf{b} = (4, 1, 2)$ es paralelo a la recta, luego la ecuación del plano será:

$$4(x_1 - 5) + (x_2 + 2) + 2(x_3 - 4) = 0.$$

617. Los vectores $(2, 1, -5)$ y $(-1, -1, 4)$ son perpendiculares a la recta, luego paralelos al plano buscado, y el vector $[\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OX}]$ también es paralelo al plano, luego la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x_1 + 3 & x_2 - 6 & x_3 - 7 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$618. \quad \frac{x_1 + 7}{3} = \frac{x_2 - 3}{-8} = \frac{x_3 + 4}{1}.$$

$$619. \quad \begin{cases} 2(x_1 - 4) - (x_2 + 8) + 3(x_3 - 9) = 0, \\ x_1 - 4 + 2(x_2 + 8) + x_3 - 9 = 0, \end{cases}$$

620. El vector

$$\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

es normal al plano π , y el vector

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

es normal al plano y unitario, luego la distancia del punto al plano es:

$$\text{dist.}(P, \pi) = \left| (-2) \frac{-7}{5\sqrt{3}} + 3 \frac{1}{5\sqrt{3}} + (-5) \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

621. Se llama distancia de un conjunto a a otro b a la menor distancia de un punto de a a un punto de b . En el caso en que a y b sean rectas, este mínimo corresponde a la distancia entre los pies de la perpendicular común. Esta distancia es igual a la distancia de un punto cualquiera de la recta b a un plano paralelo a ella que pase por a ; por consiguiente, si llamamos α al plano paralelo a b trazado por a , se verifica que:

$$a: \begin{cases} x_1 = 2 - 3\lambda + 4\mu, \\ x_2 = 1 + 2\lambda + \mu, \\ x_3 = 4 - \lambda + 2\mu, \end{cases}$$

y, teniendo en cuenta el ejercicio anterior, llamando $\mathbf{a} = (-3, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (4, 1, 2)$, $\mathbf{B} = (0, -3, 5)$ y $\mathbf{A} = (2, 1, 4)$, se obtiene:

$$\text{dist.}(a, b) = \text{dist.}(\mathbf{B}, \alpha) = \frac{|\{\mathbf{B} - \mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{29}{5\sqrt{6}}.$$

622. El plano incidente con c y paralelo a r es:

$$3 + 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0,$$

el punto $Q = (-7, 10, 0)$ pertenece a r , luego la distancia entre las rectas es:

$$\text{dist.}(c, r) = \frac{|3 + 5(-7) - 10|}{\sqrt{25 + 1 + 4}} = \frac{42}{\sqrt{30}}$$

623.

$$\text{dist.}(A, BCD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{[BC]} \times \overrightarrow{[BD]}|} = \frac{\{\overrightarrow{[AB]}, \overrightarrow{[AC]}, \overrightarrow{[AD]}\}}{|\overrightarrow{[BC]} \times \overrightarrow{[BD]}|} = \frac{\{b-a, c-a, d-a\}}{|(c-b) \times (d-b)|}$$

624. $\text{dist.}(AB, CD)$

$$= \frac{[\overrightarrow{AC}] \cdot (\overrightarrow{[AB]} \times \overrightarrow{[CD]})}{|\overrightarrow{[AB]} \times \overrightarrow{[CD]}|} = \frac{\{c-a, b-a, d-c\}}{|(b-a) \times (d-c)|} = \frac{\{c-a, b-a, d-a\}}{|(b-a) \times (d-c)|}$$

625. El vector $\mathbf{m} = (-7, 5, 2)$ es paralelo a AB , el vector $\mathbf{n} = (9, 13, 14)$ es paralelo a CD . El punto $P = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ pertenece a AB y el punto $Q = \left(0, -\frac{2}{9}, -\frac{7}{9}\right)$ pertenece a CD , luego:

$$\text{dist.}(AB, CD) = \frac{|\{\overrightarrow{[PQ]}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}|}{|\mathbf{m} \times \mathbf{n}|}, \quad \overrightarrow{[AB]} = \frac{2\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}, \quad \overrightarrow{[CD]} = \frac{3\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|},$$

de donde

$$|\overrightarrow{[AB]} \times \overrightarrow{[CD]}| = \frac{6}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|,$$

luego:

$$\text{vol.}(ABCD) = \frac{|\{\overrightarrow{[PQ]}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{13}{18} & -\frac{7}{9} \\ -7 & 5 & 2 \\ 9 & 13 & 14 \end{vmatrix}}{\sqrt{78} \sqrt{446}}$$

626. Sean los planos de las caras:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, & \text{b) } b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \\ \text{c) } c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0, & \text{d) } d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0. \end{array}$$

Sea P el punto de intersección de los planos a , b y c y (p_1, p_2, p_3) sus coordenadas. Si $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ y h_p es la altura correspondiente al vértice P , se verificará:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0, \\ b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 = 0, \\ c_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 = 0, \\ d_0 - |\mathbf{d}| h_p + d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 = 0, \end{array} \right.$$

de donde, eliminando p_1, p_2, p_3 , resulta:

$$h_p = - \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{d}| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

627. Las ecuaciones, de una posible solución, del cambio de coordenadas serán:

$$x_1^* = \frac{2 - x_1 + 3x_2 - 5x_3}{\sqrt{35}} \quad x_2^* = \frac{1 + x_1 + 2x_2 + x_3}{\sqrt{6}} \quad x_3^* = \frac{13x_1 - 4x_2 - 5x_3}{\sqrt{210}}$$

628. $\cos \theta = -\frac{5}{\sqrt{210}}$. Como el determinante de la matriz de los coeficientes de x_1, x_2, x_3 en la ecuación del ejercicio anterior es $+1$, los dos sistemas de referencia tienen la misma orientación, luego $\epsilon = 1$, y, por tanto, $\operatorname{tg} \psi = -\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{13}{4}$. Quedan por discutir las soluciones de estas ecuaciones trigonométricas.

$$629. \quad \rho = 6, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-5}{\sqrt{11}}, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi.$$

630. Teniendo en cuenta que deben emplearse todas las horas de mano de obra de que se dispone al mes, el problema da lugar al siguiente sistema de relaciones:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 60x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leq 200, \\ 30x_1 + 50x_2 + 40x_3 \leq 200, \\ 60x_1 + 80x_2 + 40x_3 = 12.000, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

en donde x_1, x_2, x_3 son los números de unidades de cada producto que se deben fabricar, con la condición de que

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

sea máximo.

Las relaciones (1) son equivalentes a:

$$(2) \quad \begin{cases} x_3 = 300 - \frac{3}{2}x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ 15x_1 - 40x_2 + 2.800 \leq 0, \\ 30x_1 + 30x_2 - 3.800 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La función de costo, expresada mediante las variables x_1 y x_2 , es:

$$(3) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -6x_1 - 10x_2 + 600 = F(x_1, x_2).$$

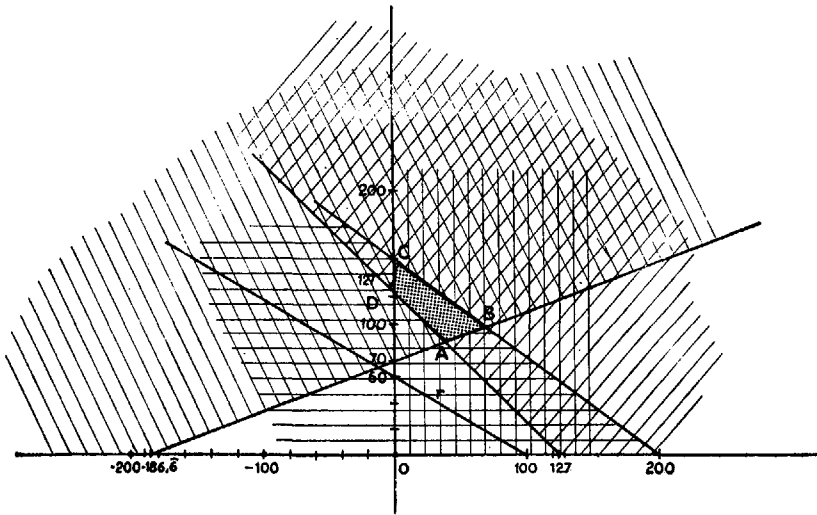


Fig. 31'

Ahora bien, las relaciones (2) definen el polígono convexo ABCD (fig. 31'). Se trata, por tanto, de hallar un punto del polígono ABCD que haga máxima la función $F(x_1, x_2)$. Recordando que el valor de $F(x_1, x_2)$ en el punto P es proporcional a la distancia de P a la recta $F(x_1, x_2) = 0$, si r es la recta $F = 0$, observando que el semiplano que contiene al origen es positivo y que, por tanto, el que contiene al polígono es negativo, resulta que el mayor valor de $F(x_1, x_2)$ corresponden al punto en el que $F(x, y)$ tenga menor valor absoluto, esto es, al que se halle más próximo a la recta r ; luego, colocando una escuadra en r y deslizándola paralelamente a sí misma hasta que toque a un punto del polígono ABCD, se obtiene que este punto es el vértice A, luego la solución viene dada por las coordenadas de A, que son $x_1 = 41$, $x_2 = 85$, y la primera ecuación (2) proporciona $x_3 = 68$. Luego la solución es:

$$x_1 = 41, x_2 = 85, x_3 = 68; \quad f(x) = 701.000 \text{ ptas.}$$

631. La región R es el segmento de recta AB (fig. 32'). La recta $f = 0$ deja a R en un

mismo semiplano, que es el del origen de relación $f \leq 0$, luego el máximo corresponde al punto $A = (0, 2)$ y el mínimo al punto $B = (5, 0)$.

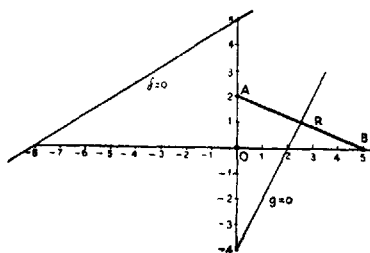


Fig. 32'.

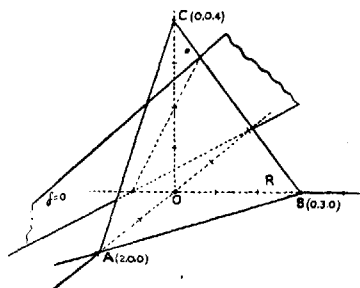


Fig. 33'.

632. La recta $g = 0$ (fig. 32') corta a la región R . El semiplano que contiene al origen es negativo, luego el máximo corresponde al punto $B = (5, 0)$ y el mínimo al $A = (0, 2)$.

633. La región R es el triángulo ABC (fig. 33'). El plano $f = 0$ deja a C en el semiespacio positivo y a A y B en el negativo, luego el máximo es el correspondiente al punto $C = (0, 0, 4)$ y el mínimo corresponde al punto $B = (0, 3, 0)$.

634. La región R es el segmento AB , $A = (2, 0, 3)$, $B = (1, 4, 0)$. $f(2, 0, 3) = -1$, $f(1, 4, 0) = 8$, luego el máximo corresponde a B y el mínimo a A .

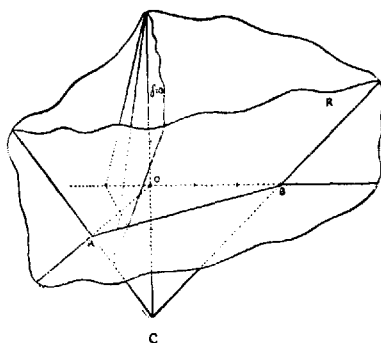


Fig. 34'.

635. La región R (fig. 34') está formada por la región angular de lados CA y CB menos el triángulo ABC , que posee dos únicos vértices, A y B , $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, y se verifica que $f(2, 0, 0) = 4$, $f(0, 3, 0) = -16$, el semiespacio que contiene el origen es negativo. No existe máximo ni mínimo.

636. Toda la región R se halla en el mismo semiespacio que el origen respecto del plano $f = 0$. Como $f(A) = -36$, $f(B) = -30$, verifica que existe máximo en B y no existe mínimo.

637. Las relaciones de R se pueden escribir en forma canónica del siguiente modo:

$$R: \begin{cases} 5x_1 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_5 = 24 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

En la expresión anterior se obtiene inmediatamente una base factible (x_4, x_5) . Como en la función de costo hay dos variables con coeficientes negativos, se elige cualquiera de ellas, por

ejemplo x_1 . En virtud de (14) hay que elegir: $\min. \left\{ \frac{15}{5}, \frac{24}{4} \right\} = 3$, y se puede escribir:

$$R: \begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 3 \\ 6x_1 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_2, x_3, x_4) = -2x_2 + \frac{11}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 - 7.$$

Como en la función de costo F_1 existe un término de las variables con coeficiente negativo, se puede continuar el proceso. $\min. (2) = 2$.

$$R: \begin{cases} x_2 + \frac{1}{10}x_3 - \frac{2}{15}x_4 + \frac{1}{6}x_5 = 2, \\ x_1 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = 3. \end{cases}$$

$$F_2(x_3, x_4, x_5) = \frac{12}{5}x_3 + \frac{2}{15}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - 11$$

Como todos los coeficientes de las variables en la función de costo son positivos, el mínimo corresponde al punto $P = (12, 2, 0)$ y el valor mínimo es $f(3, 2, 0) = -11$.

638. Como se trata de hallar un máximo, multiplicaremos la función de costo por -1 , y tomaremos como nueva función de costo:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2.$$

Los datos del problema conviene escribirlos en la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 & = & 18 \\ 4x_2 + 8x_3 + x_4 + x_6 & = & 24 \\ 5x_1 + 6x_3 + 2x_4 + x_7 & = & 30 \\ \hline x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 & = & F - 2 \end{array}$$

El término de la función de costo con menor coeficiente es $-3x_4$, luego convendrá introducir la variable x_4 en la nueva base factible. Dividiendo los segundos miembros por los coeficientes de x_4 se obtiene la sucesión: $\{3, 24, 15\}$ y el mínimo positivo es 3, luego se tomará la primera ecuación. El segundo paso proporciona:

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5 + x_4 & = & 3 \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{11}{3}x_2 + \frac{47}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_5 + x_6 & = & 21 \\ \frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{17}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 + x_7 & = & 24 \\ \hline 3x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 & = & F + 7 \end{array}$$

La nueva variable de la base será x_2 . Se obtiene la sucesión $\left(9, \frac{63}{11}, -16\right)$ cuyo mínimo positivo es $\frac{63}{11}$, luego se tomará la segunda ecuación, y se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} -\frac{2}{11}x_1 + \frac{47}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_5 + \frac{3}{11}x_6 + x_2 & & = \frac{63}{11} \\ \frac{8}{11}x_1 - \frac{6}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_5 - \frac{1}{11}x_6 & + x_4 & = \frac{12}{11} \\ \frac{39}{11}x_1 + \frac{78}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_5 + \frac{2}{11}x_6 & + x_7 & = \frac{306}{11} \\ \hline \frac{31}{11}x_1 + \frac{40}{11}x_3 + \frac{5}{11}x_5 + \frac{3}{11}x_6 & & = F + \frac{140}{11} \end{array}$$

Por consiguiente, el mínimo de la función F es $-\frac{140}{11}$ y es alcanzado en el punto

$P = \left(0, \frac{63}{11}, 0, \frac{12}{11}\right)$. Por consiguiente, el máximo de f es $\frac{140}{11}$ y es alcanzado en P .

639. La región R puede escribirse en forma canónica:

$$R: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Para hallar un vértice de R consideraremos la región:

$$R^*: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 + x_7 = 12 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

y la función de costo:

$$f^* = x_6 + x_7 = -6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 14$$

$$R^*: \begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 + x_1 = 1 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 = 8, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

$$f^*_1 = x_2 - 2x_4 - x_5 + 3x_6 + 8$$

$$R^*: \begin{cases} -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 - x_6 + \frac{1}{2}x_7 + x_4 = 4 \\ \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_7 + x_1 = 3 \end{cases}$$

$$f^*_2 = x_6 + x_7 = 0,$$

Juego un vértice de R es $P = (3, 0, 0)$ y

$$R = \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 + x_4 = 4 \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_5 + x_2 = 3 \\ f = 5x_2 + x_3 + x_5 = 16. \end{cases}$$

Como todos los coeficientes de las variables son positivos, el vértice buscado es $P = (3, 0, 0)$, y el mínimo de f es $f(P) = -16$.

Capítulo cuarto

§ 1. FORMAS BILINEALES. FORMAS CUADRÁTICAS

$$640. d(y)(x + x') = (x + x')A y = xA y + x'A y = d(y)(x) + d(y)(x').$$

$$d(y)(\lambda x) = (\lambda x)A y = \lambda(xA y) = \lambda[d(y)(x)].$$

$$641. d(y + y')x = xA(y + y') = xA y + xA y' = d(y)x + d(y')x \\ = [d(y) + d(y')]x, \forall x \Leftrightarrow d(y + y') = d(y) + d(y').$$

$$d(\lambda y)(x) = xA(\lambda y) = \lambda[xA y] = \lambda[d(y)(x)] = [\lambda d(y)](x) \forall x \Leftrightarrow d(\lambda y) = \lambda d(y).$$

Análogamente se prueba para s .

642.

$$s(x): (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d(y): (x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)'$$

643. Como $b = -2a$, se verifica que $E^0 = a^0$, luego la ecuación de E^0 es

$$(1, -3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)' = 0,$$

o bien

$$11y_1 + 6y_2 + 13y_3 = 0.$$

644. Como los vectores a y b son linealmente independientes, se verifica que

$$E^0: \begin{cases} 4y_1 - 3y_2 + 4y_3 = 0, \\ 9y_1 + 5y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$$

Como e depende linealmente de c y d , se verifica que:

$$F^0: \begin{cases} 13y_1 + 2y_2 + 5y_3 = 0, \\ 17y_1 + 8y_2 + 19y_3 = 0. \end{cases}$$

$E \cup F = \{a, b, c, d, e\}$. Como entre estos vectores únicamente son l.i. a, b, d , resulta que las ecuaciones de $(E \cup F)^0$ son las dos de E^0 y la segunda de F^0 . (Obsérvese que la primera de F^0 es la suma de las dos de E^0 .) Como $L(E) \cap L(F) = \lambda c$, resulta que $(L(E) \cap L(F))^0$ tiene por ecuación la primera de F^0 .

645. 1.º) Las ecuaciones de L^0 son:

$$L^0: \begin{cases} 2x_1 & + 11x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 & - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Los vectores comunes a L y L^0 se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de L y de L^0 , que es equivalente al sistema formado por las ecuaciones de L y

$$\begin{cases} 6\lambda - \mu = 0, \\ 3\mu = 0. \end{cases}$$

Como la única solución de este sistema es $\lambda = 0$, $\mu = 0$, resulta que $L \cap L^0 = \{0\}$.

2.º) Las ecuaciones paramétricas de L^0 son

$$\begin{cases} x_1 = -33\lambda - 30\mu, \\ x_2 = 24\lambda + 18\mu, \\ x_3 = 6\lambda \\ x_4 = 6\mu, \end{cases}$$

luego, una base que cumple las condiciones pedidas, es: $u_1 = (1, -1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 2, -1, 0)$, $u_3 = (-33, 24, 6, 0)$, $u_4 = (-30, 18, 0, 6)$.

3.º) Las fórmulas del cambio de base son:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -33 & 24 & 6 & 0 \\ -30 & 18 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

y sustituyendo en la ecuación de A se obtiene:

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \left(\begin{array}{cc|cc} 54 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ \hline -225 & 126 & 954 & 2106 \\ -48 & 78 & 1476 & 1512 \end{array} \right) (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4).$$

646. a)

$$A(x, y) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -6 & -10 \\ -2 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \end{pmatrix} (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)'$$

b)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -6 & -10 \\ -2 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0),$$

son las ecuaciones implícitas del núcleo. El sistema anterior es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

y las ecuaciones explícitas correspondientes son:

$$x_1 = \lambda + 2\mu, \quad x_2 = \lambda + \mu, \quad x_3 = -\lambda, \quad x_4 = -\mu.$$

647. Si $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es la base dada de V , se puede tomar como nueva base:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_1 + v_2 - v_3 \\ u_4 = 2v_1 + v_2 - v_4 \end{cases}$$

con lo que las fórmulas del cambio de base serán:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La expresión de la forma cuadrática respecto de la nueva base será:

$$\begin{aligned} (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \\ &= (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

648.

$$(x_1^*, x_2^*) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} (x_1^*, x_2^*)'.$$

649. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ la base del espacio vectorial respecto de la que se ha escrito la expresión de Q . El vector $\mathbf{v}_1$ no es singular, ya que $Q(\mathbf{v}_1) = 1 \neq 0$. La variedad ortogonal a la recta vectorial $[\mathbf{v}_1]$ es:

$$[\mathbf{v}_1]^0: (1, 0, 0) A (x_1, x_2, x_3)' = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 3x_3 = 0.$$

Un vector de $[\mathbf{v}_1]^0$ es $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 0)$. Este vector no es singular, ya que:

$$Q(\mathbf{w}_2) = (1, 1, 0) A (1, 1, 0)' = 1 \neq 0.$$

La variedad ortogonal a $[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{w}_2]$ tiene por ecuaciones implícitas:

$$([\mathbf{v}_1] + [\mathbf{w}_2])^0: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Un vector de $([\mathbf{v}_1] + [\mathbf{w}_2])^0$ es: $\mathbf{w}_3 = (6, 3, -1)$. Tomando como base: $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, las ecuaciones del cambio de base son:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

y la expresión de Q respecto de la base B' es

$$\begin{aligned} Q: (x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (x'_1, x'_2, x'_3)' \\ = (x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} (x'_1, x'_2, x'_3)'. \end{aligned}$$

650. Como tanto el rango como la signatura no dependen de la base, vamos a buscar una base respecto de la cual la forma cuadrática tenga forma diagonal. El vector $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$ no es singular. La variable lineal ortogonal a $\mathbf{u}_1$ es:

$$[\mathbf{u}_1]^0: x_1 - x_2 + 2x_4 = 0.$$

El vector $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$ pertenece a $[\mathbf{u}_1]^0$ y no es singular:

$$([\mathbf{u}_1] + [\mathbf{u}_3])^0: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$$

un vector de esta variedad, que no sea singular, es: $v_2 = (-1, 1, -1, 1)$. Finalmente,

$$([u_1] + [u_3] + [v_2])^0: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_2 - 6x_4 = 0, \end{cases}$$

luego el vector $v_4 = (1, 3, 0, 1)$ pertenece a la variedad anterior y no es singular. Tomando como nueva base $B = \{u_1, u_3, v_2, v_4\}$, se obtiene Q en la siguiente forma diagonal:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -4 & \\ & & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Mediante el nuevo cambio de base: $B \rightarrow \left(u_1, \frac{1}{\sqrt{2}} u_3, \frac{1}{2} u_3, \frac{1}{\sqrt{2}} u_4\right)$ se transforma la ecuación anterior en

$$(1) \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

luego el rango es igual a 4 y la signatura lineal igual a 2.

651. A partir de la expresión (1) de la forma cuadrática:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = (y_1 + y_3)(y_1 - y_3) + (y_2 + y_4)(y_2 - y_4),$$

resulta que

$$L = \begin{cases} y_1 + y_3 = 0, \\ y_2 + y_4 = 0, \end{cases} \quad L' = \begin{cases} y_1 - y_3 = 0, \\ y_2 - y_4 = 0, \end{cases}$$

son variedades lineales totalmente isotropas y $L \cap L' = \{0\}$.

652. a) El polinomio secular es:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & 5-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 36\lambda - 103,$$

luego la sucesión secular es

$$1, 4, -36, -103$$

y $P = 2$; $t = 0$, luego: rango = 3, signatura lineal = 2.

b) La sucesión secular es:

$$1, 8, 5, -4, 0,$$

luego $t = 1$, $P = 2$, y

$$\text{rango} = 4 - 1 = 3, \quad \text{signatura lineal} = 2.$$

653. a) La sucesión secular es:

$$1, 15, 53, 0,$$

luego $\text{rango} = 3 = \text{signatura lineal}$. La forma cuadrática es semidefinida positiva.

b) La sucesión secular es:

$$1, -11, 1, -144,$$

luego: $\text{rango} = 4$, $\text{signatura lineal} = 0$. La forma es definida negativa.

c) La sucesión secular es:

$$1, 17, 67, 2,$$

luego: $\text{rango} = \text{signatura lineal} = 4$. La forma es definida positiva.

d) La sucesión secular es:

$$1, -22, 69, 0,$$

luego: $\text{rango} = 3$, $\text{signatura lineal} = 0$. Se trata, por tanto, de una forma semidefinida negativa.

§ 2. CÓNICAS

$$654. \text{ a) Elipse real: } \frac{x^2}{\frac{443}{61(9+2\sqrt{5})}} + \frac{y^2}{\frac{443}{61(9-2\sqrt{5})}} = 1.$$

$$\text{ b) Hipérbola: } -\frac{x^2}{\frac{4}{2+\frac{\sqrt{65}}{2}}} + \frac{y^2}{\frac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}-2}} = 1.$$

$$\text{ c) Par de rectas paralelas imaginarias conjugadas: } 1 + 5y^2 = 0.$$

$$\text{ d) Par de rectas paralelas reales: } 29y^2 = -\frac{4}{29}.$$

$$\text{ e) Hipérbola: } x^2 - y^2 = 1.$$

$$\text{ f) Hipérbola: } -\frac{x^2}{\frac{318}{49\left(2+\frac{\sqrt{65}}{2}\right)}} + \frac{y^2}{\frac{318}{49\left(\frac{\sqrt{65}}{2}-2\right)}} = 1.$$

$$\text{ g) Par de rectas coincidentes: } y^2 = 0.$$

$$\text{ h) Par de rectas imaginarias conjugadas y secantes: } x^2 + y^2 = 0.$$

§ 3. CUÁDRICAS

655. a) Elipsoide imaginario: $\frac{1}{7} + x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 = 0$.

b) Hiperboloide elíptico: $5x_1^2 - 5x_2^2 - 25x_3^2 = 1$.

c) Hiperboloide hiperbólico: $-3x_1^2 + 3(3 - \sqrt{6})x_2^2 + 3(3 + \sqrt{6})x_3^2 = 1$.

d) Hiperboloide hiperbólico: $\frac{15}{17} - x_1^2 + \sqrt{17}x_2^2 - \sqrt{17}x_3^2 = 0$.

e) $L = -1$, $K = 2$, $J = 7$, $I = 6$. Elipsoide real. Ecuación reducida:

$$2x_1^2 + (5 + \sqrt{17})x_2^2 + (5 - \sqrt{17})x_3^2 = 1.$$

f) $L = 1$, $K = -4$, $J = -3$, $I = 4$. Signatura = 1, $\mathcal{L} > 0$: Hiperboloide hiperbólico.

g) $\mathcal{L} = 0$, $K = 1$, $J = 3$, $I = 3$. Cono imaginario. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

h) $L = 0$, $K = -1$, $J = -1$, $I = 1$. Cono real. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

i) $L = 0$, $K = 4$, $J = 11$, $I = 8$. Cono imaginario $x_1^2 + \frac{7 + \sqrt{33}}{2}x_2^2 + \frac{7 - \sqrt{33}}{2}x_3^2 = 0$.

j) $L = 0$, $K = -4$, $J = -9$, $I = -4$. Cono real. $x_1^2 - \frac{5 + \sqrt{41}}{2}x_2^2 + \frac{\sqrt{41} - 5}{2}x_3^2 = 0$.

k) $\mathcal{L} = 0$, $K = 0$, $J = -81$, $I = 7$, $\tilde{K} = 0$. Par de planos secantes reales.

$$(7 + \sqrt{133})x_1^2 - (\sqrt{133} - 7)x_2^2 = 0.$$

l) $L = 0$, $K = 4$, $J = -1$, $I = -6$. Cono real.

m) $\mathcal{L} = 0$, $K = 0$, $J = -59$, $I = 4$, $\tilde{K} = 0$. Par de planos secantes reales.

$$(\sqrt{63} + 2)x_1^2 - (\sqrt{63} - 2)x_2^2 = 0.$$

n) $\mathcal{L} = 0$, $K = -1$, $J = 0$, $I = 2$. Cono real, $x_1^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x_2^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x_3^2 = 0$.

p) $L = 0$, $K = 0$, $J = 2$, $I = 3$, $\tilde{K} = 0$. Planos imaginarios conjugados secantes.

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 0.$$

q) $\mathcal{L} = 0$, $K = 0$, $J = -2$, $I = -1$, $\tilde{K} = 0$. Par de planos reales secantes.

$$x_1^2 - 2x_2^2 = 0.$$

r) $L = 0$, $K = 0$, $J = 0$, $I = 11$, $\tilde{K} = 0$, $\tilde{J} = 0$. Planos coincidentes. $x_1^2 = 0$.

s) $L = 0$, $K = 0$, $J = 0$, $I = -1$, $\tilde{K} = 0$, $\tilde{J} = 0$. Planos coincidentes. $x_1^2 = 0$.

SEGUNDA PARTE

ANALISIS INFINITESIMAL

Capítulo quinto

§ 1. EL NÚMERO REAL

656. a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$. c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$. d) $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$. e) $1, 4, 9$. f) $\frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{10}$. g) $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}$. h) $1, 2, \frac{5}{2}$. i) $3, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}$

657. a) $2n+1$. b) $2n$. c) $7n$. d) 2^n . e) n^2 . f) 10^n . g) $(-1)^n \frac{1}{n}$. h) $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.

658. a) $5, 9, 13, 17, \dots$. b) $10, 19, 28, 37, \dots$. c) $3, 8, 17, 32, \dots$

659. a) $(a+b)(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. b) $(c+d)(n) = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. c) $(b+e)(n) = \frac{1}{n^2} + n^2$. d) $(e+f)(n) = n^2 + \frac{2n-1}{3n+1}$.

660. a) $6, 20, 42, 72, \dots$. b) $8, 20, 63, 144, \dots$. c) $-1, 2, -3, 4, \dots$

661. a) $ae(n) = n$. b) $be(n) = 1$. c) $ce(n) = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!}$. d) $df(n)$

$= \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)(3n+1)}$. e) $ck(n) = \frac{\sqrt[n]{2n+1}}{n!}$.

662. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Sea $n' > n'' > n$. Se verifica que $\left| \frac{1}{n'} - \frac{1}{n''} \right| = \frac{1}{n''} - \frac{1}{n'} < \frac{1}{n''} < \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$, luego bastará tomar $n = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$, siendo $\left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ la parte entera del número $\frac{1}{\epsilon}$.

663. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Sean $n' > n'' > n$. Se verifica que $\left| \frac{\epsilon n'}{n'+1} - \frac{2n''}{n''+1} \right| = \frac{2(n'-n'')}{(n'+1)(n''+1)} = \frac{n'-n''}{n'+1} \frac{2}{n''+1} < \frac{2}{n''+1} < \frac{2}{n+1} < \epsilon \Rightarrow n+1 > \frac{2}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{2}{\epsilon} - 1$, luego bastará tomar $n = \left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil$.

664. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Sean $n' > n'' > n$. Se verifica que $\left| \frac{1}{n'r} - \frac{1}{n''r} \right| = \frac{1}{n''r} - \frac{1}{n'r} < \frac{1}{n''r} < \frac{1}{n'r} < \epsilon \Rightarrow n' > \frac{1}{\epsilon}, n > \frac{1}{r\sqrt{\epsilon}}$, luego $n = \left\lceil \frac{1}{r\sqrt{\epsilon}} \right\rceil + 1$.

665. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Sean $n' > n'' > n$. Se verifica que $\left| \frac{1}{r^{n'}} - \frac{1}{r^{n''}} \right| = \frac{1}{r^{n''}} - \frac{1}{r^{n'}} < \frac{1}{r^{n''}} < \frac{1}{r^n} < \epsilon$ si $r \geq 1$, luego $\left| \frac{1}{r^{n'}} - \frac{1}{r^{n''}} \right| < \frac{1}{r^n} = \frac{1}{r^n} < \epsilon \Rightarrow r^n > \frac{1}{\epsilon} n \log r > -\log \epsilon, n > -\frac{\log \epsilon}{\log r} \Rightarrow n = \left\lceil -\frac{\log \epsilon}{\log r} \right\rceil + 1$.

666. a) Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$, de donde $n(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$.

b) Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$ de donde $n(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$.

c) Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. $\left| \frac{1}{n^r} - 0 \right| = \frac{1}{n^r} < \epsilon \Leftrightarrow n^r > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow$ existe un número natural m tal que $m^r < \epsilon$, de donde $\frac{1}{m^r} > \frac{1}{\epsilon}$ y $n^r > \frac{1}{m^r} > \frac{1}{\epsilon}$ luego $n > \frac{1}{m} \Rightarrow n^r > \frac{1}{\epsilon}$, luego $n(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil + 1$.

d) Sea ϵ un número positivo arbitrario. $\left| \frac{1}{r^n} - 0 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{r^n} < \epsilon \Leftrightarrow r^n > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n \log r > -\log \epsilon \Leftrightarrow n > -\frac{\log \epsilon}{\log r} \Rightarrow n(\epsilon) = \left\lceil -\frac{\log \epsilon}{\log r} \right\rceil + 1$.

e) Sea ϵ un número positivo arbitrario. $\left| \frac{2n^2 - 1}{(n+1)(n+2)} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-6n-5}{(n+1)(n+2)} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{6n+5}{n^2+3n+2} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{6n+5}{n^2+3n+2} < \frac{6n+5}{n^2} = \frac{11}{n} < \epsilon, \Rightarrow n > \frac{11}{\epsilon} \Rightarrow n(\epsilon) = \left\lceil \frac{11}{\epsilon} \right\rceil + 1$.

667. Sea ϵ un número positivo arbitrario. $\left| \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^n + \dots + b_n} - \frac{a_0}{b_0} \right| < \epsilon \Leftrightarrow$
 $\frac{|(b_0 a_1 - a_0 b_1) x^{n-1} + \dots + (b_0 a_n - a_0 b_n)|}{|b_0^2 x^n + \dots + b_0 b_n|} < \frac{|b_0 a_1 - a_0 b_1| x^{n-1} + \dots + |b_0 a_n - a_0 b_n|}{|b_0^2 x^n + \dots + b_0 b_n|} < \epsilon.$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |b_0^2 x^n + b_0 b_1 x^{n-1} + \dots + b_0 b_n| &= x^n \left| b_0^2 + b_0 b_1 \frac{1}{x} + \dots + b_0 b_n \frac{1}{x^n} \right| \\ &> x^n \left(b_0^2 - c \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

para todo $x > \max. \left\{ \left| b_i \right| \frac{c}{b_0} \right\}$, siendo $0 < c < b_0^2$.

$$\frac{1}{|b_0^2 x^n + \dots + b_0 b_n|} < \frac{1}{(b_0^2 - c) x^n} < \frac{1}{b_0^2 x^n}.$$

Luego, si $A = |b_0 a_1 - a_0 b_1| + \dots + |b_0 a_n - a_0 b_n|$, será $\left| \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^n + \dots + b_n} - \frac{a_0}{b_0} \right| < \frac{A x^{n-1}}{b_0^2 x^n} < \epsilon$, siempre que $x > \max. \left\{ \left| b_i \right| \frac{c}{b_0} \right\}$, $0 < c < b_0^2$, luego $x(\epsilon) = \max. \left\{ \frac{A}{b_0^2 \epsilon}, \max. \left\{ \left| b_i \right| \frac{c}{b_0} \right\} \right\} + 1$.

668. a) $|0 - 0_n| = 0, \forall n$. b) $|0 - a_n| = 0, \forall n > 1.000.000$. c), d) y e) se han probado en el ejercicio 666. f) $\left| 0 - \frac{1}{n!} \right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} < \epsilon, \forall n > \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$.

669. Si u_n es convergente, dado un número positivo arbitrario ϵ existe un n tal que para todos n' y $n'' > n$ es $|u_{n'} - u_{n''}| < \epsilon$. Como la sucesión posee infinitos ceros se podrá tomar $u_{n''} = 0$.

670. Es consecuencia del anterior.

671. No, porque posee infinitos ceros y no es nula, ya que los términos no nulos son todos mayores que $\frac{1}{3}$.

672. Como la sucesión $1, 0, 2, 0, \dots, 99, 0, 0, \dots$ es nula, se verifica que la clase dada es igual a la clase.

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \right) + p_0.$$

673. Siendo $\frac{1}{n}$ una sucesión nula, se verifica que $u_n - \frac{1}{n}$ es nula.

674. Basta probar que la sucesión representante es convergente. En efecto, sea ϵ un número positivo arbitrario:

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} \right) - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right| = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n'(n'-n-1)} \right) < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{(n+2)^{n'-n-1}} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^{n'-n}}}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{2}{(n+1)!} \\ & < \frac{2}{n+1} < \epsilon \Rightarrow n+1 > \frac{\epsilon}{2}, \quad n(\epsilon) = \left\lceil \frac{\epsilon}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

675. Demostrar que dichos números reales son iguales equivale a probar que la sucesión

$$d_n = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} \right) - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

es nula. Ahora bien:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^{(2)}}{n^2} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{n^{(3)}}{n^3} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{n^{(n)}}{n^n} \right) \\ &< \frac{1}{2n} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(n-2)!} \right) < \frac{M}{2n} < \epsilon \Rightarrow n(\epsilon) = \left\lceil \frac{\epsilon M}{2} \right\rceil + 1. \end{aligned}$$

siendo M una cota superior de la sucesión $1 + 1 + \dots + \frac{1}{n!}$.

676. Basta probar que la sucesión a_n es convergente. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Sea $n < n' < n''$:

$$\begin{aligned} |a_{n''} - a_n| &= 0, 0 \dots 0 \ b_{n'+1} \dots b_{n''} = 10^{-n'} \times 0, \ b_{n'+1} \dots b_{n''} < 10^{-n'} < \epsilon \Rightarrow n(\epsilon) \\ &= [-L(\epsilon)] + 1, \end{aligned}$$

siendo $L(\epsilon)$ el logaritmo decimal de ϵ .

677. Esto equivale a probar que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión nula:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[1 + \frac{1}{n} - 1\right] = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{M}{n}$$

$$< \epsilon \Rightarrow n(\epsilon) = [\epsilon M] + 1,$$

siendo M una cota de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

678. $\frac{1}{e} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} + p_0 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} + p_0 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + p_0.$

679. $e^a = e \dots e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a n} + p_0.$

680. $1, 0 \dots 01 - 0, 9 \dots 9 = 0, 0 \dots 02 = 2 \times 10^{-n} < \epsilon \Rightarrow n(\epsilon) = \left[-L \frac{\epsilon}{2}\right] + 1.$

681. La regla de extraer raíces cuadradas permite obtener en todos los casos una sucesión decimal: $a, a_1 \dots a_n$, tal que, si el número dado es m , se verifique que

$$m - (a, a_1 \dots a_n)^2 < 10^{-n},$$

luego, si $n' < n''$, $|a, a_1 \dots a_{n''} - a, a_1 \dots a_{n'}| \leq 0, 0 \dots 0 a_{n'+1} \dots a_{n''} < 10^{-n'} \Rightarrow n(\epsilon) = [-L \epsilon] + 1.$

682. a) $-90 + \frac{100n - 1000}{n+1} > r > 0 \Leftrightarrow (10 - r)n > 1090 + r$, luego tomando $r=1$, $n > \frac{1091}{9}$, luego $\forall n > 122$ es $-90 + \frac{100n - 1000}{n+1} > 1$, luego el número es positivo.

b) Siendo la sucesión convergente y con infinitos términos positivos y negativos, es una sucesión nula, luego el número de b) es cero.

683. a) $\frac{1}{100}$. b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}(a) = a$, luego no es entorno de a .

684. Si $E_{\epsilon}(a) \cap E_{\delta}(b) = \emptyset$ ya está demostrado. Sea $x \in E_{\epsilon}(a) \cap E_{\delta}(b)$. De $|a - b| \leq |a - x| + |x - b| < \epsilon + \delta$, resulta que, si $a \leq b$, es $a + \epsilon \geq b - \delta$. Si $m = \max.(a - \epsilon, b - \delta)$ y $M = \min.(b + \delta, a + \epsilon)$, se verifica que $E_{\epsilon}(a) \cap E_{\delta}(b) = (m, M)$.

685. a) Sí, por ser unión de los intervalos $(n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Sí, por ser unión de los intervalos $(n, n+2)$ y $(n+1, n+3)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

c) No, porque si fuese un abierto el número cero pertenecería a un intervalo contenido en el conjunto.

d) Sí, por ser unión de los intervalos $\left(\frac{1}{(n-1)^2}, \frac{1}{n^2}\right)$.

e) No, pues cada uno de ellos debería pertenecer a un intervalo, luego habría infinitos puntos.

f) No, porque cada uno de ellos debería pertenecer a un intervalo contenido en el conjunto y en cualquier intervalo hay un número racional.

g) No, por análoga razón.

686. a) Sea el segmento $[m, n]$, $m < n$, y sea $a = [m] - 1$, $b = [n] + 1$. Se verifica que $R - [m, n] = (a - 1, m) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} (a - i, a - i - 2) \cup (n, b + 1) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} (b + i, b + i + 2)$, luego $R - [m, n]$ es un abierto.

b) Sí, puesto que $R - \{x\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} (x + i, x + i + 2) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} (x - i, x - i - 2)$.

c) Sí, puesto que $(a, b) - \{p\} = (a, p) \cup (p, b)$, $p \in (a, b)$.

687. a) Sí, porque en todo entorno de 5 está el cinco que pertenece al intervalo $(1, 6)$.

b) Sí, por la misma razón.

c) Sí, porque en todo entorno de 3 hay números menores a 3, que, por tanto, pertenecen al intervalo $(1, 3)$.

d) Sí, porque el límite de la sucesión es cero y, por tanto, en todo entorno de cero existe un término de la sucesión.

688. a) $\bar{A} = [m, n]$. b) $\bar{B} = B \cup \{0\}$. c) $\bar{C} = [0, 1]$. d) $\bar{D} = [0, 1]$. e) $\bar{E} = E \cup \{0, 1; 0, 01; \dots; 0, 0 \dots 01; \dots\}$. f) $\bar{F} = F \cup \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right\}$.

689. a) $\bar{A} = A \Rightarrow A$ es cerrado. b) $\bar{B} = B \cup \{1, -1\} \Rightarrow B$ no es cerrado. c) C es cerrado. d) $\bar{D} = \bar{D} \cup \{1\} \Rightarrow D$ no es cerrado. e) $\overline{R - (0, 1)} = R - (0, 1) \Rightarrow R - (0, 1)$ es cerrado. f) $\overline{R - [0, 1]} = R - (0, 1) \Rightarrow R - [0, 1]$ no es cerrado. g) $\bar{G} = G \cup \left\{ \frac{1}{9} \right\} \Rightarrow G$ no es cerrado. h) $\bar{H} = [1, 2] = H \Rightarrow H$ es cerrado.

690. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$. $\bar{A} = A \cup \{0\}$, $\bar{B} = B \cup \{0\} \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = \{0\}$.

691. Basta observar que $0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$.

692. Basta observar que si se verifican las condiciones de la definición de punto de acumulación se verifican también las de punto adherente.

693. a) Sí. b) Sí. c) No. d) Sí. e) El número 1. f) El número 1, 1.

694. $[(0, 1; 0, 11; 0, 111; \dots) + p_0]^3 = (0, 001; 0, 001331; 0, 001337631; \dots) + p_0$.

695. I. $a^n \cdot a^m = (a \dots a)^n (a \dots a)^m = a \dots a^{n+m} = a^{n+m}$.

II. $a^m \cdot a^{n-m} = a^{m+(n-m)} = a^n$.

III. $(a^n)^m = a^n \dots a^n = (a \dots a)^n \dots (a \dots a)^m = a \dots a^{nm} = a^{nm}$.

IV. $a^n b^n = (a \dots a)^n (b \dots b)^n = (a b)^n \dots (a b)^n = (a b)^n$.

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \delta^n = \left(\frac{a}{b} \delta\right)^n = a^n$.

696.

$$\left(\frac{n}{2n+1} + p_0\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2n+1} + p_0\right)^2} = \frac{1}{\frac{n^2}{(2n+1)^2} + p_0} = \frac{(2n+1)^2}{n^2} + p_0$$

697.

$$e^{-r} = \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + p_0 \right]^{-r} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^r + p_0 \right]^r} = \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + p_0} \right)^r$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n} + p_0} \right)^{nr} = \left(\frac{n}{n+1} + p_0 \right)^{nr} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + p_0 \right]^{nr} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{nr} + p_0$$

698. I. Sean m y n números enteros positivos. $a^m a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}$, siendo $m > n$. Si $m < n$, $a^m a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{a^m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m+(-n)}$. Análogamente para $a^{-m} a^{-n}$.

II. m y n números enteros positivos. $\frac{a^n}{a^{-m}} = \frac{a^n}{\frac{1}{a^m}} = a^n a^m = a^{n+m} = a^{n-(-m)}$.

$\frac{a^{-n}}{a^m} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-n-m}$, $\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-n-(-m)}$, cuando $m > n$ y $\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{1}{a^n a^{-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{-n-(-m)}$. Análogamente las restantes.

699. $m < n \Rightarrow n - m > 0$, de donde $a > 1 \Rightarrow a^{n-m} > 1 \Rightarrow \frac{a^n}{a^m} > 1 \Rightarrow a^n > a^m$.

700. $a < b$, $0 < a \Rightarrow a^2 < ab$, $0 < b$, $a < b \Rightarrow ab < b^2$, luego $a^2 < b^2$. Si $a^{m-1} < b^{m-1}$, de $0 < a$ se deduce $a^m < ab^{m-1} = (ab)b^{m-2} < b^2 b^{m-2} = b^m$.

701. $(a^m)^{\frac{1}{n}} = b \Leftrightarrow a^m = b^n$, $a^{\frac{1}{n}} = c \Leftrightarrow a = c^n$. De estas igualdades resulta: $c^{nm} = b^n$, $(c^m)^n = b^n$ y, por la unicidad de la radicación, $c^m = b$, luego $b = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m$.

702. $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m n' = n m' \Rightarrow a^{m n'} = a^{n m'}$. Teniendo en cuenta la última igualdad de (12) y la unicidad de la radicación:

$$(a^{m n'})^{\frac{1}{n}} = (a^{n m'})^{\frac{1}{n}} = \left[(a^{m'})^n \right]^{\frac{1}{n}} = \left[(a^{m'})^{\frac{1}{n}} \right]^n = a^{m'},$$

de donde

$$a^{m'} = \left[(a^m)^{n'} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[(a^m)^{\frac{1}{n}} \right]^{n'} = \left[a^{\frac{m}{n}} \right]^{n'}$$

y

$$(a^{m'})^{\frac{1}{n'}} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{o bien,} \quad a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

703. Sea $r = \frac{m}{q}$, $s = \frac{n}{q}$, q entero positivo y m y n enteros.

$$1) \quad a^r a^s = a^{\frac{m}{q}} a^{\frac{n}{q}} \Rightarrow (a^r a^s)^q = \left(a^{\frac{m}{q}} a^{\frac{n}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{m}{q}}\right)^q \left(a^{\frac{n}{q}}\right)^q = \left[(a^m)^{\frac{1}{q}}\right]^q \left[(a^n)^{\frac{1}{q}}\right]^q = a^m a^n$$

$$= a^{m+n}, \text{ de donde } a^r a^s = a^{\frac{m+n}{q}} = a^{r+s}.$$

Análogamente se prueba II).

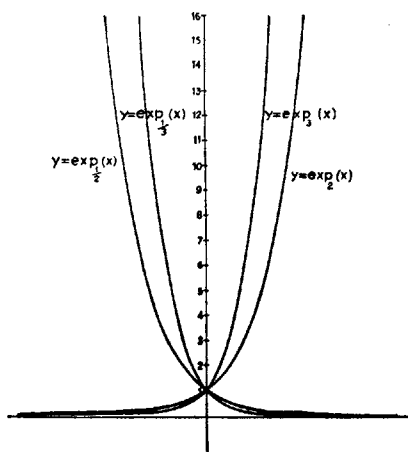


Fig. 35'.

$$III) \quad (a^r)^s = \left(a^{\frac{m}{q}}\right)^{\frac{n}{q}} = \left[\left(a^{\frac{m}{q}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left[\left(a^{\frac{m}{q}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[a^{\frac{mn}{qn}}\right]^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{mn}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} = b,$$

$$\text{de donde } a^{\frac{mn}{q}} = b^q \text{ y } a^{mn} = b^{q^2} \text{ y } b = a^{\frac{mn}{q^2}} = a^{rs}.$$

$$IV) \quad a^r b^r = a^{\frac{m}{q}} b^{\frac{m}{q}} \Rightarrow (a^r b^r)^q = \left(a^{\frac{m}{q}} b^{\frac{m}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{m}{q}}\right)^q \left(b^{\frac{m}{q}}\right)^q = a^m b^m = (ab)^m,$$

luego $a^r b^r = (ab)^{\frac{m}{q}} = (ab)^r$. Análogamente se prueba V).

704.

705.



Fig. 36'.

706. Sol. $\log_{10} 131,6 = 2,11925\,58893$.

707. $\ln 2,054 = 0,71978\,91115\,063665$.

708. $\ln 1131,718 = 7,0314921$.

709. $\exp_e(0,86732102) = \exp_e(0,867) \cdot \exp_e(0,00032102)$,

$$\begin{aligned} \exp_e(0,00032102) &= 1,00000\,00000\,00000\,00000 \\ &+ 0,00032\,10200\,00000 \\ &+ 0,00000\,00515\,28920\,2 \\ &+ 0,00000\,00000\,05513\,72397 \\ &+ 0,00000\,00000\,00000\,00004 \\ &\hline &1,00032\,10715\,32433\,92401 \end{aligned}$$

en donde se ha aplicado la fórmula $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$. Por consiguiente, $\exp_e(0,86732102) = 2,37976\,08513\,29496\,863 \times 1,00032\,10715\,32433\,92401$.

§ 2. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

$$710. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{n} \right)^{na} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{na} \left(1 + \frac{1}{na} \right)^{na} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{na} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{na} \right)^{na} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{na}, \quad e = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ \infty, & 0 > 1 \end{cases}$$

$$711. \quad \text{De (16) y de } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = x, \text{ se deduce que } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x.$$

$$712. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3}{3n^3 - 1} \right)^{(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n^3 - 1} \right)^{(n+1)^3}. \text{ Ahora bien,} \\ \frac{1}{3} = \frac{n^3}{3n^3} < \frac{n^3 + 2n + 1}{3n^3} < \frac{n^3 + 2n + 1}{3n^3 - 1} < \frac{(n-1+2)^3}{3(n-1)^3} \\ = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{1}{n-1} + \frac{4}{3} \frac{1}{(n-1)^2},$$

de donde

$$\frac{1}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3n^3 - 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{1}{n-1} + \frac{4}{3} \frac{1}{(n-1)^2} \right) = \frac{1}{3},$$

luego, teniendo en cuenta 15,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3}{3n^3 - 1} \right)^{(n+1)^3} = \sqrt[3]{e}.$$

713. Sea ϵ un número positivo arbitrario.

$$\left| \frac{1}{2^{n'+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n''}} \right| = \frac{1}{2^{n'+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n''-n'-1}} \right) \\ = \frac{1}{2^{n'+1}} \left(2 - \frac{1}{2^{n''-n'-1}} \right) < \frac{1}{2^{n'}} < \epsilon,$$

siempre que $n' > n$, siendo $n = \left\lceil -\frac{\log \epsilon}{\log 2} \right\rceil + 1$. Luego la serie es convergente.

$$714. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1.$$

715. Sea M un número arbitrario. Sea r un número natural tal que $n' \geq 2^r$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n'} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{2^{r-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^r} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{2^r} + \dots + \frac{1}{2^r} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{2+r}{2} > M,$$

para todo $r > 2(M-1)$, o sea, para todo $n' > n$, siendo $n = 2^{2M}$.

716.

$$\sum_{n=1}^r n^{-v} = 1 + \frac{1}{2^v} + \left(\frac{1}{3^v} + \frac{1}{4^v}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{r-1}+1)^v} + \dots + \frac{1}{(2^r)^v}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2^v} + \left(\frac{1}{4^v} + \frac{1}{4^v}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^r)^v} + \dots + \frac{1}{(2^r)^v}\right) = 1 + \frac{1}{2^v} + \frac{1}{2^{2v-1}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^{r(v-1)-1}} = \frac{2^{(1-v)(r+1)+1} + 2^{-v} - 1}{2^{1-v} - 1} > M$$

para todo $r > \frac{\log_2(M+1)}{1-v}$

717. La sucesión de las sumas parciales es $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, \dots, s_{2n} = 0, s_{2n+1} = 1$, luego los puntos 0 y 1 son puntos de acumulación.

718. La sucesión de las sumas parciales es: $s_1 = 3, s_2 = 0, 3, s_3 = 33, s_4 = 0, 33, s_5 = 333, s_6 = 0, 333, \dots$, que prueba que $\frac{1}{3}$ es un punto de acumulación y que no está acotada superiormente.

719. No está acotada superior ni inferiormente.

720. $s_1 = 0, 3, s_2 = -0, 3, s_3 = 0, 33, s_4 = -0, 33, s_5 = 0, 333, s_6 = -0, 333, \dots$, luego posee dos puntos de acumulación el $\frac{1}{3}$ y el $-\frac{1}{3}$.

721. a) $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$ b) $0, 3 + 0, 33 + 0, 033 + \dots$

722. a) $2 - 5 + 8 - 11 + 14 - 17 + \dots$ b) $-1 - 1 - 1 - 1 - 1 \dots$ c) $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ d) $-2 - 2 - 2 - \dots$ e) $-1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 2 - \dots$

723. $d_1 = a_{e(1)} = a_1, d_2 = a_{e(2)} = a_3, d_3 = a_{e(3)} = a_5, d_4 = a_{e(4)} = a_7, \dots$, luego la serie que resulta es

$$1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + \dots$$

724. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} + \dots$

725. Las sumas parciales de la serie dada son: $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$, luego los números 0 y 1 son números de acumulación de la serie. Las sumas parciales de la serie que resulta de aplicar la ley conmutativa son: $s'_1 = 1, s'_2 = 2, s'_3 = 3, s'_4 = 2, s'_5 = 3, s'_6 = 4, s'_7 = 5, s'_8 = 4, \dots, s'_{4k} = 2k, s'_{4k+1} = 2k+1, s'_{4k+2} = 2k+2, s'_{4k+3} = 2k+3$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \infty$.

726. $s_1 = 0, 9, s_2 = 0, s_3 = 0, 9, s_4 = 0, s_5 = 0, 09, s_6 = 0, s_7 = 0, 09 \dots s_{43} = 0, 09, s_{44} = 0, s_{45} = 0, 009, s_{46} = 0, \dots, s_{443} = 0, 009, s_{444} = 0, s_{445} = 0, 0009, \dots$, luego la suma de la serie es cero.

Aplicando la ley conmutativa:

$0, 9 + 0, 9 + 0, 09 + \dots^{(10)} + 0, 09 - 0, 9 + 0, 9 + \dots^{(10)} + 0, 9 + 0, 009 + \dots^{(100)} + 0, 009 - 0, 9 + \dots$, $c(1) = 1$, $c(2) = 3$, $c(3) = 5$, ..., $c(12) = 23$, $c(13) = 2$, $c(14) = 25$, ..., $c(23) = 43$, $c(24) = 45$, ..., $c(123) = 443$, $c(124) = 4$, ... la serie es divergente.

727. a) $(1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots) + (2 + 4 + 6 + \dots + 2n + \dots) = 3 + 6 + 9 + \dots + 3n + \dots$
 b) $(1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots) + (0 - 1 - 2 - \dots - (n-1) - \dots) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$
 c) $(1 + 1, 1 + 1, 11 + \dots) + (0, 1 + 0, 01 + 0, 001 + \dots) = 1, 1 + 1, 11 + 1, 111 + \dots$

728.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+b)n+2a}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n+2)+bn}{n(n+1)(n+2)} = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{n}{2n+2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{luego } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(a+b)i+2a}{i(i+1)(i+2)} = a + \frac{1}{2}b.$$

$$729. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{n!} = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)!} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n!} = e - 1, \quad \text{luego, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{ai+b}{i!} = ae + b(e-1).$$

730. $n^{(2)} = n(n-1) = n^2 - n$, $n^{(3)} = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$, de donde: $n = n^{(1)}$, $n^2 = n^{(2)} + n^{(1)}$, $n^3 = n^{(3)} + 3n^{(2)} + n^{(1)}$. Luego $a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 = b_0 + b_1 n^{(1)} + b_2 n^{(2)} + b_3 n^{(3)}$, $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_2 = a_2 + 3a_3$, $b_3 = a_3$. Por consiguiente:

$$\frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3}{n!} = \frac{b_0 + b_1 n + b_2 n^{(2)} + b_3 n^{(3)}}{n!} = b_0 \frac{1}{n!} + b_1 \frac{1}{(n-1)!} + b_2 \frac{1}{(n-2)!} + b_3 \frac{1}{(n-3)!}, \text{ y}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3}{i!} = b_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} + b_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!} + b_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-2)!} + b_3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^n \frac{1}{(i-3)!} = b_0(e-1) + (b_1 + b_2 + b_3)e$$

$$731. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2n+1 = 3 + 21 + 66 + \dots + \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{2} + \dots$$

732.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) + \frac{n-1}{n!} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

de donde la suma es igual a e .733. El término general es $\frac{1+2^n}{4^n}$. Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1+2^i}{4^i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = \frac{1-\frac{1}{4^n}}{3} + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} - \frac{1}{2^n},$$

de donde la suma es igual a $\frac{4}{3}$.734. El término general es $\frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{6^n}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1^i + 2^i + 3^i + 4^i + 5^i}{6^i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6^i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{6} \right)^i \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 6^n} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + \left(2 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) + \left(5 - 5 \left(\frac{5}{6} \right)^n \right), \end{aligned}$$

de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 5 = \frac{87}{10}$.

$$735. \frac{1}{1-x}.$$

736. Aplicando el criterio de d'Alembert se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n-1)(n+3)} = 1.$$

Aplicando el criterio III:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+2)}{\log n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n-1)}{\log n}.$$

Ahora bien,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+a)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n + \log \left(1 + \frac{a}{n} \right)}{\log n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{a}{n} \right)}{\log n} = 1,$$

luego el límite anterior será igual a 2 y la serie es convergente.

737. El criterio logarítmico III proporciona:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a_0 + a_1 n + a_2 n^2)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left[n^2 \left(a_0 \frac{1}{n^2} + a_1 \frac{1}{n} + a_2 \right) \right]}{\log n} \\ &= 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(a_0 \frac{1}{n^2} + a_1 \frac{1}{n} + a_2 \right)}{\log n} = 2,\end{aligned}$$

suponiendo, como siempre puede hacerse (bastaría multiplicar la serie por $-$), que $a_2 > 0$. Luego la serie es convergente.

738. Multiplicando si es preciso por -1 , se puede siempre suponer que $a_r > 0$ y $b_s > 0$. Aplicando el criterio III:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(b_0 + \dots + b_s n^s) - \log(a_0 + \dots + a_r n^r)}{\log n} = s - r \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(b_0 \frac{1}{n^s} + \dots + b_{s-1} \frac{1}{n} + b_s \right)}{\log n} &- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(a_0 \frac{1}{n^r} + \dots + a_{r-1} \frac{1}{n} + a_r \right)}{\log n} \\ &= s - r.\end{aligned}$$

739. El criterio III proporciona:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(a n + b)}{\log n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(a + b \frac{1}{n} \right)}{\log n} = 1, \quad a > 0.$$

El siguiente criterio logarítmico proporciona:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{n a_n}}{\log^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{a n + b}{n} \right)}{\log^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(a + b \frac{1}{n} \right)}{\log^2 n} = 0,$$

luego la serie es divergente.

740. a) Aplicando el criterio de Raabe, se obtiene:

$$a_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{192 n^3 - 752 n^2 - 828 n - 275}{64 n^4 + 288 n^3 + 436 n^2 + 252 n + 49}.$$

de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 3 > 1$, luego la serie es convergente.

$$b) \quad \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \dots < \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots, \quad \alpha > 1,$$

que es convergente

c) La serie $\beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \dots$ es mayorante de la serie dada y por ser una serie geométrica de razón < 1 es convergente.

d) En virtud del ejercicio 738 es convergente.

$$e) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{\log(e^{n+1} \sqrt[n]{n+1})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\log(n+1)}{n}},$$

luego $\beta_n = \frac{1}{3} \log(n+1)$ y, por el criterio VI, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \log n \cdot \log(n+1) = \infty$, luego la serie es convergente.

$$741. S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}, \quad n = 2k,$$

si $n = 2k + 1$, será $s_n = \frac{n-2}{n-1} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n(n-1)}$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. Sin embargo, la serie de los valores absolutos es la armónica, que es divergente.

742. $s = 1$.

743. Si s es la suma se verifica que

$$\frac{1960649}{3.628.800} < s < \frac{21785}{40320},$$

y la diferencia entre los miembros extremos es $\frac{1}{3.628.800}$.

744. Sumando hasta el término $-\frac{1}{16 \cdot 2^{16}}$, se comete un error inferior a 1 millonésima.

$$745. s = \frac{1}{r! r}$$

746. Es aplicación de la teoría del texto.

§ 3. EL NÚMERO COMPLEJO

747. a) $p = 0 + p = f(x)(x^2 + 1) + p$. b) $-f(x) + p$. c) $1 + p$.

748. $3x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(3x - 2) - 2x + 1$.

749. La primera es trivial. $(a + bx + p)(c + dx + p) = ac + (ad + bc)x + bd x^2 + p = ac - bd + (ad + bc)x + bd(x^2 + 1)p = ac - bd + (ad + bc)x + p$.

750. a) y b) son triviales. c) $(a + bi)(c + di) = (a + bx + p)(c + dx + p) = ac + (ad + bc)x + bd x^2 + p = ac - bd + (ad + bc)x + p = ac - bd + (ad + bc)i$. d) $(a + bi) : (c + di) = (a + bi)(c + di)^{-1} = (a + bx + p)(c + dx + p)^{-1} = (a + bx + p) \left(\frac{c - dx}{c^2 + d^2} + p \right) = \frac{ac + bd + (bc - ad)x}{c^2 + d^2} + p = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$.

751. Como $i^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \in p$, resulta que $(\sqrt{a}i)^2 + a = a i^2 + a = a - a = 0$, y $(-\sqrt{a}i)^2 + a = a i^2 + a = a - a = 0$, luego $\sqrt{a}i$ y $-\sqrt{a}i$ son raíces de la ecuación.

$$752. (2-i)(1+i) - \frac{1+i}{1-i} = 2+i-i^2 - (1+2i) \frac{1+i}{2} = 2+i-i^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + i^2\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i - 2i^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$753. \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (-1 + 3\sqrt{3}i - 9i^2 + 3\sqrt{3}i^3) = \frac{1}{8} (-1 + 3\sqrt{3}i + 9$$

$$- 3\sqrt{3}i) = 1.$$

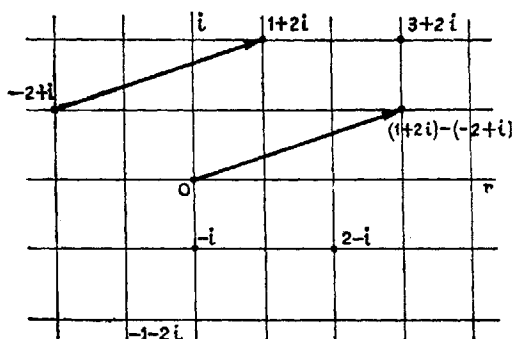


Fig. 36'.

754. Véase la figura 36'.

$$755. a) \rho = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{1}{2},$$

$$\text{luego } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{luego } \sqrt{3} + i = \left(2, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

$$b) \rho = 2, \quad \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen } \varphi = \frac{1}{2}, \quad \text{luego } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi, \quad \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$-\sqrt{3} + i = \left(2, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

$$c) \rho = 2, \quad \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen } \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \text{luego } \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6},$$

$$-\sqrt{3} - i = \left(2, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

$$d) \rho = 2, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen } \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \text{luego } \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi, \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} - i = \left(2, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

$$756. a) \left(4, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} + 4 \text{sen } \frac{\pi}{4} i = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i.$$

$$b) \left(4, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) = 4 \cos \frac{3\pi}{4} + 4 \text{sen } \frac{3\pi}{4} i = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i.$$

$$c) \left(4, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) = 4 \cos \frac{5\pi}{4} + 4 \text{sen } \frac{5\pi}{4} i = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i.$$

$$d) \left(4, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right) = 4 \cos \frac{7\pi}{4} + 4 \text{sen } \frac{7\pi}{4} i = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i.$$

$$757. a) z z' = \left(10, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \right). \quad b) z^3 = (125, \pi + 2k\pi) = -125. \quad c) \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{2}, \right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right). \quad d) \frac{z}{z'} = \left(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{12} + 2k\pi \right).$$

758. Como el grupo aditivo de los números complejos es isomorfo al grupo aditivo del plano vectorial, resulta que el vector de origen en el afijo de z y extremo en el afijo de z' es equipolente al vector (fig. 37') cuyo origen es el origen de coordenadas y cuyo extremo es

el afijo de a . Por consiguiente, la correspondencia que hace pasar del afijo de z al afijo de z' es una traslación definida por el vector correspondiente al número complejo a .

759. Si $z = (\rho, \varphi + 2k\pi)$, $z' = (\rho', \varphi' + 2k\pi)$ y si a es positivo será $a = (a, 2k\pi)$, luego $z' = az \Leftrightarrow (\rho', \varphi' + 2k\pi) = (a, 2k\pi)(\rho, \varphi + 2k\pi) = (a\rho, \varphi + 2k\pi)$, luego los puntos O , afijo de z y afijo de z' , están alineados y la razón de las distancias de O a los afijos de

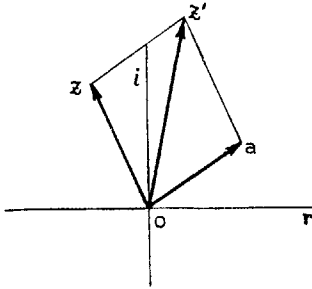


Fig. 37'.

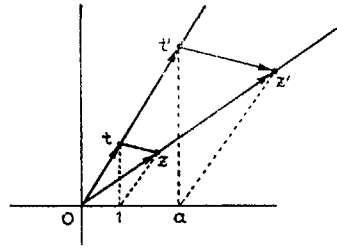


Fig. 38'.

z' y de z es constante (fig. 38') igual al número real a . La correspondencia es, por tanto, una homotecia de centro O y razón a . Si a es negativo la razón de la homotecia sería negativa.

760. Si $z = (\rho; \omega + 2k\pi)$, $z' = (\rho', \omega' + 2k\pi)$, será

$$(\rho', \omega' + 2k\pi) = (\rho, \omega + \varphi + 2k\pi),$$

de donde: $\rho' = \rho$, $\omega' = \omega + \varphi$. La correspondencia es, por tanto, un giro (fig. 39') alrededor de O de amplitud φ .

761. Sea $a = (r, \varphi + 2k\pi)$, $b = (r, 2k\pi)$, $c = (1, \varphi + 2k\pi)$. Se verifica que $a = cb$, luego $z' = az = (cb)z = c(bz) = cz_1$, $z_1 = bz$. Como b es un número real, la correspondencia $z \rightarrow z_1$ es una homotecia de razón r y centro O y la correspondencia $z_1 \rightarrow z'$ es un giro de amplitud φ . Por consiguiente, la correspondencia dada es la semejanza producto de la homotecia de centro O y razón r por el giro de centro O y amplitud φ . O es, por tanto, el centro de la semejanza.

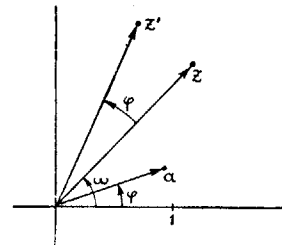


Fig. 39'

762. Sea $z = (\rho, \omega + 2k\pi)$, $z' = (\rho', \omega' + 2k\pi)$, será $(\rho\rho', \omega + \omega' + 2k\pi) = (1, 2k\pi)$, de donde $\rho\rho' = 1$, $\omega + \omega' = 0$, luego $\rho' = \frac{1}{\rho}$, $\omega' = -\omega$. Si $z_1 = \left(\frac{1}{\rho}, \omega + 2k\pi\right)$, se verifica que $z \rightarrow z_1$ es una inversión de polo O y potencia 1, y $z_1 \rightarrow z'$ es una simetría respecto del eje real.

763. $z = ta$, siendo t una variable real (fig. 40').

764. Teniendo en cuenta el isomorfismo entre el espacio vectorial de los números complejos y el espacio vectorial de los vectores libres del plano, resulta que (fig. 40')

$$z = b + t(c - b),$$

siendo t una variable real.

765. Si z pertenece a la circunferencia abc (fig. 41') se verificará que el ángulo azc será igual o suplementario al ángulo abc . Ahora bien, el ángulo abc es igual al ángulo (fig. 41') $a - b$, o, $c - b$ y este ángulo es igual a

$$\arg(c - b) - \arg(a - b).$$

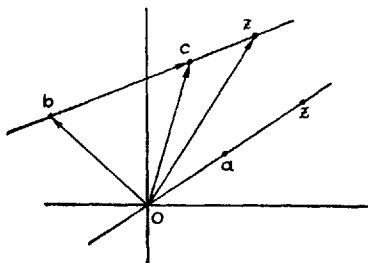


Fig. 40'.

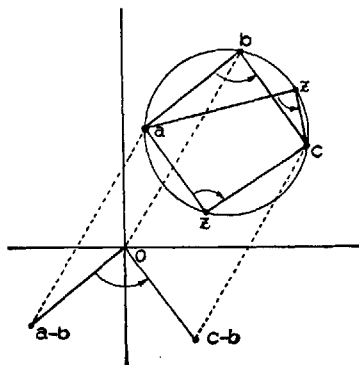


Fig. 41'.

Análogamente, el ángulo azc es igual al ángulo

$$\arg(c - z) - \arg(a - z),$$

pero, $\arg(c - b) - \arg(a - b) = \arg \frac{c - b}{a - b}$, y $\arg(c - z) - \arg(a - z) = \arg \frac{c - z}{a - z}$

luego: $z \in \text{circunferencia } abc \Leftrightarrow \arg \frac{c - z}{a - z} = \arg \frac{c - b}{a - b}$, o, $\arg \frac{c - z}{a - z} - \arg \frac{c - b}{a - b} = \pi$.

Ambas condiciones se pueden reunir en la siguiente:

$$\arg \frac{\frac{c - z}{a - z}}{\frac{c - b}{a - b}} = \arg(t),$$

siendo t una variable real. Por consiguiente, los afijos de todos los números z , que verifiquen la relación:

$$(1) \quad \frac{c - z}{a - z} \cdot \frac{a - b}{c - b} = t$$

pertenecen a la circunferencia abc , cualquiera que sea el número real t y todo punto de la circunferencia, excluido el punto a , es afijo de un número complejo z que verifica (1). Esta será, por tanto, la ecuación de la circunferencia si se admite además que t pueda tomar el valor ∞ .

La ecuación (1) se puede escribir en la siguiente forma equivalente:

$$(2) \quad z = \frac{mt + n}{pt + q}, \quad m = a(c - b), \quad n = c(b - a), \quad p = c - b, \quad q = b - a.$$

766. a) $1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, luego:

$$\sqrt[3]{1} = 1 \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \right) = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

$$b) \sqrt[3]{-1} = 1 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) = \left\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$c) \sqrt[4]{1} = 1 \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4} \right) = \{1, i, -1, -i\}.$$

$$d) \sqrt[5]{1} = 1 \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5} \right) = \left\{ 1, \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}, \cos \frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}, \cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5} \right\}.$$

$$e) -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(1, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = 1 \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right) = \left\{ \cos \frac{\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{9}, \cos \frac{7\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{9}, \cos \frac{13\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{9} \right\},$$

Los afijos de $\sqrt[3]{1}$ son A, B, C (fig. 42') y los de $\sqrt[3]{-1}$: D, E, F (fig. 42'). Los afijos de $\sqrt[4]{1}$ son A, G, D, H (fig. 42'). Los afijos de $\sqrt[5]{1}$ son A, B, C, D, E (fig. 43') y los de

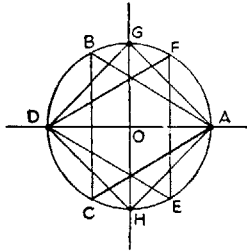


Fig. 42'.

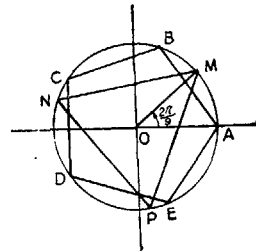


Fig. 43'.

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \text{ son M, N, P (fig. 43').}$$

767. $\zeta_i \zeta_j = \zeta_k$, siendo $k \equiv i + j \pmod{5}$, luego el grupo es isomorfo a $Z/(5)$, siendo Z el grupo aditivo de los números enteros.

768. a) $G = \{\zeta_0, \dots, \zeta_{11}\}$ es isomorfo al grupo $Z/(12)$. b) $G = (\zeta_1) = (\zeta_5) = (\zeta_7) = (\zeta_{11})$.
b) Los subgrupos propios de G son $G_1 = \{\zeta_0\}$, $G_2 = (\zeta_2)$, $G_3 = (\zeta_3)$, $G_4 = (\zeta_4)$, $G_5 = (\zeta_6)$.

769. Las raíces cuartas de la unidad son $\{1, i, -1, -i\}$. Se verifica que $(1) = \{1\}$.
 $(i) = \{i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$, $(-1) = \{-1, 1\}$. $(-i) = \{-i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1\}$. Luego las raíces primitivas cuartas de la unidad son i y $-i$.

770. Si $\zeta_i = \left(1, \frac{2i\pi}{20} \right)$, las raíces primitivas son $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_7, \zeta_9, \zeta_{11}, \zeta_{13}, \zeta_{17}, \zeta_{19}$.

771. Siendo i y $-i$ las raíces primitivas cuartas de la unidad, el polinomio buscado es $(x-i)(x+i) = x^2 + 1$.

772. Por ser tres un número primo, la única raíz cúbica de la unidad que no es raíz primitiva es la raíz 1, luego el polinomio $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$, tienen como raíces las raíces primitivas cúbicas de la unidad.

773. Como en el ejercicio anterior, se ve que dicho polinomio es $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$.

774.

$$\begin{aligned} z^{\frac{2}{3}} &= \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}(\varphi + 2k\pi) \right) = \left\{ \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\varphi \right), \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\varphi + \frac{4\pi}{3} \right), \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\varphi + \frac{8\pi}{3} \right) \right\}, \\ z^{\frac{4}{6}} &= \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}(\varphi + 2k\pi) \right) = \left\{ \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}\varphi \right), \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}\varphi + \frac{8\pi}{6} \right), \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}\varphi + \frac{16\pi}{6} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}\varphi + \frac{24\pi}{6} \right), \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}\varphi + \frac{32\pi}{6} \right), \left(\rho^{\frac{4}{6}}, \frac{4}{6}\varphi + \frac{40\pi}{6} \right) \right\} = \left\{ \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\varphi \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\varphi + \frac{4\pi}{3} \right), \left(\rho^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\varphi + \frac{8\pi}{3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

775. Desde luego, es una aplicación: $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x' + i(y + y'))$
 $\rightarrow (x + x' - i(y + y')) = (x - iy) + (x' - iy')$.

$$\begin{aligned} (x + iy)(x' + iy') &= xx' - yy' + i(xy' + yx') \rightarrow xx' - yy' - i(xy' + yx') \\ &= (x - iy)(x' - iy'), \end{aligned}$$

luego es un endomorfismo. Si $x + iy \rightarrow x' + iy'$ y $x_1 + iy_1 \rightarrow x' + iy'$, será $x - iy = x_1 - iy_1$, de donde $x = x_1$, $y = y_1$.

776. $e^a + ie^b$.

777. La serie dada es absolutamente convergente, ya que la serie:

$$1 + |a + ib| + \frac{|a + ib|^2}{2} + \dots + \frac{|a + ib|^n}{n!} + \dots$$

es convergente, siendo su suma igual a $e^{|a + ib|}$

§ 4. TOPOLOGÍA DEL ESPACIO EUCLÍDEO

778. a) Si. b) Si. c) No, por causa del arco.

779. a), b), c), d), e), f), g), h). Sí.

780. $\text{or}(\text{sen}) = \mathbb{R}$. $\text{im}(\text{sen}) = [-1, 1]$. Se dibuja una circunferencia de radio 1 (fig. 44) uno de sus diámetros se toma como eje x . Se divide la circunferencia en un cierto número de partes iguales (12 en la figura), se toma a partir de O el segmento 2π y se divide éste

lelas al eje y , el punto medio de los puntos de intersección con aquellas dos curvas es un punto de $\operatorname{ch} x$.

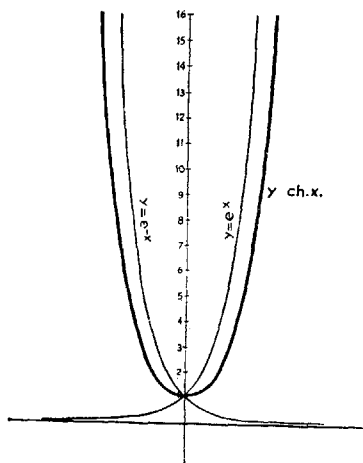


Fig. 46'.

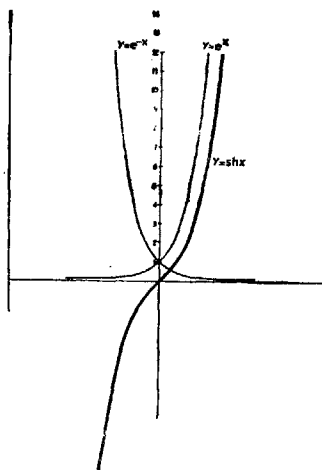


Fig. 47'.

De la construcción resulta que $\operatorname{or}(\operatorname{ch}) = \mathbb{R}$, $\operatorname{im}(\operatorname{ch}) = [1, +\infty]$.

786. Dibujadas las gráficas de $\exp(x)$ y de $\exp(-x)$, bastará restar de la ordenada de la primera la de la segunda y hallar el punto cuya ordenada es la mitad de la diferencia obtenida.

$$\operatorname{or}(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}, \operatorname{im}(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}.$$

$$787. \text{ a) } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1.$$

$$\text{ b) } \operatorname{ch}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \operatorname{ch} x. \text{ c) } \operatorname{sh}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\operatorname{sh} x.$$

$$\text{ d) } \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \operatorname{ch}(x+y). \text{ Análogamente las restantes.}$$

$$788. x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

789. Sea $E_\varepsilon(9)$ un entorno arbitrario de 9. $|x^2 - 9| = |x+3||x-3|$. Suponiendo $|x| < 4$, será $|x+3| < 7$, luego, para $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{7}, 1\right)$ se verificará que $\forall x \in E_\delta(3)$ será $|x^2 - 9| = |x+3||x-3| < 7 \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$.

790. Sea $E_\varepsilon(5)$ un entorno arbitrario de 5. $|2x + y - 5| = |2(x-1) + (y-3)| \leq 2|x-1| + |y-3|$, luego, para todo punto $(x, y) \in E_{\frac{\varepsilon}{3}}(1, 3)$ será $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \frac{\varepsilon}{3}$, de donde $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y-3| < \frac{\varepsilon}{3}$, y $|2x + y - 5| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

791. Sea $E_\varepsilon(3, 5)$ un entorno arbitrario del punto $(3, 5)$, en este caso conviene tomar entornos cúbicos (Def. 4 de 1). De

$$\begin{aligned} |3x - y + 2z - 3| &= |3(x-1) - (y-4) + 2(z-2)| \leq 3|x-1| + |y-4| + 2|z-2| \\ |x + 2z - 5| &= |(x-1) + 2(z-2)| \leq |x-1| + 2|z-2|, \end{aligned}$$

se deduce que, para todo $(x, y, z) \in E_{\frac{\varepsilon}{8}}(1, 4, 2)$, se verifica que

$$\begin{aligned} |3x - y + 2z - 3| &\leq 3|x-1| + |y-4| + 2|z-2| < 3\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + 2\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon \\ |x + 2z - 5| &\leq |x-1| + 2|z-2| < \frac{\varepsilon}{6} + 2\frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

luego $(3x - y + 2z, x + 2z) \in E_\varepsilon(3, 5)$.

792. Sea $E_\varepsilon(\sin a)$ un entorno arbitrario de $\sin a$. De

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= \left| -2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2} \right| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|, \end{aligned}$$

luego, para todo $x \in E_\varepsilon(a)$ se verifica que $\sin x \in E_\varepsilon(\sin a)$.

793. Sea $E_\varepsilon(\exp_b(a))$ un entorno arbitrario de $\exp_b(a)$. De

$$\begin{aligned} |a^x - a^b| &= a^b |a^{x-b} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a^b (a^{x-b} - 1) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow -\varepsilon a^{-b} &< a^{x-b} - 1 < \varepsilon a^{-b}, \Leftrightarrow 1 - \varepsilon a^{-b} < a^{x-b} < 1 + \varepsilon a^{-b} \\ \Leftrightarrow \log_a(1 - \varepsilon a^{-b}) &< x - b < \log_a(1 + \varepsilon a^{-b}). \end{aligned}$$

Ahora bien, $\varepsilon^2 a^{-2b} > 0 \Rightarrow 1 > 1 - \varepsilon^2 a^{-2b} \Rightarrow$ suponiendo que $1 - \varepsilon a^{-b} > 0$, que $\frac{1}{1 - \varepsilon a^{-b}} > 1 + \varepsilon a^{-b} \Rightarrow -\log_a(1 - \varepsilon a^{-b}) > \log_a(1 + \varepsilon a^{-b})$, luego:

$$\log_a(1 - \varepsilon a^{-b}) < x - b < \log_a(1 + \varepsilon a^{-b}) < -\log_a(1 - \varepsilon a^{-b}), \quad 1 - \varepsilon a^{-b} > 0,$$

luego, para todo $x \in E_\delta(b)$, $\delta = -\log_a(1 - \varepsilon a^{-b})$, $1 - \varepsilon a^{-b} > 0$, se verifica que $a^x \in E_\varepsilon(a^b)$.

794. Sea $E_\varepsilon(2)$ un entorno arbitrario de 2. Para todo $x \neq 1$, se verifica que $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1|$, luego, para todo $x \in E_\varepsilon(1)$, siendo $x \neq 1$, se verifica que $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$.

795. Sea $E_\epsilon(+\infty)$ un entorno arbitrario de $+\infty$. Para todo $x \neq 2$ es $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2-4x+4} > \epsilon &\Leftrightarrow \epsilon x^2 - 2(2\epsilon+1)x + 4\epsilon - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\epsilon+1-\sqrt{5\epsilon+1}}{\epsilon} \\ &< x < \frac{2\epsilon+1+\sqrt{5\epsilon+1}}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} [1-\sqrt{5\epsilon+1}] < x-2 \\ &< \frac{1}{\epsilon} [-1+\sqrt{5\epsilon+1}] < \frac{1}{\epsilon} [1+\sqrt{5\epsilon+1}], \end{aligned}$$

luego $\delta = -1 + \sqrt{5\epsilon+1}$, $\epsilon > -\frac{1}{5}$.

796. Sea ϵ un número positivo arbitrario y supongamos que $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, de donde $\sin x > \frac{1}{2}$, luego $|\operatorname{tg} x| = \frac{\sin x}{|\cos x|} > \frac{1}{2|\cos x|} > \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2\epsilon} > |\cos x|$ y esta relación se verifica si se verifica que $\frac{1}{2\epsilon} > \left| \frac{\pi}{2} - x \right| > \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right| = |\cos x|$, luego $\delta = \frac{1}{2\epsilon}$.

797. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Tomaremos $-1 < x-3 < -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} < -\epsilon &\Leftrightarrow 2x+1 > -\epsilon(x-2)(x-3) \Rightarrow 2x+1 > \frac{1}{2}\epsilon(x-2) \\ &> -\epsilon(x-2)(x-3) \Rightarrow x > 2 - \frac{10}{4-\epsilon}, \text{ luego } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} \\ &= -\infty. \text{ Análogamente, } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty. \end{aligned}$$

$$798. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

$$799. \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0.$$

800. Sea $E_\epsilon(1-y^2+y^3)$ un entorno arbitrario de $1-y^2+y^3$, $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x^2 - xy^2 + y^3 - (1 - y^2 + y^3)| &= |(x+1)(x-1) - y^2(x-1)| \\ &= |(x+1) - y^2| |x-1| < \epsilon. \end{aligned}$$

Suponiendo $0 < x < 2$, será:

$$\begin{aligned} |(x+1) - y^2| |x-1| &\leq (|x+1| + y^2) |x-1| < (3 + y^2) |x-1| < \epsilon \\ \Rightarrow |x-1| &< \frac{\epsilon}{3+y^2}, \end{aligned}$$

$$\text{luego } \delta(y) = \frac{\epsilon}{3+y^2}.$$

801. Cuando $y \rightarrow \infty$ no se puede acotar inferiormente $\frac{\varepsilon}{3+y^2}$, luego la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$. Como $\frac{\varepsilon}{3+m^2} \leq \frac{\varepsilon}{3+y^2}$, $\forall y \in [-m, m]$, la convergencia es uniforme en $[-m, m]$.

802. Sea ε un número positivo arbitrario. $|3x - x \operatorname{tg} y - (3a - a \operatorname{tg} y)| = |3(x-a) - (x-a) \operatorname{tg} y| = |3 - \operatorname{tg} y| |x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon}{|3 - \operatorname{tg} y|}$, luego $\delta(y) = \frac{\varepsilon}{|3 - \operatorname{tg} y|}$.

Cuando $y \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{tg} y| \rightarrow \infty$, luego no se puede acotar inferiormente $\delta(y)$ y la convergencia no es uniforme en $(0, \frac{\pi}{2})$. Sin embargo, de $y \in [0, \frac{\pi}{3}] \Rightarrow \operatorname{tg} y < \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3 + \operatorname{tg} y < 3 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3 + \operatorname{tg} y} > \frac{\varepsilon}{3 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}$, luego, como $|3 - \operatorname{tg} y| < 3 + \operatorname{tg} y \Rightarrow$

$\frac{1}{|3 - \operatorname{tg} y|} > \frac{1}{3 + \operatorname{tg} y}$, resulta que se puede tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{3 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} < \frac{\varepsilon}{3 + \operatorname{tg} y} < \frac{1}{|3 - \operatorname{tg} y|}$, luego la convergencia es uniforme en $[0, \frac{\pi}{3}]$.

803. Sea $E_\varepsilon(|x|)$ un entorno arbitrario de $|x|$. De $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} < |x| + \varepsilon \Rightarrow x^2 + \frac{1}{n^2} < x^2 + 2|x|\varepsilon + \varepsilon^2, n^2 > \frac{1}{\varepsilon(2|x| + \varepsilon)}$, $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2|x| + \varepsilon)}}$, luego se puede tomar $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, que por no depender de x , indica que la convergencia es uniforme. Si es uniforme en toda la recta lo será también en el segmento $[-m, m]$.

804. Sea ε un número positivo arbitrario: $\left| \operatorname{sen} \frac{x}{n} \right| < \left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{|x|} \Rightarrow n > \frac{|x|}{\varepsilon}$ y como $n = \left\lfloor \frac{|x|}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ depende esencialmente de x la convergencia no es uniforme en toda la recta. Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{x}{n} = 0, \quad x \neq 0.$$

805. Representando gráficamente las curvas $y = \frac{1-x^n}{1+x^n} = f_n(x)$, se obtiene la gráfica de la figura 48'.

Sea $0 < x < 1$, se verifica

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{1-x^n}{1+x^n} \right| &= \frac{2x^n}{1+x^n} = 2 - \frac{2}{1+x^n} < \varepsilon \Rightarrow -\frac{2}{1+x^n} < \varepsilon - 2 \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2}{1+x^n} \\ \Rightarrow \frac{1+x^n}{2} &< \frac{1}{2-\varepsilon} \Rightarrow 1+x^n < \frac{2}{2-\varepsilon} \Rightarrow x^n < \frac{2-2+\varepsilon}{2-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ \Rightarrow n \log x &< \log \varepsilon - \log(2-\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{\log \varepsilon - \log(2-\varepsilon)}{\log x}, \end{aligned}$$

que prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = 1, \quad 0 < x < 1,$$

y que la convergencia no es uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Si $(1 < x < 2)$ se verifica

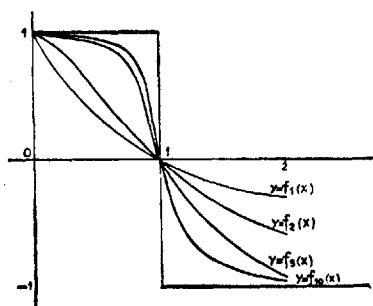


Fig. 48'.

$$\left| -1 - \frac{1-x^n}{1+x^n} \right| = 1 + \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{2}{1+x^n}$$

$$< \varepsilon \Rightarrow 2 < \varepsilon + \varepsilon x^n \Rightarrow \varepsilon x^n > 2 - \varepsilon \Rightarrow x^n >$$

$$\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}, \quad n \log x > \log \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}, \quad n > \frac{\log \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log x},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = -1, \quad (1 < x). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = 0, \quad x = 1.$$

806. a) $\lim_{i_1 \rightarrow \infty, \dots, i_r \rightarrow \infty} a_{i_1}, \dots, i_r = b \Leftrightarrow [\forall E_\varepsilon(b) \Rightarrow \exists E(n) \mid \forall i_1 > n, \dots, i_r > n \Rightarrow a_{i_1}, \dots, i_r \in E_\varepsilon(b)].$

b) $\lim_{i_1 \rightarrow \infty} a_{i_1}, \dots, i_r = b_{i_2}, \dots, i_r \Leftrightarrow [\forall E_\varepsilon(b_{i_2}, \dots, i_r) \Rightarrow \exists E(n(i_2, \dots, i_r)) \mid \forall i_1 > n(i_2, \dots, i_r) \Rightarrow a_{i_1}, \dots, i_r \in E_\varepsilon(b_{i_2}, \dots, i_r)].$

c) Si en b es n independiente de $i_2, \dots, i_r$, la convergencia se llama uniforme.

807. $\lim_{i_1 \rightarrow \infty} \frac{(i_2+1)i_1}{i_2 i_1 - 1} = \frac{i_2+1}{i_2}$, y se verifica que dado ε , $\forall i_1 > n = \left\lceil \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$ es $\left| \frac{(i_2+1)i_1}{i_2 i_1 - 1} - \frac{i_2+1}{i_2} \right| < \varepsilon$, luego la convergencia es uniforme.

808. $|y^x| = y^x < \varepsilon \Leftrightarrow x \log y < \log \varepsilon \Rightarrow x > \frac{\log \varepsilon}{\log y}.$

809. $\lim_{y \rightarrow 1} \lim_{x \rightarrow \infty} y^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow 1} y^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1.$

810. $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + \dots + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^{n-m} + \dots + a_n x^{-m}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \dots + b_m x^{-m}}.$ Si $n \geq m$,

$$L = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} [a_0 x^{n-m} + \dots + a_n x^{-m}]}{\lim_{x \rightarrow \infty} [b_0 + b_1 x^{-1} + \dots + b_m x^{-m}]} = \begin{cases} n > m, (\text{sig } a_0) \infty \\ n = m = \frac{a_0}{b_0}. \end{cases}$$

Si $n < m$, considerando la función inversa resulta $L = 0$.

811. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{(n)}}{(3x)^{(n)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{3x(3x-1) \dots (3x-n+1)} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{3x-1} \dots \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-n+1}{3x-n+1} = \frac{1}{3^n}.$$

$$812. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2 + x^2 - 4x + 1}{5x^2 - 6x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{2x^2 + x^2 - 4x + 1}{5x^2 - 6x + 2}} \\ = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x^2 - 4x + 1}{5x^2 - 6x + 2}} = e^{\frac{2}{5}}$$

813. Sea ϵ un número positivo arbitrario y sea $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$. Existen meros positivos δ_1 y δ_2 tales que $\forall x \in E_{\delta_1}(a)$, $|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{3}$ y $\forall x \in E_{\delta_2}(a)$, $|h(x) - l| < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $\delta = \min.(\delta_1, \delta_2)$. Para todo $x \in E_\delta(a)$ se verificará $|g(x) - l| = |g(x) - f(x) + f(x) - l| \leq |h(x) - f(x)| + |f(x) - l| \leq |h(x) - l| + |l - f(x)| + |f(x) - l| < \epsilon$.

814. Sea $\widehat{AOB}$ el ángulo x , $OA = OB = 1$, BD la perpendicular por B a OA (se supone $x < \frac{\pi}{2}$) y sea AC perpendicular a OA , $C \in OB$. Se verifica que área $OB D < \text{área sector } AOB < \text{área } OAC$, de donde $\frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, de donde $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, y como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, aplicando el teorema del ejercicio anterior, resulta: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

$$815. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$816. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \infty$$

817. a) or $(x^n) = \mathbb{R}$, luego, si $z \in \mathbb{R}$, en virtud del teorema 5 de 2:

$$\lim_{x \rightarrow z} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow z} x \right)^n = z^n.$$

b) or $(x^a) = \mathbb{R}^+$, luego, si $z \in \mathbb{R}^+$, la demostración es la misma de a).

c) or $(\exp_a(x)) = \mathbb{R}$ y la demostración es la misma de a).

d) or $(\log_a(x)) = \mathbb{R}^+$ y se aplica el mismo teorema 5 de 2.

e) or $(\sin(x)) = \mathbb{R}$ y se aplica el mencionado teorema.

f) or $(\operatorname{tg}(x)) = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, luego, si $z \in A$, se verifica que $\cos z \neq 0$, luego

$$\lim_{x \rightarrow z} \operatorname{tg} x = \frac{\lim_{x \rightarrow z} \sin x}{\lim_{x \rightarrow z} \cos x} = \operatorname{tg} z.$$

$$818. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 \neq f(1) = 0.$$

819. Basta observar que la función no está definida para $x = 1$. Sin embargo, existe el límite, ya que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$.

820. Basta observar que $\operatorname{tg} x$ no está definida para $x = \frac{\pi}{2}$.

821. $[n] = n$, sin embargo no existe $\lim_{x \rightarrow n} [x]$.

822. La gráfica de la función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$ es la siguiente (fig. 49'). La función no está definida para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ni existe $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$.

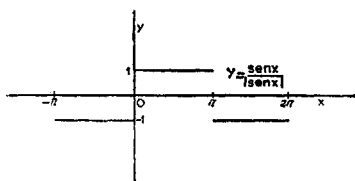


Fig. 49'.

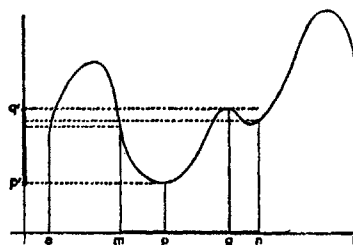


Fig. 50'.

$$823. \text{ Or } (e - (x^2 + y^2)) = E_2 \text{ y } \lim_{(x, y) \rightarrow (x', y')} e^{-(x^2 + y^2)} = e^{-(x'^2 + y'^2)} = e^{-(x'^2 + y'^2)}$$

824. La función de la figura 50' es continua en el intervalo (a, b) y transforma el intervalo (m, n) en el segmento $[p', q']$.

825. No.

826. a) $f(x)$ es continua. b) $g(x)$ es discontinua. El único punto de discontinuidad es c .

827. $y = [x]$ es continua por la derecha en los puntos de abscisa entera.

$$828. \text{ Sea } x' = x + \delta, \text{ se verifica que } \operatorname{tg} x' - \operatorname{tg} x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} - \operatorname{tg} x} > \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\operatorname{tg} \delta}}$$

y, por pequeño que sea δ , siempre se puede tomar x , suficientemente próximo a $\frac{\pi}{2}$ para que el último miembro sea mayor que cualquier número, ϵ , dado, luego la convergencia no es uniforme.

829. Sí. Sí.

$$830. f(0) = -\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0,07857, f(0,8) = -0,0534,$$

$$f(0,85) = +0,03058, f(0,83) = -0,0028, f(0,835) = 0,00559,$$

$$f(0,833) = 0,00225, f(0,881) = -0,0011,$$

luego, si ξ es la raíz, se verifica que

$$0,831 < \xi < 0,833,$$

luego se ha calculado ξ con un error inferior a una milésima, tomando $\xi = 0,832$.

$$\begin{aligned} 831. \quad & f(1) = -9, \quad f(10) = 1, \quad f(9) = -0,04576, \quad f(9,1) = 0,05904, \\ & f(9,05) = 0,00664, \quad f(9,03) = -0,01432, \quad f(9,045) = 0,00140, \\ & f(9,043) = -0,00046, \quad f(9,044) = 0,00035, \end{aligned}$$

luego la raíz ξ es tal que $9,043 < \xi < 9,044$.

$$\begin{aligned} 832. \quad & f(0) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(0,5) = -0,1870, \quad f(0,6) = -0,0304, \\ & f(0,7) = 0,1501, \quad f(0,64) = 0,0381, \quad f(0,63) = 0,0206, \\ & f(0,62) = 0,00336, \quad f(0,615) = -0,00517, \quad f(0,617) = -0,0016, \\ & f(0,618) = -0,00006, \quad f(0,6181) = 0,00012, \end{aligned}$$

luego $0,618 < \xi < 0,6181$.

Capítulo sexto

§ 1. DIFERENCIALES Y DERIVADAS

833. El punto común a las dos aplicaciones es $a = -3$. Poniendo $x = -3 + dx$, resulta: $\Delta f(dx) = 2(-3+dx) - 1 - (-6-1) = 2dx$, $\Delta g(dx) = 3(-3+dx) + 2 - (-9+2) = 3dx$, luego $\Delta f(dx) - \Delta g(dx) = 2dx - 3dx = -dx$, de donde:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|-dx|}{|dx|} = 1 \neq 0,$$

luego, med. aprox. $(g(x), f(x))_{E(-3)} = 1$.

834. $f(2) = 10$, $g(2) = 10$, $x = 2 + dx$, $\Delta f(dx) = 2(2+dx)^2 - (2+dx) + 4 - (8 - 2 + 4) = 2dx^2 + 7dx$, $\Delta g(dx) = 3dx$, $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|2dx^2 + 7dx|}{|dx|} = 4 \neq 0$, luego: med. aprox. $(g, f)_{E(2)} = 1$.

835. $\Delta f(x) = 2dx^2 + 7dx$, $\Delta g(x) = 7dx$, $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(x) - \Delta g(x)|}{|dx|^2} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{2dx^2}{dx^2} = 2 \neq 0$, luego med. aprox. $(g(x), f(x))_{E(2)} = 2$.

836. $f(e) = \log e = 1$, $g(e) = 1$, $h(e) = 1$. $\Delta f(dx) = \log(e+dx) - \log e = \log\left(1 + \frac{dx}{e}\right)$
 $\Delta g(dx) = 2dx$, $\Delta h(dx) = \frac{1}{e}dx$. $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - \Delta g(dx)|}{|dx|}$
 $= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left|\log\left(1 + \frac{dx}{e}\right) - 2dx\right|}{|dx|} = \lim_{dx \rightarrow 0} \left|\frac{1}{dx} \log\left(1 + \frac{dx}{e}\right) - 2\right|$
 $= \lim_{dx \rightarrow 0} \left|\frac{1}{e} \log\left(1 + \frac{dx}{e}\right)^{\frac{e}{dx}} - 2\right| = 2 - \frac{1}{e} \neq 0,$

luego med. aprox. $(g(x), f(x))_{E(e)} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|\Delta f(dx) - \Delta h(dx)|}{|dx|^2} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left| \log \left(1 + \frac{dx}{e} \right) - \frac{dx}{e} \right|}{|dx|^2} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{e}{dx} \log \left(1 + \frac{dx}{e} \right) - 1 \right|}{|dx|} = \frac{1}{2e^2} \neq 0, \end{aligned}$$

luego med. aprox. $(f(x), h(x))_{E(e)} = 2$.

$$837. \text{ a) } \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(a+dx)^2 - a^2}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{2a dx + dx^2}{dx} = 2a, \quad df(3, dx) = 6 dx.$$

$$\text{ b) } \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{5(a+dx) + 1 - (5a+1)}{dx} = 5, \quad df(3, dx) = 5 dx.$$

$$\text{ c) } \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+dx} - \frac{1}{a}}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+dx)} = -\frac{1}{a^2}, \quad df(3, dx) = -\frac{1}{9} dx.$$

$$838. \text{ a) } df(3, 10) = 60. \quad \text{ b) } df(3, 10) = 50. \quad \text{ c) } df(3, 10) = -\frac{10}{9}.$$

$$839. \text{ a) } y - 9 = 6(x - 3). \quad \text{ b) } y - \frac{1}{5} = -\frac{1}{25}(x - 5).$$

840. $x_1^* u_1 + x_2^* u_2 = 3(x_1^2 + x_2^2)(x_1 u_1 + x_2 u_2) - 2(x_1 u_1 + x_2 u_2)$, de donde, por ser $\{u_1, u_2\}$ una base, se verifica:

$$x_1^* = 3(x_1^2 + x_2^2)x_1 - 2x_1, \quad x_2^* = 3(x_1^2 + x_2^2)x_2 - 2x_2.$$

$$841. \text{ a) } dy = 5x^4 dx. \quad \text{ b) } dy = 12x^3 dx. \quad \text{ c) } dy = (-3 + 4x - 12x^2 + 5x^4) dx.$$

$$\text{ d) } dy = -\frac{3dx}{x^4}. \quad \text{ e) } dy = \frac{-2x+2}{(x^2-2x+4)^2} dx.$$

$$\text{ f) } dy = \frac{(x^3 + 4x^2 + 2)(8x^3 - 2x + 1) - (2x^4 - x^2 + x - 1)(3x^2 + 8x)}{(x^3 + 4x^2 + 2)^2} dx.$$

$$842. \text{ a) } d\sqrt{x} = dx \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}. \quad \text{ b) } d\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{ c) }$$

$$d\sqrt[5]{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(4x - 3)dx}{5\sqrt[5]{(2x^2 - 3x + 1)^4}}. \quad \text{ d) } d\frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{3}{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{ e) } dy = \frac{43}{60} \frac{dx}{\sqrt{x^{17}}}. \quad \text{ f) } dy = \frac{1}{8} \frac{dx}{\sqrt{x^7}}. \quad \text{ g) } dy = \frac{x dx}{\sqrt[6]{2^{11}} \sqrt[8]{(x^2 - 1)^7}}$$

$$843. \text{ a) } dy = 2 \cos(2x + 1) dx. \quad \text{ b) } dy = \cos(2x) dx. \quad \text{ c) } dy = -3x^2 \sin(x^3 - 1) dx.$$

$$\text{ d) } dy = \frac{3dx}{1 + (3x + 4)^2}. \quad \text{ e) } dy = \frac{d \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \quad \text{ f) } dy = \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1 + (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2)}. \quad \text{ g) } dy = 4 \cos 4x dx.$$

$$844. \text{ a) } dy = \frac{3dx}{3x + 1}. \quad \text{ b) } dy = \cotg x dx. \quad \text{ c) } dy = \frac{dx}{2x \sqrt{\log x}} \quad \text{ d) } dy = \frac{dx}{x \log x}$$

$$\text{e) } dy = \frac{dx}{x \log x \dots \log^{n-1} x} \cdot \text{f) } dy = \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x} \cdot \text{g) } dy = x [2 + 3x \cos(x^3 - 1)] e^{x^3 + \sin(x^3 - 1)} \cdot \text{h) } dy = \frac{2}{3} \frac{x \cos \log(\sqrt[3]{x^2 - 1})}{x^2 - 1} dx \cdot \text{i) } dy = \frac{\cos \arg \operatorname{ch} x}{\pm \sqrt{x^2 - 1}} dx + \frac{\operatorname{cotg} x dx}{8 \sqrt{\log \operatorname{sen} x + \sqrt{(\log \operatorname{sen} x)^3 + \sqrt{(\log \operatorname{sen} x)^3 + \sqrt{(\log \operatorname{sen} x)^7}}}}}$$

$$845. \text{ a) } dy = \frac{1}{100 \cdot \log 10} dx \cdot \text{b) } dy = \frac{1}{3} dx \cdot \text{c) } dy = \frac{875}{3} \sqrt[3]{7} dx \cdot \text{d) } dy = 3 dx$$

$$\text{e) } dy = \frac{5\pi}{8} dx \cdot \text{f) } dy = \mp 4 dx$$

$$846. \text{ a) } y - 2 = 4(x - 1) \cdot \text{b) } y - 10 = 7(x - 3) \cdot \text{c) } y - \arctg 2 = \frac{23}{72}(x - 2) \cdot \text{d) } y - \frac{7}{9} = \frac{8}{243}(x - 2)$$

$$847. \text{ a) } dz = -3 dx - 5 dy \cdot \text{b) } dz = 11 dx_1 - 7 dx_2 + dx_3 \cdot \text{c) } dz = \frac{81 dx - 8 dy}{2\sqrt{73}}$$

$$\text{d) } dz = \frac{1}{2} dx - dy \cdot \text{e) } dz = -11 dx + 14 dy \cdot \text{f) } dz = \frac{-5\pi^6 + 30\pi^5 + 35\pi^3 - 105\pi^2 - 580}{3\pi^6 - 21\pi^5 + 318\pi^2} dx + \frac{-6\pi^9 + 43\pi^6 - 75\pi^5 - 70\pi^3 + 405\pi^2 + 106}{15\pi^6 - 105\pi^5 + 1590\pi^2} dy$$

$$848. \text{ a) } dz = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{y + \sqrt{x + \sqrt{y}}}} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{y}}} \right] dx + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}} \frac{1}{\sqrt{y + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}$$

$$\left[1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{y}}} \right] dy \cdot \text{b) } dy = \cos(x_1 + 2x_2) dx_1 + 2 \cos(x_1 + 2x_2) dx_2 - 3 \operatorname{sen}(3x_3 + 4x_4) dx_3 - 4 \operatorname{sen}(3x_3 + 4x_4) dx_4$$

$$\cdot \text{c) } dy = \cos(x_1 + \cos(x_2 + \operatorname{sen}(x_3 + \cos x_4))) [dx_1 - \operatorname{sen}(x_2 + \operatorname{sen}(x_3 + \cos x_4))] [dx_2 + \cos(x_3 + \cos x_4) [dx_3 - \operatorname{sen} x_4 dx_4]] \cdot \text{d) } dy$$

$$= \frac{1}{x_1 + \log(x_2 + \log x_3)} \left[dx_1 + \frac{1}{x_2 + \log x_3} \left[dx_2 + \frac{1}{x_3} dx_3 \right] \right] \cdot \text{e) } dy$$

$$= \frac{1}{1 + x_1^2 \operatorname{sen}^2(x_2 \sqrt{x_3 \log x_4})} \left[\operatorname{sen}(x_2 \sqrt{x_3 \log x_4}) dx_1 + x_1 \cos(x_2 \sqrt{x_3 \log x_4}) \right]$$

$$\left[\sqrt{x_3 \log x_4} dx_2 + \frac{x_2}{2\sqrt{x_3 \log x_4}} \left[\log x_4 dx_3 + \frac{x_3}{x_4} dx_4 \right] \right]$$

$$849. \text{ a) } (dx_1^*, dx_2^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -9 & -18 \end{pmatrix} \cdot \text{b) } (dx_1^*, dx_2^*) = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \text{c) Diferencial en a: } (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 20 & 48 & 3 \\ 8 & 12 & 3 \end{pmatrix}; \text{diferen-}$$

cial en b:

$$(dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (8, 12, 3) dt, dt = dx_1 + dx_2$$

$$d) (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$850. a) (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 4x_1^3 x_2^2 + 1 & 2x_2 - 1 \\ -2 & 2x_1 x_2 + 2 \end{pmatrix} b) (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) \\ = dx(-\sin x, \cos x, 1). c) (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = dx(1, 2x, 3x^2). d) (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*)$$

$$= (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{2x_1}{1 + (x_1^2 + x_2^2)^2} & 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{2x_2}{1 + (x_1^2 + x_2^2)^2} & 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}.$$

$$e) (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 & \frac{x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \\ -2x_1 & \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 x_2}} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + \sqrt{x_1 x_2}} & \frac{2}{3\sqrt{(2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3\sqrt{x_1 x_2})^2}} & \frac{2x_1^2 - 4x_1 x_2}{3\sqrt{(2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3\sqrt{x_1 x_2})^2}} \\ \frac{1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + \sqrt{x_1 x_2}} & \frac{1}{3\sqrt{(2x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3\sqrt{x_1 x_2})^2}} & -8\sqrt{x_1 x_2} \end{pmatrix}.$$

$$851. a) x_1^* - 4 = 4(x - 2), x_2^* - 8 = 12(x - 2). b) x_1^* - \sqrt{3} = -\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \\ x_2^* - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right). c) x_1^* - 1 = -(x - 1), x_2^* - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x - 1). d) x_1^* - \frac{3}{8} \\ = -\frac{1}{16}(x - 2), x_2^* - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x - 2). e) x_1^* - 3 = x - 3, x_2^* - 9 = 6(x - 3), x_3^* \\ - 27 = 27(x - 3). f) x_1^* - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right), x_2^* - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right), x_3^* \\ - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{6}. g) x_1^* - \frac{1}{16} = -\frac{1}{8}(x - 2), x_2^* - \frac{3}{8} = -\frac{7}{16}(x - 2), x_3^* + \frac{1}{2} \\ = -\frac{1}{4}(x - 2). h) (x_1^* - 12, x_2^* + 7, x_3^* - 5) = (x_1 - 1, x_2 - 2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} i) (x_1^* - 2, \\ x_2^* - 9, x_3^* + 6) = (x_1 - 1, x_2 - 3) \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}. j) \left(x_1^* - 2 \frac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2} - 5x_2, x_2^* - \frac{6x_1}{1 + x_1^2} - 3x_2, x_3^* + \frac{4x_1^2 + 24x_1}{1 + x_1^2} + 2x_2\right) = (X_1 - x_1, X_2 - x_2) \begin{pmatrix} -8x_1 \\ (1 + x_1^2)^2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 - 6x_1^2 \\ (1 + x_1^2)^2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8x_1^3 + 24x_1^2 + 8x_1 + 24 \\ (1 + x_1^2)^2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$852. a) 3(x_1^* - 4) - (x_2^* - 8) = 0. b) \frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1^* - \sqrt{3}) + \left(x_2^* - \frac{3}{2}\right) = 0. c) 3(x_1^*$$

$$-1) + 2x_2^* - 3 = 0. \text{ d) } 16x_1^* + 4x_2^* - 9 = 0. \text{ e) } \frac{x_1^* - 3}{1} = \frac{x_2^* - 9}{6} = \frac{x_3^* - 27}{27}.$$

$$\text{f) } \frac{2x_1^* - \sqrt{3}}{-1} = \frac{2x_2^* - 1}{\sqrt{3}} = \frac{x_3^* - \frac{\pi}{6}}{1}. \text{ g) } \frac{16x_1^* - 1}{2} = \frac{16x_2^* - 6}{7} = \frac{2x_3^* + 1}{2}.$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} x_1^* - 12 & x_2^* + 7 & x_3^* - 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ i) } \begin{vmatrix} x_1^* - 2 & x_2^* - 9 & x_3^* + 6 \\ -6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{j) } \begin{vmatrix} x_1^* - 2 \frac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2} - 5x_2 & x_2^* - \frac{6x_1}{1 + x_1^2} - 3x_2 & x_3^* + \frac{4x_1^2 + 24x_1}{1 + x_1^2} + 2x_2 \\ \frac{-8x_1}{(1 + x_1^2)^2} & \frac{6 - 6x_1^2}{(1 + x_1^2)^2} & -\frac{8x_1^3 + 24x_1^2 + 2x_1 + 24}{(1 + x_1^2)^2} \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$853. \text{ a) } (dx_1^*, dx_2^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{31} & 1 \\ -\frac{1}{31^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \left(2, -\frac{1}{25}\right) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{320} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{8} & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } (dx_1^*, dx_2^*, dx_3^*) = (dx_1, dx_2, dx_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, 1, 12\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 288 \\ -1 & 1 & 36\sqrt{6} \\ 0 & -1 & 8\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

§ 2. ESTUDIO LOCAL DE LAS FUNCIONES DE VARIABLES REALES

$$854. \text{ a) } d^2 x^* = (20x^3 - 12x) dx^2. \text{ b) } d^2 \log x = -\frac{dx^2}{x^3}. \text{ c) } d^2 \sin x = -\sin x dx^2.$$

$$\text{d) } d^2 \arctg x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} dx^2. \text{ e) } d^2 \sqrt{x + \sqrt[3]{x}} = - \left[\frac{1}{4} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^2}{\sqrt{(x + \sqrt[3]{x})^3}} + \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}} \right] dx^3.$$

$$\text{f) } d^2 \log^2 x = -\frac{1 + \log x}{x^2 (\log x)^2} dx^2. \text{ g) } d^2 \exp.(\sqrt{x}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{4x} \exp.(\sqrt{x}) dx^2.$$

$$\text{h) } d^2 \sin \exp.(x^3) = [-9x^4 \sin \exp.(x^3) \cdot \exp.(2x^3) + 9x^4 \cos \exp.(x^3) \cdot \exp.(2x^3)]$$

$$+ 6x \cos \exp. (x^3) \cdot \exp. (x^3)] dx^2. \text{ i) } d^2 \exp. (\sqrt{\log \operatorname{sen} x}) = \frac{\exp (\sqrt{\log \operatorname{sen} x})}{2 \operatorname{sen}^2 x} \left[\frac{\cos^2 x}{\log \operatorname{sen} x} - \frac{\cos^2 x}{2 \sqrt{(\log \operatorname{sen} x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{\log \operatorname{sen} x}} \right] dx^2.$$

$$855. \text{ a) } d^2 x^* = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 6x_1 & 6x_2 \\ 6x_2 & -12x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \text{ b) } d^2 x^* = dx \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_2} \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix} dx'.$$

$$\text{c) } d^2 x^* = dx \exp. (x_1, -\operatorname{sen} x_2) \begin{pmatrix} 1 & -\cos x_2 \\ -\cos x_2 & \cos^2 x_2 + \operatorname{sen} x_2 \end{pmatrix} dx'.$$

$$\text{d) } d^2 x^* = 2 dx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} dx'$$

$$\text{e) } d^2 x^* = \frac{1}{(\operatorname{sen} x_1 - \sqrt{x_2})^2} dx \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{x_2} \operatorname{sen} x_1 & \frac{\cos x_1}{2 \sqrt{x_2}} \\ \frac{\cos x_1}{2 \sqrt{x_2}} & \frac{\operatorname{sen} x_1 - 2 \sqrt{x_2}}{4 \sqrt{x_2}} \end{pmatrix} dx'.$$

$$\text{f) } d^2 x^* = dx \begin{pmatrix} 6x_1 & -x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} dx' - \frac{1}{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^3} dx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} dx'.$$

$$\text{g) } (d^2 x_1^*, d^2 x_2^*) = dx^2 (6x, 12x^2).$$

$$\text{h) } dx_1^* = dx \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} dx, dx_2^* = dx \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} dx.$$

$$856. \text{ a) } d^5 x \log x = -6 \frac{dx^5}{x^4}. \text{ b) } \frac{dx^3}{8x} \left(-\frac{3}{x} + \frac{3}{x \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \exp. (\sqrt{x}).$$

$$857. \text{ a) } d^3 f = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^i \partial x_2^{3-i}} dx_1^i dx_2^{3-i} = \binom{3}{0} \cdot 6 \cdot dx_1^3 + \binom{3}{1} \cdot 0 \cdot dx_1^2 dx_2 + \binom{3}{2} \cdot 4 \cdot dx_1 dx_2^2 + \binom{3}{3} \cdot 18 \cdot dx_2^3 = 6 dx_1^3 + 12 dx_1 dx_2^2 + 18 dx_2^3. \\ \text{b) } d^3 (x_1^2 x_2^2 + x_1 x_3^2 + 2 x_2^2 x_3 + 3 x_1 x_2) = 12 x_2 dx_1^2 dx_2 + 12 x_1 dx_1 dx_2^2 + 6 dx_1 dx_3^2 + 12 dx_2^2 dx_3. \text{ c) } 24 dx_1^4 + 24 dx_1^3 dx_2 + 24 dx_1 dx_2^3 - 24 dx_2^4 - 24 dx_2^2 dx_3^2. \text{ d) } \frac{2}{x_1^3} dx_1^3 - 6 dx_2^3 + 6 dx_3^3 - 12 x_4 dx_1^2 dx_4 - 12 x_1 dx_1 dx_4^2 + 6 dx_2^2 dx_3 + 12 x_4 dx_2^2 dx_4.$$

$$858. \text{ Poniendo } \Psi(x) = \frac{1}{\psi(x)}, \Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \text{ y recordando que, por hipótesis, existe } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = L, \text{ resulta:}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi'(a + \theta h)}{\varphi'(a + \theta h)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi^2(a + \theta h)}{\varphi^2(a + \theta h)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(a + \theta h)}{\psi'(a + \theta h)} \cdot L^2$$

resulta

$$\frac{1}{L} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

$$859. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1. \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^2 x = -1. \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x}. \text{ Ahora bien, } \lim_{x \rightarrow 0} x \log x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \text{ luego, } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \log x}$$

$$= e^0 = 1. \text{ e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \right) = \infty,$$

$$860. \text{ a) } \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|ax|}{|x|} \right\}_{x \in \mathbb{R}} = \text{ext. sup. } \{|a|\}_{x \in \mathbb{R}} = |a|.$$

$$\text{b) } \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|\mathbf{x}^*|}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} = \text{ext. sup. } \left\{ \frac{\sqrt{a_1^2 x^2 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^2}}{|\mathbf{x}|} \right\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} \\ = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

$$\text{c) } \text{ext. sup. } \left\{ \frac{|ax_1 + bx_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{V}_2} = \text{ext. sup. } \left\{ \sqrt{\frac{(ax_1 + bx_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}} \right\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{V}_2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$861. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \sin \theta x, \text{ luego tomando } \sin(0, 2) = 0, 2 - \frac{0,2^3}{3!} = 0,19867,$$

el error cometido es, por una parte, inferior a $\frac{(0, 2)^4}{4!} = \frac{2}{3} 10^{-4} < 10^{-4}$, esto es, es inferior a una diezmilésima y, por otra, el cometido al prescindir de las cifras decimales que siguen a la 5 es inferior a una cienmilésima, luego el error total es inferior 1,1 diezmilésima, esto es, se puede asegurar que

$$0,19856 < \sin(0, 2) < 0,19878.$$

$$862. \text{ Como } 1.^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,01745\dots, \text{ aplicando el método del ejercicio anterior, resulta:}$$

$$\sin(1.^\circ) = \sin(0,01745) = 0,01745 - \frac{(0,01745)^3}{3!} = 0,01745 - 5268024 \cdot 10^{-12}/6 = 0,017449121996,$$

$$\text{y el error cometido es inferior a } \frac{(0,01745)^4}{4!} = \frac{916636176 \cdot 10^{-16}}{4!} < 91663617,6 \cdot 10^{-16} \\ < 10^8 \cdot 10^{-16} = 10^{-8}, \text{ y como el error cometido al calcular un grado en radianes es } < 10^{-5}, \\ \text{el error total es inferior a } 10^{-5} + 10^{-8}.$$

$$863. \sqrt[3]{135} = 135^{\frac{1}{3}} = (125 + 10)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{10}{125} \right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left[1 + \frac{10}{125 \cdot 3} - \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2} \left(\frac{10}{125} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{1}{6} \left(\frac{10}{125} \right)^3 \right] = 5 (1,0259206) = 5,129603$$

y el error cometido, por ser la serie alterada, es inferior a $0,0000316 < 10^{-4}$.

864.

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{1965} &= (1965)^{\frac{1}{7}} = (3^7 - (3^7 - 1965))^{\frac{1}{7}} = (3^7 - 222)^{\frac{1}{7}} = 3 \left(1 - \frac{222}{2187} \right)^{\frac{1}{7}} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{7} \frac{222}{2187} - \frac{3}{49} \left(\frac{222}{2187} \right)^2 - 13 \left(\frac{222}{7 \times 2187} \right)^3 \right) = 2,95449068, \end{aligned}$$

con un error inferior a 0,09.

865.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots - \frac{1}{19} = 0,7604, \\ \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{21} = 0,808, \end{aligned}$$

que dan para π los valores 3,0416 y 3,232, con un error, este último, inferior a $\frac{4}{23} = 0,17$.

$$866. \operatorname{ch}(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} \operatorname{sh}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

$$\operatorname{ch}(1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10!} = 1,5430806, \text{ el error es } \frac{1}{11!} \operatorname{sh}(\theta) < \frac{1}{11!} \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{11!} \frac{1}{2} \frac{e^2 - 1}{e} < \frac{1}{11!} \frac{1}{2} \frac{8}{2} < \frac{1}{11!} \cdot 4 < 2 \cdot 10^{-7}.$$

$$867. \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) -$$

$$\ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$+ R - \left[-x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + R_1 \right]$$

$$= 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right] + R$$

$$- R_1, \quad 2k+1 = \begin{cases} n \\ n-1 \end{cases}.$$

868. Véase la figura 51'.

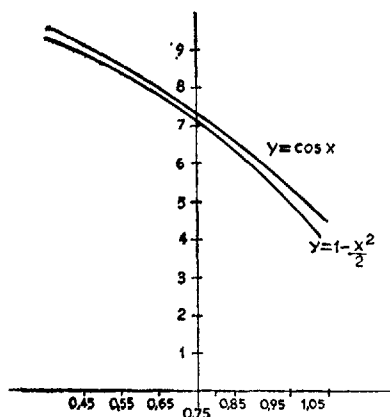


Fig. 51'

$$869. \cos(x_1 + x_2) = 1 - \frac{1}{2} (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{4!} (x_1 + x_2)^4 - \dots + (-1)^k \frac{(x_1 + x_2)^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(\theta(x_1 + x_2)) \frac{(x_1 + x_2)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$\begin{aligned}
 870. \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} &= -\frac{\log x_2}{x_1^2} x_2^{\frac{1}{x_1}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1} x_2^{\frac{1-x_1}{x_1}}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\log x_2}{x_1^3} x_2^{\frac{1}{x_1}} \\
 &+ \left(\frac{\log x_2}{x_1} \right)^2 x_2^{\frac{1}{x_1}}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{1}{x_1^2 x_2} x_2^{\frac{1}{x_1}} - \frac{\log x_2}{x_1^3} \frac{1}{x_1} x_2^{\frac{1-x_1}{x_1}}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \\
 &= \frac{1-x_1}{x_1^2} x_2^{\frac{1-2x_1}{x_1}} \quad \text{luego: } \sqrt[1+x_1]{1+x_2} = 1 + x_2 - x_1 x_2 + \dots
 \end{aligned}$$

871.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{2+x_1}}{4+x_2} &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \left[\frac{1}{8\sqrt{2}} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{16} x_2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{32\sqrt{2}} x_1^2 + \frac{1}{16\sqrt{2}} x_1 x_2 \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{2}}{32} x_2^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{3}{128\sqrt{2}} x_1^3 + \frac{3}{128\sqrt{2}} x_1^2 x_2 + \frac{3}{64\sqrt{2}} x_1 x_2^2 - \frac{6\sqrt{2}}{128} x_2^3 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

$$872. \quad \frac{x_1}{1+x_2+x_2^2} = x_1 - x_1 x_2.$$

$$873. \quad \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}^*(0) + \mathbf{x}''(0)t + \dots + \frac{1}{n!} x^{*(n)}(0) t^n + R,$$

$$R = \frac{1}{(n+1)!} [x_1^{*(n+1)}(\theta_1 t) u_1^* + \dots + x_m^{*(n+1)}(\theta_m t) u_m^*] t^{n+1}.$$

874.

$$\left\{ \begin{aligned}
 x_1^* &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta_1 t, \quad 0 < \theta_1 < 1 \\
 x_2^* &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1} \frac{t^{2(k+1)}}{(2k+2)!} \sin \theta_2 t, \quad 0 < \theta_2 < 1. \\
 x_3^* &= t
 \end{aligned} \right.$$

875.

$$\left\{ \begin{aligned}
 x_1^* &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{6} \right)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{6} \right) \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] \\
 x_2^* &= \frac{3}{2\sqrt{2}} + \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \left[-\frac{3}{2\sqrt{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{6} \right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(x_1 - \frac{\pi}{6} \right) \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] \\
 x_3^* &= \frac{4}{\sqrt{2}} + \left[-\frac{4}{\sqrt{2}} \left(x_1 - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{4}{\sqrt{2}} \left(x_2 - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \right.$$

876. Basta observar que la sucesión dada es uniformemente convergente en cualquier intervalo de la semirrecta $x > -1$, que no contenga al punto $x = 1$ y que no lo es en ningún intervalo que contenga a este punto.

877. En virtud de la fórmula de Taylor se verifica que

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| = \left| \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!} \operatorname{sen}(\theta x) \right| \leq \frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}.$$

y para todo $\epsilon > 0$ se puede hallar n tal que $\frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!} < \epsilon$.

878.

$$D \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

y como la sucesión del segundo miembro es uniformemente convergente en cualquier segmento $[-m, m]$ de $\mathbb{R}$, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = D \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

esto es, $\cos x = D \operatorname{sen} x$.

879. Sea k un número real arbitrario. La sucesión $b_{n+1} = k + a_0 x + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$, es tal que su derivada es la sucesión dada, luego, por la hipótesis y por el teorema 2 del texto, se verifica que b_{n+1} es uniformemente convergente en I , y si $b(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k + a_0 x + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} \right)$, se verifica que $D(b(x)) = a(x)$.

880. De los ejercicios 877 y 879 se deduce que $k - \cos x$ es primitiva de $\operatorname{sen} x dx$, cualquiera que sea la constante k .

881. Basta aplicar el teorema 2 a $d \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = dx + x dx + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx$.

882. Aplíquese el teorema 2 a $D \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right) = 1 - x + \dots + (-1)^{n+1} x^{n-1}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}) = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$.

883. Análogo a 881 y 882.

884. $\left| \frac{x^{n'+1}}{n'+1} + \dots + \frac{x^{n''}}{n''} \right| < \frac{x^{n'+1}}{n'+1} (1 + \dots + x^{n''-n'-1}) = \frac{x^{n'+1}}{n'+1} \frac{1 - x^{n''-n'}}{1 - x}$
 $< \frac{x^{n'+1}}{(1-x)(n'+1)} < \epsilon \Rightarrow n'+1 > \frac{x^{n'+1}}{(1-x)\epsilon}$, $n'+1 > \frac{1}{(1-x)\epsilon}$, luego
 $n = \frac{1}{(1-x)\epsilon}$ depende esencialmente de x .

885. Como $e^2 = 7,38905$, se verifica que

$$\ln(10) = 2 + 2 \left(\frac{2,61095}{17,38905} + \frac{(2,61095)^2}{3(17,38905)^2} \right) = 2,3025566$$

886. $L_{11} = 1 + 2 \times 0,484294 \left(-\frac{1}{21} + \frac{1}{3 \cdot 21^3} \right) = 1,04134536$. Se podría prescindir del término $\frac{1}{3 \cdot 21^3}$. El valor de L_{11} con todas sus cifras exactas es: $L_{11} = 1,0413 \ 9685$.

887.

$$\frac{\pi}{6} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{45\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} \right) = 0,57735 \frac{41}{45} = 0,52603. \text{ Se verifica que } \frac{\pi}{6} = 0,52359.$$

$$888. \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots, \\ \operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \dots$$

$$889. \sqrt[7]{2250} = 2250^{\frac{1}{7}} = (2187 + 63)^{\frac{1}{7}} = 3 \left(1 + \frac{63}{2187} \right)^{\frac{1}{7}} = 3 \left[1 + \frac{1}{7} \frac{63}{2187} + \frac{1}{2} \frac{1}{7} \left(-\frac{6}{7} \right) \left(\frac{63}{2187} \right)^2 \right] = 3,01248179 \text{ y el error cometido es inferior a } \frac{1}{6} \frac{6 \times 13}{7^3} \\ \left(\frac{63}{2187} \right)^3 < \frac{2}{7^2} \times 0,000023887872 < \frac{3}{100} 0,000023887872 = 0,0000071663616 < 10^{-6}.$$

890. Trazando por el punto A una paralela al eje x , si B y C son los puntos de intersección con la gráfica de la función más próximos a A, a uno y otro lado, y si b y c son sus respectivas abscisas, se verifica que todo entorno de a contenido en el intervalo (b, c) cumple las condiciones de la definición (1). Análogamente, todo entorno de c contenido en el intervalo (a, v) cumple las condiciones de (2).

891. El punto de la curva de abscisa -1 es $A = (-1, 1)$. La paralela al eje x trazada por A corta a la curva en los puntos $B = (4, 1)$ y A. Se verifica que $-x^2 + 3x + 5 - 1 > 0$ para $-1 < x < 4$ y para los restantes valores de x es $-x^2 + 3x + 5 - 1 \leq 0$, luego $\epsilon = 5$.

892. $y' = (6(x^2 - 5x + 6))$, $y'' = 6(2x - 5)$. $f'(1) = 12 > 0$, luego f es creciente en $x = 1$. $f'(2) = 0$, $f''(2) = -6 < 0$, luego $f(x)$ posee un máximo en $x = 2$. $f'(2,5) = -0,25$, luego la función $f(x)$ es decreciente en $x = 2,5$. $f'(3) = 0$, $f''(3) = 6$, luego $f(x)$ alcanza un mínimo en $x = 3$.

893. $f'(x) = 12(x^3 - x^2 - 5x - 3)$, $f''(x) = 12(3x^2 - 2x - 5)$, $f'''(x) = 24(3x - 2)$, $f^{(4)}(x) = 72$. Las raíces de $f'(x)$ son $\{-1, -1, 3\}$. $f''(-1) = 0$, $f'''(-1) = -120$, luego $f(x)$ es decreciente en $x = -1$. $f''(3) = 16 > 0$, luego la función posee un único mínimo en $x = 3$.

894. Las raíces de $f'(x)$ son $\{1, 1, 1, -2, -2\}$. $f(x)$ posee un único mínimo relativo para $x = 1$ y no posee máximos relativos.

895. Sea C el punto de incidencia del rayo luminoso con el plano P y sea n la normal en P a este plano y φ y ψ los ángulos que forman el rayo incidente AC y el refractado CB con la normal n . Sean D y E los pies de las perpendiculares a P trazadas por A y B, respectivamente, y sea $d_1 = \text{dist.}(A, D)$, $d_2 = \text{dist.}(B, E)$, $l = \text{dist.}(E, D)$. Sea t_1 el tiempo que tarda el rayo en recorrer la distancia AC y t_2 el tiempo que tarda en recorrer la distancia CB. El tiempo empleado en pasar de A a B será $t = t_1 + t_2$. Ahora bien,

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1 \cos \varphi}, t_2 = \frac{d_2}{v_2 \cos \psi}, \text{ luego } t = \frac{d_1}{v_1 \cos \varphi} + \frac{d_2}{v_2 \cos \psi}, \text{ pero } EC + CD = l$$

da lugar a la relación: $d_1 \operatorname{tg} \varphi + d_2 \operatorname{tg} \psi = l$, de donde:

$$\cos \psi = \frac{d_2}{\sqrt{d_2^2 + (l - d_1 \operatorname{tg} \varphi)^2}}, \text{ y } t = \frac{d_1}{v_1 \cos \varphi} + \frac{\sqrt{d_2^2 + (l - d_1 \operatorname{tg} \varphi)^2}}{v_2},$$

$$\text{y } \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d_1}{\cos^2 \varphi} \left[\frac{\operatorname{sen} \varphi}{v_1} - \frac{l - d_1 \operatorname{tg} \varphi}{v_2 \sqrt{d_2^2 + (l - d_1 \operatorname{tg} \varphi)^2}} \right] = \frac{d_1}{\cos^2 \varphi} \left[\frac{\operatorname{sen} \varphi}{v_1} - \frac{\operatorname{sen} \psi}{v_2} \right],$$

y anulando esta derivada resulta la ley de la refracción:

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{v_1}{v_2} = r.$$

896. Se verifica que $df(0; d\mathbf{x}) = 0$. La matriz hessiana es $H_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y su

sucesión secular es $(1, -12, 38, -26)$, luego la signatura lineal es cero y, por tanto, se trata de un máximo.

897.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 1 = 0 \end{cases} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \text{ sucesión secular: } (1, 14, 18, -60),$$

luego no existe máximo ni mínimo.

§ 3. FUNCIONES IMPLÍCITAS E INVERSAS

$$898. (dz_1, dz_2) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$899. (dz_1, dz_2) = (dy_1, dy_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}; (dz_1, dz_2) = (dx_1, dx_2, dy_1, dy_2) \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -4 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

de donde: $df_{\mathbf{x}} + df_{\mathbf{y}} = df$.

$$900. df_{\mathbf{x}} = (2x_1 dx_1 + dx_2, dx_1 - 3dx_2), df_{\mathbf{x}}(0, 0; d\mathbf{x}) = (dx_2, dx_1 - 3dx_2). \|df_{\mathbf{x}}(0, 0; d\mathbf{x})\| = \text{ext. sup. } \frac{\sqrt{dx_1^2 - 6dx_1 dx_2 + 10dx_2^2}}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}}. \text{ Por ser la función}$$

$F(t) = \frac{1 - 6t^2 + 10t^3}{1 + t^2}$ continua en toda la recta, se verifica que, si es acotada, ext. sup.

$F(t) = \text{máx. abs.}$ Como el divisor no se anula y el límite de $F(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ es 10, $F(t)$ es acotada, luego ext. sup. $F(t) = \text{máx. de los máximos relativos. } F'(t) = 0 \Leftrightarrow -1$

+ 3t + t^2 = 0, $t = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ sustituyendo en $F'(t)$ se obtiene el único máximo rela-

tivo $t = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ luego: $\|df_{\mathbf{x}}(0, 0; d\mathbf{x})\| = \sqrt{\frac{130 + 72\sqrt{13}}{13 + 3\sqrt{13}}}$

901. Sea ϵ un número positivo arbitrario. $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d\mathbf{x}) - df_{\mathbf{x}}(0, 0; d\mathbf{x}) = (2x_1 dx_1, 0)$
de donde $\|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d\mathbf{x}) - df_{\mathbf{x}}(0, 0; d\mathbf{x})\| = \text{ext. sup.} \frac{2|x_1| |dx_1|}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}} = 2|x_1|,$

luego, para $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2}$, $\delta_2 = \infty$, se cumple la condición (8).

902. $\|df_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; d\mathbf{x}) - df_{\mathbf{x}}(0, 0; d\mathbf{x})\| = \text{ext. sup.}$

$$2 \sqrt{\frac{x_1^2 dx_1^2 + x_1 x_2 dx_1 dx_2 + 2x_2^2 dx_2^2}{dx_1^2 + dx_2^2}} = \sqrt{4x_2^2 + \frac{V 4x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2 + x_1^4}{1+t^2}}$$

$$t = \frac{2x_2^2 - x_1^2 + V 4x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2 + x_1^4}{x_1 x_2}.$$

Como el último miembro de la norma es una función continua en el entorno de $\mathbf{x} = 0$, y se anula en $\mathbf{x} = 0$, se puede calcular δ_1 en función de ϵ para que la norma sea inferior a ϵ siempre que $|d\mathbf{x}| < \delta_1$, siendo $|d\mathbf{y}|$ arbitrario.

903. $(dz_1, dz_2) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} 3 & 2x_1 \\ -2x_2 & 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2x_1 \\ -2x_2 & 2x_2 \end{vmatrix} = 2x_2(3 + 2x_1) = 0,$

luego la diferencial no es reversible en las variedades lineales: $L_1: x_2 = 0$, $L_2: x_1 = -\frac{3}{2}$.

904. $(dz_1, dz_2) = (dx_1, dx_2) \begin{pmatrix} x_2 y_1 y_2 & y_1 \\ x_1 y_1 y_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 y_1 y_2 & y_1 \\ x_1 y_1 y_2 & y_2 \end{vmatrix} = y_1 y_2 (x_2 y_2 - x_1 y_1),$

luego, $L_1: y_1 = 0$; $L_2: y_2 = 0$; $L_3: x_2 y_2 - x_1 y_1 = 0$.

905. $dx = dz \begin{pmatrix} 2(x_1 - y_1) & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}^{-1} + dy \begin{pmatrix} 2x_1 & -x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(x_1 - y_1) & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}^{-1}$

906. Tomando el vector $\mathbf{a} = (2, 1)$, resulta $\mathbf{c} = (1, 3)$, que es próximo al $(2, 3)$. Veamos si el vector $(2, 1)$ cae dentro del círculo de convergencia de la sucesión (7). Tomaremos, por tanto, $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 3)$.

Se verifica que

$$df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; d\mathbf{x}) = (dx_1, dx_2) D, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x} \parallel$	$f(\mathbf{x}, \mathbf{b})$	$g(\mathbf{x}, \mathbf{b})$	$\mathbf{x}_i$
$\mathbf{a}$	(1,75; 3)	(-3,125; 3,125)	(2,625; 0,375) = $\mathbf{x}_1$
$\mathbf{x}_1$	(2,0156; 3)	(-2,99; 2,99)	(2,49; 0,51) = $\mathbf{x}_2$
$\mathbf{x}_2$	(1,73; 3)	(-3,14; 3,14)	(2,64; 0,36) = $\mathbf{x}_3$
...			

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} = (2,61803398...; 0,381966012...)$$

907. Sea la aplicación: $f(x, 0) = x$, $f(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sh} x$, $df_x = (2 \cos x - \operatorname{ch} x) dx$. Gráficamente se halla (representando las curvas $y = 2 \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sh} x$) que un valor aproximado de la raíz es 1,4. Tomaremos, por tanto, $a = 1,4$, $b = 0$, $c = 0$. En este caso es

$$D = 2 \cos 1,4 - \operatorname{ch} 1,4 = -1,81097, \text{ luego } D^{-1} = \frac{-1}{1,81097} = -0,552$$

$\begin{array}{c} x \\ \\ \end{array}$	$f(x)$	$g(x)$	x_i
1,4	0,0666	-1,403676	1,403676
1,403676	0,06112	-1,437348	1,437348
1,437	-0,00310	-1,43529	1,43529
1,435	0,0008	-1,43544	1,43544
1,4354	0,01081	—	—

Por consiguiente, la mejor aproximación se obtiene para $x = 1,435$.

908. La diferencial es:

$$(dx_1, dx_2, dx_3) \begin{pmatrix} x_3 & -2x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

El rango de la matriz es dos, ya que su determinante es igual a $|J| = (x_3 - x_1 x_2) + 2x_1(x_1^2 - x_2)$ y este jacobiano es nulo en todo vector que verifique al sistema dado. Como el último menor de segundo orden de J es distinto de cero, se verifica que, las dos últimas ecuaciones son principales y las incógnitas x_2 y x_3 son incógnitas principales. De la segunda ecuación se obtiene $x_2 = x_1^2$ y sustituyendo en la tercera, $x_3 = x_1^3$ y el sistema formado por estas dos ecuaciones es equivalente al dado en todos los puntos x_1 que verifiquen $x_1^4 - x_1^4 = 0$, esto es, para cualquier x_1 .

909. La matriz jacobiana en el punto $(0, 0, 1)$ es: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, que muestra que

se pueden tomar como ecuaciones principales las dos últimas y como incógnitas principales las dos últimas.

$$910. \quad dx_n = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}} dx_1 - \dots - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}} dx_{n-1}.$$

$$911. \quad (dx_1, dx_2) = dx_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_2, x_3)} & \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_3, x_1)} \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_3)} & \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \end{pmatrix}.$$

$$912. \quad dx_2 = 0.$$

$$913. \quad (x_1 - 2) dx_1 + (x_2 + 3) dx_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{x_1 - 2}{x_2 + 3}, \quad \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)_a = - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$914. \quad 2x_1 dx_1 + (-2x_2 + 3x_2^2) dx_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2x_1}{2x_2 - 3x_2^2}.$$

$$915. \quad (2xy + yz + z^2 + 1) dx + (x^2 + xz + 2yz - 2) dy + (xy - 3z^2 + y^2 + 2xz + 1) dz = 0,$$

$$dz = -\frac{2xy + yz + z^2 + 1}{xy - 3z^2 + y^2 + 2xz + 1} dx - \frac{x^2 + xz + 2yz - 2}{xy - 3z^2 + y^2 + 2xz + 1} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + yz + z^2 + 1}{xy - 3z^2 + y^2 + 2xz + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 + xz + 2yz - 2}{xy - 3z^2 + y^2 + 2xz + 1}.$$

916. $dx = 6u du + dv$, $dy = v du + u dv$, $dz = (2u + 1) du - 2v dv$. Eliminando du y dv : $[-2v^2 - u(2u + 1)] dx + [12uv + 2u + 1] dy + [6u^2 - v] dz = 0$, de donde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2v^2 + u(2u + 1)}{6u^2 - v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{12uv + 2u + 1}{v - 6u^2}.$$

917. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. En efecto, todo vector $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$ que verifica las ecuaciones dadas verifica esta ecuación. Recíprocamente, si (b_1, b_2, b_3) es un vector que verifica esta ecuación, el sistema $b_1^2 + b_2^2 = \sin^2 x_2$, $b_3 = \cos x_2$ tiene solución. También tiene solución el sistema $\frac{b_2}{b_1} = \tan x_1$, luego existe el vector $(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)$ que verifica al sistema dado.

$$918. \quad dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv.$$

Eliminando du y dv en este sistema lineal, resulta $-\frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} dx + \frac{\partial(h, f)}{\partial(u, v)} dy + \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} dz = 0$, de donde: $dz = -\frac{\frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} dx - \frac{\frac{\partial(h, f)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} dy$.

919. Poniendo $z = F(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $f_1 = \sum b_i x_i$, $f_2 = \sum c_i x_i$, la condición de máximo o mínimo es $d(F + \lambda f_1 + \mu f_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \lambda b_1 + \mu c_1) dx_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \lambda b_2 + \mu c_2) dx_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \lambda b_3 + \mu c_3) dx_3 + (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \lambda b_4 + \mu c_4) dx_4 = 0$. Las condiciones de compatibilidad de este sistema son:

$$g_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & b_1 & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & b_2 & c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$g_2 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & b_1 & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & b_2 & c_2 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Los posibles máximos y mínimos son, por tanto, las soluciones del sistema: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$. Generalmente se procede del siguiente modo: Se resuelve el sistema obtenido al anular las derivadas parciales de $F + \lambda f_1 + \mu f_2$ respecto de x_1, x_2, x_3, x_4 y se substituyen estos valores en $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ y se resuelve este sistema respecto de λ y μ . Calcu-

lados λ y μ se llevan estos valores a la solución del sistema anterior y se calculan (x_1, x_2, x_3, x_4) .

920. Sea $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. $d(F + \lambda f) = ((1 + \lambda a_{11})x_1 + \lambda a_{12}x_2 + \lambda a_{13}x_3)dx_1 + (\lambda a_{21}x_1 + (1 + \lambda a_{22})x_2 + \lambda a_{23}x_3)dx_2 + (\lambda a_{31}x_1 + \lambda a_{32}x_2 + (1 + \lambda a_{33})x_3)dx_3 = 0$. La condición de compatibilidad del sistema es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \rho \end{vmatrix} = 0, \quad \rho = \frac{1}{\lambda}.$$

que es la ecuación secular de la cuádrica.

921. $d(f + \lambda F + \mu l) = [(a_{11} + \lambda + \mu u_1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3]dx_1 + [a_{21}x_1 + (a_{22} + \lambda + \mu u_2)x_2 + a_{23}x_3]dx_2 + [a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} + \lambda + \mu u_3)]dx_3 = 0$, de donde:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda + \mu u_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda + \mu u_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda + \mu u_3 \end{vmatrix} = 0$$

y teniendo en cuenta $l = 0$, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda + \mu u_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda + \mu u_2 & a_{23} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Estas dos ecuaciones permiten calcular λ y μ , y llevando estos valores al sistema de las derivadas parciales, se calcula (x_1, x_2, x_3) .

922. Las condiciones necesarias son $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Se trata, por tanto, de calcular estas derivadas parciales. Ahora bien, la diferencial de la aplicación es:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} d\lambda_2, \\ dy = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} d\lambda_2, \\ dz = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} d\lambda_2, \end{cases}$$

y eliminando $d\lambda_1, d\lambda_2$, se obtiene:

$$dz = \frac{\left| \frac{\partial(F, f_2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right|}{\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right|} dx + \frac{\left| \frac{\partial(f_1, F)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right|}{\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right|} dy,$$

luego, las condiciones buscadas son:

$$\frac{\left| \frac{\partial (F, f_2)}{\partial (\lambda_1, \lambda_2)} \right|}{\left| \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (\lambda_1, \lambda_2)} \right|} = 0, \quad \frac{\left| \frac{\partial (f_1, F)}{\partial (\lambda_1, \lambda_2)} \right|}{\left| \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (\lambda_1, \lambda_2)} \right|} = 0.$$

923. La diferencial de la aplicación es:

$$\left\{ \begin{array}{l} dz = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} d\lambda_n, \\ dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_n} d\lambda_n, \\ \dots\dots\dots \\ dx_r = \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_n} d\lambda_n, \\ 0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_n} d\lambda_n, \\ \dots\dots\dots \\ 0 = \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial \lambda_n} d\lambda_n, \end{array} \right.$$

y eliminando $(d\lambda_1, \dots, d\lambda_n)$, se obtiene:

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} & \dots\dots & \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} \\ dx_1 & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ dx_r & \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial \lambda_n} \end{array} \right| = 0,$$

de donde se calculan $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_r}$, cuya anulación es la condición buscada.

924. La diferencial de la aplicación es

$$\left\{ \begin{array}{l} x dx + \frac{y}{4} dy + \frac{z}{9} dz = 0, \\ 4 dx + dy - 2 dz = 0. \end{array} \right.$$

Eliminando dx se obtiene $\left(2x + \frac{4}{9}z\right)dz = (x - y)dy$, de donde $\frac{dz}{dy} = \frac{x - y}{2x + \frac{4}{9}z}$.

La condición de máximo o mínimo es $\frac{dz}{dy} = 0$, de donde $x = \pm \frac{6}{\sqrt{70}} = y$, $z = \pm \frac{15}{\sqrt{70}}$.

Luego el máximo es el punto

$$\left(\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{15}{\sqrt{70}}\right) \text{ y el mínimo } \left(-\frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{6}{\sqrt{70}}, -\frac{15}{\sqrt{70}}\right).$$

925. La diferencial de la aplicación $F = x^2 + y^2 + z^2$, $f = 0$, $g = 0$, es

$$\begin{cases} 2x dx + 2y dy + 2z dz = dF, \\ x dx + \frac{y}{4} dy + \frac{z}{9} dz = 0, \\ 4 dx + dy - 2 dz = 0. \end{cases}$$

Eliminando dy y dz :

$$\begin{vmatrix} dF - 2x dx & 2y & 2z \\ -x dx & \frac{y}{4} & \frac{z}{9} \\ -4 dx & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

desarrollando:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{18 \left[-3xy - \frac{16}{9}xz + \frac{10}{9}yz \right]}{9y + 2z}.$$

Anulando esta derivada:

$$-27xy - 16xz + 10yz = 0.$$

Las ecuaciones de las rectas de los ejes serán la ecuación anterior juntamente con la ecuación del plano $g = 0$. Separando estas ecuaciones resultan:

$$\frac{x}{0,781} = \frac{y}{-1,124} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x}{0,246} = \frac{y}{1,016} = \frac{z}{1}.$$

$$\begin{aligned} 926. (dy_1, dy_2, dy_3) &= (dt_1, dt_2) \begin{pmatrix} -x_1^2 & -x_1 t_2 + x_2^2 - t_2 \\ 2 - 3t_2 & -x_1 t_1 - t_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 t_1 & t_1 t_2 \\ 1 & -2x_2 t_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} -y_2 & x_2 & x_2 y_3 \\ -y_1 & x_1 - 1 & x_1 y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_2 \\ 1 & 0 & 2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

927. El primer sistema, para $t_1 = t_2 = 1$, se reduce a $x_1^2 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2^2 = 2$. Dibujando estas dos parábolas se ve que el único punto común para el que $x_1 < 0$ es el punto $x_1 = x_2 = -1$. Llevando estos valores al segundo sistema se obtiene: $-y_1 - y_2 + y_3 = 0$,

$y_1 + 2 = 0$, $y_2^2 + y_3 = 0$, que posee la única solución $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$. Por consiguiente:

$$(d y_1, d y_2, d y_3) = (d t_1, d t_2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$928. \quad \frac{d \mathbf{x}}{d s} = \frac{d \mathbf{x}}{d t} \frac{d t}{d s} = \frac{d \mathbf{x}}{d s} \frac{1}{|\mathbf{x}(t)|}.$$

Capítulo séptimo

§ 1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

$$929. \quad a) \quad D = a_0^2 (r_1 - r_2)^2 = a_0^2 \left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_0} - \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_0} \right)^2 = a_1^2 - 4 a_0 a_2.$$

b) $D = a_0^4 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2$. Empléanse las funciones simétricas principales (3) y mediante ellas calcúlense las sumas de potencias de las raíces.

930. El de la ecuación de 2.º grado no ofrece dificultad. Sea la ecuación $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$. Derivando: $3 a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 = 0$. La resultante de estas ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 3 a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 2 a_1 & 3 a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & 2 a_1 & 3 a_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & a_2 & 2 a_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0^2 a_2^3 + a_0 a_1 (-a_1 a_2^2 + 4 a_1^2 a_3 - 3 a_0 a_2 a_3) - 3 a_0^2 a_2 (a_2^2 - 2 a_1 a_3) - 3 a_0^2 a_2 (a_2^2 - 2 a_1 a_3) + 9 a_0^2 (a_2^3 + 3 a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3).$$

931. $f_1 = (x - a) t^2 - (y - b) t + a y - b x = 0$, $f_2 = (x - a) t^3 - (z - c) t + a z - c x = 0$, $f_3 = (y - b) t^3 - (z - c) t^2 + b z - c y = 0$. Eliminando t entre estas ecuaciones se obtienen las tres resultantes siguientes:

$$\begin{aligned} R(f_1, f_2) &= (a y - b x)^2 (x - a)^2 (a y - b x - z + c) \\ &- (x - a)^2 (y - b) (a y - b x) (a z - c x) \\ &- (a z - c x) (a y - b x) (x - a)^2 (y - b) + (x - a)^2 (b z - c y) \\ &+ [(x - a) (z - c) + (y - b)^2 - (x - a) (a y - b x)] + (x - a)^3 (a z - c x)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f_1, f_3) &= (y - b)^2 (a y - b x)^3 + [(y - b)^2 - (x - a) (z - c)] [-(z - c) (a y - b x)^2 \\ &+ (y - b)^2 (b z - c y) - (x - a) (a y - b x) (b z - c y)] \\ &- (x - a) (y - b)^2 (a y - b x) (b z - c y) - (x - a) (y - b)^2 (b z - c y) (a y - b x) \\ &+ (x - a)^2 (b z - c y) [(x - a) (b z - c y) + (z - c) (a y - b x)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f_2, f_3) &= (x - a)^3 (b z - c y)^3 + (x - a) (y - b) (z - c)^2 (a z - c x) (b z - c y) \\ &- (x - a)^2 (z - c)^2 (b z - c y)^2 - (x - a)^2 (y - b) (a z - c x) (b z - c y)^2 \\ &- (x - a)^2 (y - b) (a z - c x) (b z - c y)^2 + (x - a) (y - b)^2 (a z - c x)^2 (b z - c y) \\ &- (y - b)^3 (a z - c x)^3. \end{aligned}$$

Como el máximo común divisor de estos tres polinomios es

$$(ay - bx)^2 (ay - bx - z + c) - 2(y - b)(ay - bx)(az - cx) + (bz - cy)[(x - a)(z - c) + (y - b)^2 - (x - a)(ay - bx)] + (x - a)(az - cx)^2,$$

este polinomio igualado a cero es la ecuación implícita del cilindro.

932. Las raíces racionales son $\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

933. $x = 2,3593$.

§ 2. CÁLCULO NUMÉRICO

934. a) $\sin(4,238) = 0,88957$. b) $\exp(0,226) = 1,2535756652$. c) $\cos(1,189) = 0,372588055243133$. d) $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(0,123) = 0,1223852814$. e) $\operatorname{sh}(0,66) = 0,7089705$. f) $\operatorname{arg} \operatorname{th}(0,33) = 0,342828254$. $\operatorname{arg} \operatorname{th}(0,47) = 0,510070337$. h) $S_i(0,63) = 0,6162727944$. i) $E_2(1,12) = 0,1246210$. j) $E_4(1) = 0,08606$. k) $F(1,765) = 0,9225595178$. l) $\Phi(1,16) = 0,2938112389$. m) $C(0,44) = 0,3041062$. n) $\frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$. p) $\frac{x}{2}(-3 + 5x^2)$.

935. En una tablas naturales referidas a radianes se halla: $x = 0,700$, $\operatorname{tg} x = 0,843$. Tomaremos, por tanto, $x_0 = 0,7$. Sea

$$\varphi(x) = x + \frac{\operatorname{tg} x - 1,2}{-f'(0,7)} :$$

Como $f'(x) = \sec^2 x - 1,2$; en las tablas se halla que $\sec(0,7) = 1,30745$, luego $-f'(0,7) = -0,5094255$. Luego:

$$\varphi(x) = x - \frac{\operatorname{tg} x - 1,2}{0,5094}$$

y se obtiene:

$$x_1 = 0,7 - \frac{\operatorname{tg}(0,7) - 1,2 \times 0,7}{0,5094} = 0,7 - \frac{0,84228 - 0,84}{0,5094} = 0,6955$$

$$x_2 = 0,6955 - \frac{0,834659 - 0,83460}{0,5094} = 0,6955 - \frac{0,000059}{0,5094} = 0,6954.$$

936. La fórmula recurrente es en este caso:

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} x e^x - 1,2}{-(\cos x + \operatorname{sen} x) e^x} + x$$

$$\varphi(0,66) = \frac{0,613116 \cdot 1,93479 - 1,2}{-1,4031 \times 1,93479} + 0,66 = 0,665, \text{ etc.}$$

937. Representando gráficamente las curvas $y = x^5 - x^2$, $y = -x + 10$ se obtiene una solución aproximada: $x_0 = 1,6$. $f(1,6) = -0,47424$. $f' = 5x^4 - 2x + 1$:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) = -0,0327 f(x_{n-1}) + x_{n-1}, \quad x_1 = -0,0327 \cdot (-0,47424) + 1,6 = 1,61551$$

$$x_2 = -0,0327(-0,0051) + 1,61551 = 1,615676.$$

938. Tomaremos como valor aproximado $x_0 = 0,6$. $f' = 7x^6 - 12x^2$, $f'(0,6) = -3,993408$, $\varphi(x) = 0,2501 \cdot f(x) + x$. $x_1 = 0,2501 \cdot f(x_0) + x_0 = 0,2501 \times 0,164 + 0,6$, $x_1 = 0,621$. $x_2 = \varphi(x_1) = 0,2501 \times (0,077684) + 0,621 = 0,640427768$. $x_3 = \varphi(x_2) = 0,2501 \times (-0,004596) + 0,640 = 0,63885$.

939. Tomando $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'^3(x)} f^2(x)$ y $x_0 = 1,6$, se obtiene:
 $x_1 = g(1,6) = 1,6 + 0,015 - 0,0003 = 1,6147$.

940. $x = 2,3025850929$.

941. $x = 0,28835$. Cota de error $3,10^{-5}$.

942. $x = 1,0294$.

943. La solución gráfica de la figura 52', proporciona $x_0 = 2,6$, $y_0 = 1,3$. $f(x_0, y_0) = 0,394$; $f_x(x_0, y_0) = 15,21$; $f_y(x_0, y_0) = -22,28$; $g(x_0, y_0) = 3,054$; $g_x(x_0, y_0) = 22,28$; $g_y(x_0, y_0) = 22,88$.

$$\begin{cases} 15,21 \delta x - 22,28 \delta y = 0,394 \\ 22,28 \delta x + 22,28 \delta y = 3,054 \end{cases}$$

$\delta x = 0,092$, $\delta y = 0,044$, luego $x_1 = 2,692$, $y_1 = 1,344$.

944. La solución gráfica da $x_0 = 1,92$, $y_0 = 1,75$.

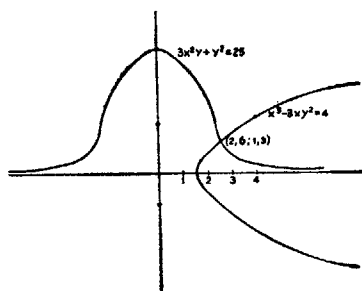


Fig. 52'

$$f(x_0, y_0) = 1,92^{16} + 1,75^{10} - 1024 = 680,788 + 269,389 - 1024 = 73,823$$

$$g(x_0, y_0) = e(e^{0,92} - e^{0,75}) - 1 = 2,718182(2,50929 - 2,11700) - 1 = 0,0663156$$

$$f_x = 10x^9, f_y = 10y^9, g_x = e^x, g_y = -e^y$$

$$f_x(1,92; 1,75) = 10 \cdot 1,92^9 = 3545,77, f_y = 10 \cdot 1,75^9 = 1539,37$$

$$g_x(x_0, y_0) = e \cdot e^{0,92} = 6,8195, g_y(x_0, y_0) = -e \cdot e^{0,75} = -5,754$$

$$3545,77 \delta x + 1539,37 \delta y = -73,823$$

$$6,8195 \delta x - 5,754 \delta y = -0,066$$

$\delta x = -0,017$, $\delta y = -0,008$, luego:

$$x_1 = 1,933; y_1 = 1,742.$$

945. $x = \frac{1}{2} \sin \frac{x+y}{2} = \varphi(x, y)$, $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x-y}{4} = \psi(x, y)$. Desarrollando en serie y tomando los primeros términos, se obtiene:

$$2x = \frac{x+y}{2}, \quad 2y = 1 - \frac{(x-y)^2}{8}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x = 0,1644$, $y = 0,4932$. (Se prescinde de la solución $-12,1644$ por estar muy alejada del origen.) Tomaremos $x_0 = 165$, $y_0 = 0,5$. Como se cum-

plen las condiciones $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_0 < 1$ y $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_0 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_0 < 1$, se puede aplicar el método de iteración basado en el teorema de existencia de las funciones implícitas.

i	x_i	y_i	$\frac{x_i + y_i}{2}$	$\frac{x_i - y_i}{2}$	$\text{sen } \frac{x_i + y_i}{2}$	$\text{cos } \frac{x_i - y_i}{2}$
0	0,165	0,5	0,335	-0,167	0,325934	0,986088
1	0,162967	0,493044	0,32805	-0,16503	0,322150	0,986418
2	0,161075	0,493209	0,327142	-0,166067	0,321203447	0,9862536
3	0,1606017	0,4931268	0,3268642	-0,1662625	0,32107084	0,98622046
4	0,1605354	0,49311026				

946. Puede procederse de modo análogo al seguido en el ejercicio anterior.

947. Poniendo $x = x + iy$, la ecuación anterior se descompone en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{23} [-x^4 + 6x^2y^2 - y^4 - 3x^3 + 9xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 180], \\ y = \frac{-4x^3 + 9x^2 - 6x + 23}{(4x + 9)y} \end{cases}$$

ya preparado para aplicarle el método de recurrencia, y en el que se ha prescindido de la raíz $y = 0$, por tratarse de calcular las raíces imaginarias. Suponiendo que exista una raíz compleja de módulo pequeño, vendrá aproximada por el sistema formado por los términos de menor grado. Tomando hasta los términos de segundo grado se obtiene:

$$\begin{cases} 9x^2 - 3y^2 - 6x + 23 = 0 \\ -3x^2 + 3y^2 + 23x - 180 = 0. \end{cases}$$

Una raíz aproximada de este sistema es $x_0 = 4$, $y_0 = 6,8$. Tomando esta raíz como aproximación inicial, el método de recurrencia proporcionaría una raíz del sistema siempre que sea convergente el proceso. Compruébese.

948. $a + bx + cx^2$.

x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
6,5	42,25	274,625	1785,062	1,87180	12,16670	79,083550
6,51	42,38	275,894	1796,072	1,87333	12,195378	79,391725
6,52	42,51	277,167	1807,134	1,87487	12,224152	79,697748
6,53	42,64	278,445	1818,246	1,87640	12,252892	79,999696
6,54	42,77	279,726	1829,940	1,87793	12,281662	80,317783
6,55	42,90	281,011	1840,624	1,87946	12,310463	80,630550
6,56	43,03	282,800	1851,890	1,88099	12,339294	80,939430
45,71	298,48	1949,668	12728,968	13,13478	85,770541	560,060482
$[x^1]$	$[x^2]$	$[x^3]$	$[x^4]$	$[y]$	$[y x]$	$[y x^2]$

Las incógnitas a , b y c se calculan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 7a + 45,71b + 298,48c = 13,13478 \\ 45,71a + 298,48b + 1949,668c = 85,770541 \\ 298,48a + 1949,668b + 12728,968c = 560,060482 \end{cases}$$

949. $y = 0,806 + 0,2x - 0,102x^2$.

950.

	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$	
	0	0	3,02	0	
	0,1	0,01	2,81	0,281	
	0,2	0,04	2,57	0,514	
	0,3	0,09	2,39	0,717	
	0,4	0,16	2,18	0,876	
	0,5	0,25	1,99	0,995	
	0,6	0,36	1,81	1,086	
	0,7	0,49	1,85	1,295	
Σ	2,8	1,40	18,62	5,764	$\begin{cases} 8a + 2,8b = 18,62 \\ 2,8a + 1,4b = 5,764 \end{cases}$ Solución: $3 - 2x = y$.

951. Análogo a los dos anteriores.

952. $P_5^1(x) = 1 - \frac{2}{5}x$; $P_5^2(x) = 1 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}x^{(2)}$; $P_5^3(x) = 1 - \frac{12}{5}x + \frac{3}{2}x^{(2)}$
 $- \frac{1}{3}x^{(3)}$; $P_5^4(x) = 1 - 4x + \frac{9}{2}x^{(2)} - \frac{7}{3}x^{(3)} + \frac{7}{12}x^{(4)}$.

953. $P_6^1(x) = 1 - \frac{1}{3}x$; $P_6^2(x) = 1 - x + \frac{1}{5}x^{(2)}$; $P_6^3(x) = 1 - 2x + x^{(2)} - \frac{1}{6}x^{(3)}$;
 $P_6^4(x) = 1 - \frac{10}{3}x + 3x^{(2)} - \frac{7}{6}x^{(3)} + \frac{7}{36}x^{(4)}$; $P_6^5(x) = 1 - 5x + 7x^{(2)} - \frac{14}{3}x^{(3)}$
 $+ \frac{7}{4}x^{(4)} - \frac{7}{20}x^{(5)}$.

954. $P_7^1(x) = 1 - \frac{2}{7}x$; $P_7^2(x) = 1 - \frac{6}{7}x + \frac{1}{7}x^{(2)}$; $P_7^3(x) = 1 - \frac{12}{7}x + \frac{5}{7}x^{(2)}$
 $- \frac{2}{21}x^{(3)}$; $P_7^4(x) = 1 - \frac{20}{7}x + \frac{15}{7}x^{(2)} - \frac{2}{3}x^{(3)} + \frac{1}{6}x^{(4)}$; $P_7^5(x) = 1 - \frac{30}{7}x$
 $+ 5x^{(2)} - \frac{8}{3}x^{(3)} + \frac{3}{4}x^{(4)} - \frac{1}{2}x^{(5)}$; $P_7^6(x) = 1 - 6x + 10x^{(2)} - 8x^{(3)} + \frac{15}{4}x^{(4)}$
 $- \frac{11}{10}x^{(5)} + \frac{11}{60}x^{(6)}$.

955. La tabla correspondiente a los polinomios es P_6^i es la siguiente; análogamente se construyen las de los otros polinomios:

x	$P_6^1(x)$	$P_6^2(x)$	$P_6^3(x)$	$P_6^4(x)$	$P_6^5(x)$
1	$\frac{2}{3}$	0	-1	$-\frac{7}{3}$	4
2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	-1	$\frac{1}{3}$	5
3	0	$-\frac{4}{5}$	0	2	0
4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	-5
5	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{7}{3}$	4
6	-1	1	-1	1	-1

956. Como $f(0) = 0$, el coeficiente de P_6^0 es cero. El cálculo se dispone como se indica en el siguiente cuadro. (Téngase en cuenta el cuadro del ejercicio anterior.)

x	y	$P_6^1(x)$	$P_6^2(x)$	$P_6^3(x)$
0	0	1	1	1
1	216	$\frac{2}{3}$	0	-1
2	344	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	-1
3	415	0	$-\frac{4}{5}$	0
4	451	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	1
5	466	$-\frac{2}{3}$	0	1
6	470	-1	1	-1
$\Sigma f(x) P_6^i =$		-672	-339	-13
$\Sigma [P_6^i]^2 =$		31	3,4	6

Resulta, por tanto, que el polinomio es:

$$Q(x) = -0,000217 P_6^1(x) - 0,0000997 P_6^2(x) - 0,0000021 P_6^3(x).$$

957. Se procede como en el ejercicio anterior.

958. Tomando logaritmos, la función se transforma en la siguiente función lineal:

$$\log_{10} y = \log_{10} a + \log_{10} e \cdot b x.$$

959. Se representa, empleando papel milimetrado, la recta $y = 2x + 3$. Por los puntos de abscisas 1, 2, 3, ..., del eje x , se trazan paralelas al eje y hasta que corten a la recta $y = 2x + 3$ y por estos puntos de intersección se trazan paralelas al eje x . En los puntos de intersección de estas paralelas con el eje y se colocan las cotas 1, 2, 3, ..., respectivamente.

960. La construcción es la efectuada en la figura 108 del texto.

961. Empleando unas tablas de la función exponencial se halla: $\exp_{10}(0,1) = 1,259$; $\exp_{10}(0,3) = 1,995$; $\exp_{10}(0,4) = 2,512$; $\exp_{10}(0,5) = 3,162$; $\exp_{10}(0,6) = 3,981$; $\exp_{10}(0,7)$

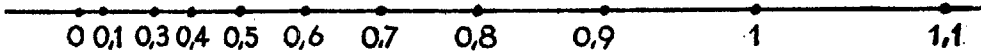


Fig. 53'.

$= 5,012$; $\exp_{10}(0,8) = 6,310$; $\exp_{10}(0,9) = 7,943$; $\exp_{10}(1) = 10$; $\exp_{10}(1,1) = 12,59$. Se llevan estos valores en una recta (fig. 53') y en el punto de abscisa $\exp_{10}(x)$ se pone la cota x .

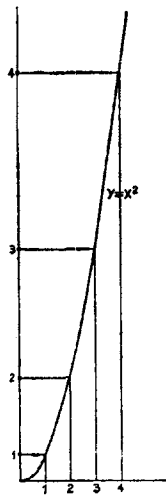


Fig. 54'.

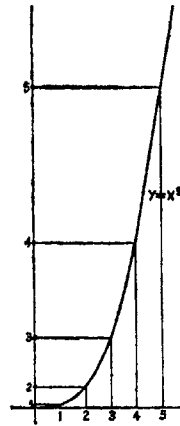


Fig. 55'.

962. Se representa las parábolas cuadráticas y cúbicas (figs. 54' y 55', respectivamente) y se procede como en los ejercicios 959 y 960 (figs. 54' y 55').

963. Se toman dos ejes rectangulares (fig. 56'). En el eje x se toman los puntos de abscisas $x = 10$ y $x = 100$ y en el eje y los puntos de abscisas $y = \frac{1.800}{3.210} = 0,56$, que se señala con la cota 10, e $y = \frac{18.000}{3.200} = 5,45$, que se marca con la cota 100. Por el punto en que se cortan las rectas que unen los puntos con la misma cota en los ejes x e y se trazan rectas que pasen por dos puntos de abscisas 20, 30, ..., 90, del eje x y en los puntos en que estas rectas cortan al eje y se ponen las mismas cotas, 20, ..., 90.

964. Se toman dos ejes de coordenadas. En el eje x se toma como origen de abscisas el punto P de intersección de los ejes (fig. 57'). En el eje y se toma como origen el punto O

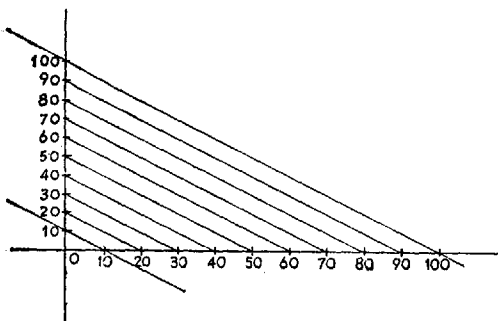


Fig. 56'.

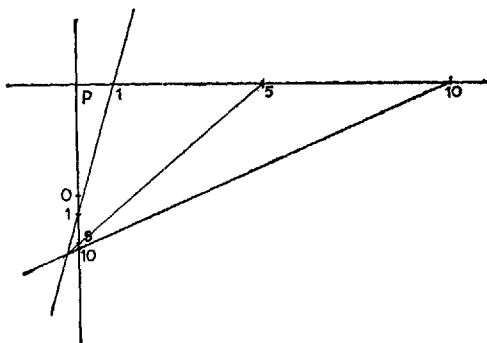


Fig. 57'.

tal que la abscisa de P sea igual a $\frac{3}{2}$. Se señalan en y los puntos de abscisas $-\frac{2}{9}$ y $-\frac{47}{72}$ y en estos puntos se ponen las cotas 1 y 10, respectivamente. Por el punto en que se cortan las rectas 1,1 y 10,10 se trazan rectas y en el punto en que estas rectas cortan al eje y se ponen cotas iguales a las abscisas de los puntos en que dichas rectas cortan al eje x (fig. 57').

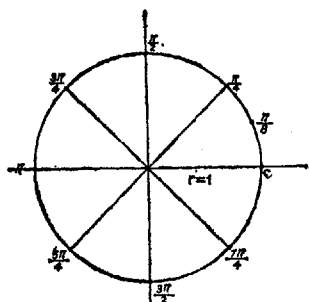


Fig. 58'.

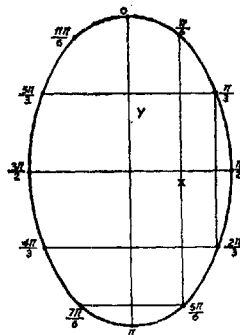


Fig. 59'.

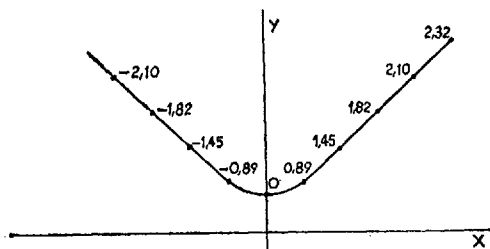


Fig. 60'.

965. a) La curva $x = \sin t$, $y = \cos t$ es una circunferencia (fig. 58'). En la circunferencia se señalan los puntos correspondientes a diversos valores de t y en ellos se coloca como cota el número t .

b) Se dibuja la elipse $x = 2 \sin t$, $y = 3 \cos t$ (fig. 59') y se procede como en a).

c) Se dibuja la hipérbola $x = \text{sh } t$, $y = \text{ch } t$ (fig. 60') y se procede como en los casos anteriores.

966. Comparando la función $z^3 + xz + y = 0$ con la fórmula (8) del texto resulta: $A(z) = z$, $B(z) = 1$, $C(z) = z^3$, $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = y$. Se toman dos rectas paralelas (figura 61'), a distancia unidad, como escala de la variable x y escala de la variable y , respectivamente, y se toman como ejes de coordenadas una perpendicular común a dichas rectas, OO , como eje x y la escala de las x como eje y . La escala de las z tiene por ecuaciones paramétricas: $x = \frac{1}{z+1}$, $y = \frac{z^3}{z+1}$. Se representa esta cúbica (fig. 61') y se gradúa como en los ejercicios precedentes (fig. 61').

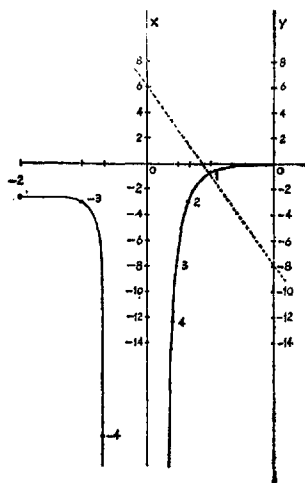


Fig. 61'.

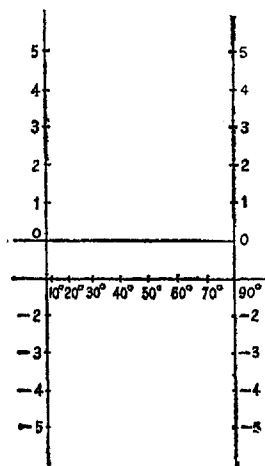


Fig. 62'.

967. Procediendo como en el ejercicio anterior, resulta: $A(z) = \cos^2 z$, $B(z) = \sin^2 z$, $C(z) = 1$, $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = y$. Por consiguiente (fig. 62'), la escala de z tiene por ecuaciones: $x = \sin^2 z$, $y = -1$. Se trata, por tanto, de una paralela al eje de las x por el punto $y = -1$. Se gradúan las escalas (fig. 62') como en los casos precedentes.

968. Comparando la función $z \frac{1}{1+x^2} + z^2 \frac{1}{y} + 1 = 0$ con la fórmula (8) del texto, resulta: $A(z) = z$, $B(z) = z^2$, $C(z) = 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\psi(y) = \frac{1}{y}$. Tomando $c = 1$, resulta como soporte de la escala de las z la hipérbola: $x = \frac{z^2}{z+1}$, $y = \frac{-1}{z+1}$. Se representa esta hipérbola y se gradúan las tres escalas (fig. 63').

969. Tomando logaritmos en $z = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$ resulta: $\log z = \frac{1}{3} (\log x - \log y)$, o bien: $z \left[\frac{1}{6} \log x \right] - \left[\frac{1}{3} \log y \right] - \log z = 0$ y comparando con la fórmula (12) del texto se obtiene: $a = 2$, $b = -1$, $m = -1$, de donde $c = 1$, $d = -1$ y $\varphi(x) = \frac{1}{6} \log x$, $\psi(y) = \frac{1}{3} \log y$, $\zeta(z) = \log z$, con lo que resultan las escalas de la figura 64'.

970. La función dada se puede escribir en la siguiente forma: $f = z \frac{2}{x} - \operatorname{sen}^2 y$ y, teniendo en cuenta la ecuación (15) del texto, resulta: $A(z) = z$, $B(x) = -1$, $\varphi(x) = \frac{2}{x}$.

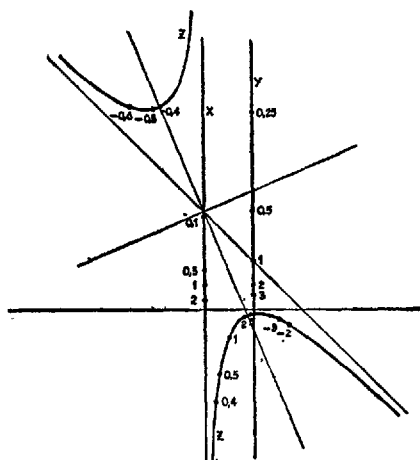


Fig. 63'.

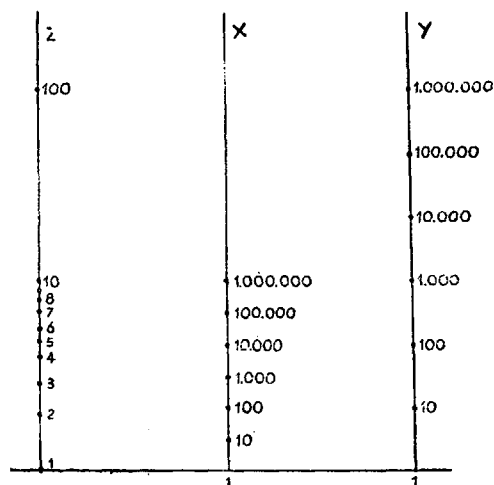


Fig. 64'.

$\psi(y) = \operatorname{sen}^2 y$. De donde: $\zeta(z) = \frac{1}{1-z}$. Graduando las escalas se obtiene el nomograma de la figura 65'.

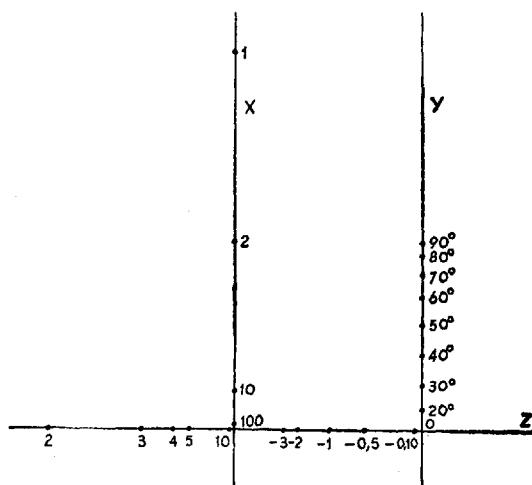


Fig. 65'.

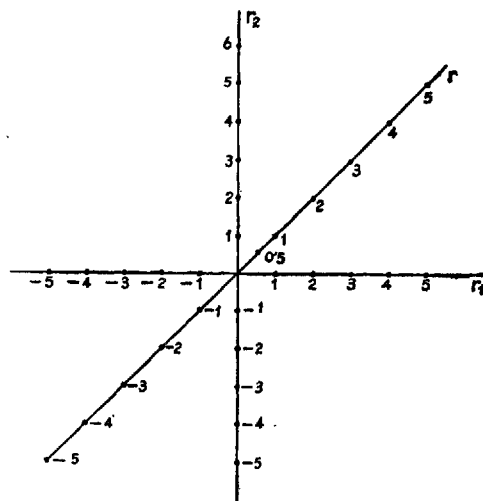


Fig. 66'.

971. En virtud de 11 resulta: $\varphi(x) = r_1$, $\psi(y) = r_2$, $\zeta(z) = -r$ y se obtiene el ábaco de la figura 66'.

Capítulo octavo

§ 1. CURVAS

972. $y_1 = 2 + dt$, $y_2 = 4 + 4dt$, $y_3 = 8 + 12dt$, o bien: $\frac{y_1 - 2}{1} = \frac{y_2 - 4}{4} = \frac{y_3 - 8}{12}$

973. $dx_1 = 2t dt$, $dx_2 = 3t^2 dt$, luego $(d\mathbf{x})_{t=0} = \mathbf{0}$, y la ecuación (8) se reduce a $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, que no es una recta, luego no existe tangente en el sentido de la ecuación (7).

974. $d^2x_1 = 2d^2t^2$, $d^2x_2 = 6td^2t^2$, luego $d^2\mathbf{x}(0) = (2d^2t^2, 0)$, luego la tangente es $x_1 = 1 + 2\lambda$, $x_2 = -1$. Por consiguiente, la tangente es $x_2 + 1 = 0$.

975. $d\mathbf{x} = (\sin t, 6t, e^t - \cos t)$, $d\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $d^2\mathbf{x} = (\cos t, 6, e^t + \sin t)$, $d^2\mathbf{x}(0) = (1, 6, 1)$, luego las ecuaciones de la tangente son: $y_1 = \lambda$, $y_2 = 5 + 6\lambda$, $y_3 = \lambda$; o bien, eliminando λ ,

$$y_1 = \frac{y_3 - 5}{6} = y_3$$

976. a) $d\mathbf{x} = (3t^2 dt, 9t^3 dt)$, $d^2\mathbf{x} = (6t dt^2, 72t^2 dt^2)$, $d^3\mathbf{x} = (6d^3t^3, 504t^3 dt^3)$, luego la ecuación de la tangente es $x_2 = 0$. b) $d\mathbf{x} = (2t dt, 6t^5 dt)$, $d^2\mathbf{x} = (2d^2t^2, 30t^4 dt^2)$, luego la ecuación de la tangente es $x_2 = 0$. c) $d\mathbf{x} = (dt, 3t^2 dt)$, luego la ecuación de la tangente es $x_2 = 0$. El cambio de variable $t = t'^2$ permite pasar de c) a b) y el cambio $t = t''^3$ permite pasar de c) a a). Ahora bien, como, en el cuerpo real, $t = t''^3$ es una biyección $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ya que $t'' = \sqrt[3]{t}$, es siempre una única raíz real, resulta que las curvas a) y c) son la misma curva. Sin embargo, como la correspondencia $t \rightarrow t^2$ no es biunívoca ni suprayectiva, la curva b) es igual a la parte de la curva c) para la que $t \geq 0$ (fig. 67').

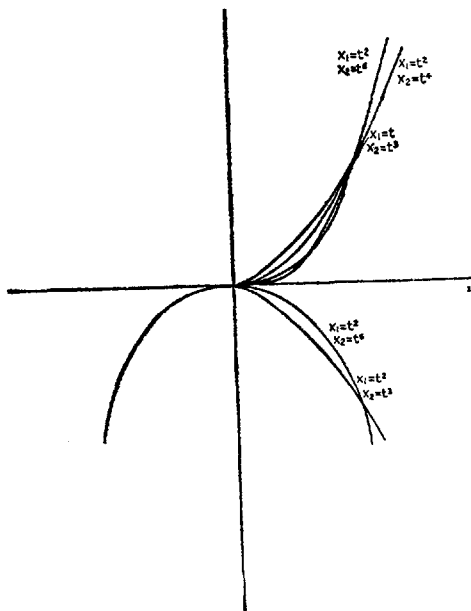


Fig. 67'.

977. Figura 67'.

978. Sí.

979. No.

980. No, porque la ecuación dada es equivalente a la ecuación $y_1 = t'$, $y_2 = t'^2$, obtenida mediante la biyección: $t' = t^3$ y $dy_1 = dt'$, $dy_2 = 2t' dt'$ no es cero para $t' = 0$.

981. Si, porque para toda ecuación equivalente a la dada se verifica que $dx_1 = 2t dt$, $dx_2 = 4t^3 dt$, que se anula para $t = 0$.

982. $d\mathbf{x} = (2t, 3t^2)$, $d^2\mathbf{x} = (2, 6t) \neq 0$, luego $d\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow 2t = 0, 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

983. $d\mathbf{x} = (t-1, t^2+2t-3) dt$, $d^2\mathbf{x} = (1, 2t+2) dt$, luego: punto de retroceso $\Leftrightarrow d\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow t-1 = 0, t^2+2t-3 = (t-1)(t+3) = 0, \Leftrightarrow t = 1$. $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

984. $d\mathbf{x} = \left(2t^3 - 6t^2 + 6t - 2, \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 - t^2 + \frac{7}{6}t - \frac{5}{12}\right) dt$, $d^2\mathbf{x} = \left(6t^2 - 12t + 6, \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{6}\right) dt$, $d^3\mathbf{x} = (12t - 12, t^2 + t - 2) dt$. $t = 1$ anula la diferencial tercera y no anula la cuarta, luego proporciona una cúspide. $d^2\mathbf{x} = (6(t-1)^2, \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{6}) dt$ sólo se anula para $t = 1$, luego el único punto singular de clase > 1 es $t = 1$ y es de clase 4.

985. $\begin{cases} t^2 + 2 = s^2 + 2 \\ t^3 - t + 5 = s^3 - s + 5 \end{cases} \sim \begin{cases} (t-s)(t+s) = 0 \\ (t-s)(t^2 + ts + s^2 - 1) = 0 \end{cases}$, excluida la solución

$t = s$, que no sirve para nuestro problema, queda $\begin{cases} t + s = 0 \\ t^2 + ts + s^2 - 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} t + s = 0 \\ t^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \end{cases}$. Punto doble $x_1 = 3, x_2 = 5$.

986. Para $t = 1$: $x_1 = 3 + 2dt$, $x_2 = 5 + 2dt \Leftrightarrow x_1 - 3 = x_2 - 5$. Para $t = -1$, $x_1 = 3 - 2dt$, $x_2 = 5 + 2dt \Leftrightarrow x_1 - 3 = -(x_2 - 5)$.

987. El único punto singular real es el punto de retroceso: $t = 3, x_1 = x_2 = 0$. La ecuación de la tangente es $x_2 = 3x_1$.

988. $ds = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + r^2 h^2} dt = r \sqrt{1 + h^2} dt$.

989. a) Circunferencia: $x_1 = r \cos t, x_2 = r \sin t, x_3 = 0, ds = r dt$.

b) Elipse: $x_1 = a \cos t, x_2 = b \sin t, x_3 = 0, ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$.

990. a) Circunferencia: $\mathbf{t} = (-\sin t, \cos t, 0), \mathbf{n} = (-\cos t, -\sin t, 0), \mathbf{b} = (0, 0, 1)$.

b) Elipse: $\mathbf{t} = \left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, 0 \right)$,

$\mathbf{n} = \left(\frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, 0 \right), \mathbf{b} = (0, 0, 1)$.

991. $\mathbf{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2 + 9\lambda^4}}, \frac{2\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda^2 + 9\lambda^4}}, \frac{3\lambda^2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2 + 9\lambda^4}} \right)$,

$\mathbf{n} = \left(\frac{-4\lambda - 18\lambda^3}{2D}, \frac{2 - 18\lambda^4}{2D}, \frac{6\lambda + 12\lambda^3}{2D} \right), D = \sqrt{1 + 18\lambda^2 + 54\lambda^4 + 117\lambda^6 + 81\lambda^8}$.

$\mathbf{b} = \left(\frac{3\lambda^2}{E}, \frac{-3\lambda}{E}, \frac{1}{E} \right), E = \sqrt{9\lambda^4 + 9\lambda^2 + 1}$.

992. Tangente:

$$\frac{y_1 - \cos t}{-\sin t} = \frac{y_2 - \sin t}{\cos t} = \frac{y_3 - t}{1}$$

Normal principal:

$$\frac{y_1 - \cos t}{-\cos t} = \frac{y_2 - \operatorname{sen} t}{-\operatorname{sen} t} = \frac{y_3 - t}{0}$$

Binormal:

$$\frac{y_1 - \cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{y_2 - \operatorname{sen} t}{-\cos t} = \frac{y_3 - t}{1}$$

993. a) Plano osculador.

$$\begin{vmatrix} y_1 - \cos t & -\operatorname{sen} t & -\cos t \\ y_2 - \operatorname{sen} t & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ y_3 - t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o bien: $y_1 \operatorname{sen} t - y_2 \cos t + y_3 - t = 0$.

b) Plano normal: $y_1 \operatorname{sen} t - y_2 \cos t - y_3 + t = 0$.

c) Plano rectificante: $y_1 \cos t + y_2 \operatorname{sen} t - 1 = 0$.

994. a) Con el plano de la curva. b) Son perpendiculares al plano de la curva.

$$995. \kappa(t) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}}.$$

$$996. \kappa(t) = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 t + b^2 \operatorname{sh}^2 t}}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t + 1)^3}}.$$

$$997. \kappa(t) = \frac{\sqrt{4 + 2 \operatorname{ch} 2t}}{\sqrt{(2 \operatorname{ch} 2t + 1)^3}}.$$

998. $y = f(x) \Leftrightarrow x = t, y = f(t)$. De donde $\mathbf{x}'(t) = (1, f'(t))$, $\mathbf{x}''(t) = (0, f''(t))$, lue-

$$\text{go } \kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{[1 + f'(x)]^3}}.$$

$$999. x = \frac{r}{r^2 + k^2}, \tau = \frac{k}{r^2 + k^2}.$$

1.000. $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\omega) + \lambda \mathbf{x}'(\omega)$, de donde: $y_1 = f(\omega) \cos \omega + \lambda (f'(\omega) \cos \omega - f(\omega) \operatorname{sen} \omega)$, $y_2 = f(\omega) \operatorname{sen} \omega + \lambda (f'(\omega) \operatorname{sen} \omega + f(\omega) \cos \omega)$. Si se quiere la ecuación implícita en coordenadas cartesianas basta eliminar λ entre las ecuaciones anteriores. Si se desea la ecuación en forma implícita y coordenadas polares, basta poner $y_1 = r \cos \varphi$, $y_2 = r \operatorname{sen} \varphi$ y eliminar λ , con lo que resulta:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{f} \right)' \operatorname{sen}(\varphi - \omega) + \frac{1}{f} \cos(\varphi - \omega).$$

1.001. $\mathbf{x}'(\omega) = (f'(\omega) \cos \omega - f(\omega) \operatorname{sen} \omega, f'(\omega) \operatorname{sen} \omega + f(\omega) \cos \omega)$, $|\mathbf{x}'(\omega)| = \sqrt{f'^2(\omega) + f^2(\omega)}$, de donde:

$$t = \left(\frac{f'(\omega) \cos \omega - f(\omega) \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{f'^2(\omega) + f^2(\omega)}}, \frac{f'(\omega) \operatorname{sen} \omega + f(\omega) \cos \omega}{\sqrt{f'^2(\omega) + f^2(\omega)}} \right).$$

$$n = \left(\frac{f'(\omega) \operatorname{sen} \omega + f(\omega) \cos \omega}{\sqrt{f'^2 + f^2}}, \frac{f(\omega) \operatorname{sen} \omega - f'(\omega) \cos \omega}{\sqrt{f'^2 + f^2}} \right).$$

1.002. La fórmula (22) de 3. proporciona, observando que $\mathbf{x}'^2 = f'^2(\omega) + f''^2(\omega)$, $\mathbf{x}''^2 = (f - f'')^2 + 4f'^2$, $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = f'(f + f'')$,

$$\kappa = \sqrt{\frac{(f'^2 + f''^2) [(f - f'')^2 + 4f'^2] - f'^2 (f + f'')^2}{(f'^2 + f''^2)^3}}$$

1.003. $x_1' = 2t$, $x_2' = 3t^2 + 1$; $x_1'' = 2$, $x_2'' = 6t$; $x_1''' = 0$, $x_2''' = 6$. Por consiguiente, $\mathbf{x}''(t) \times \mathbf{x}'(t) = (-6t^2 + 2)\mathbf{v}$, siendo $\mathbf{v}$ un vector unitario normal al plano de la curva.

De $-6t^2 + 2 = 0$, se deduce $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; como $\mathbf{x}'''(t) \times \mathbf{x}'(t) = -12t\mathbf{v}$, y $-12 \frac{1}{\pm \sqrt{3}}$

$\neq 0$, los puntos $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ son puntos de inflexión.

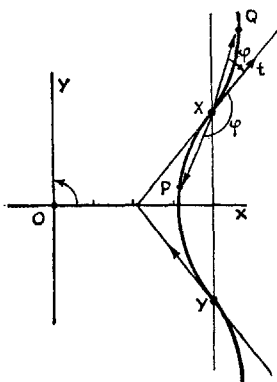


Fig. 68'.

1.004. En el punto de inflexión $X = \left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$ se verifica que el vector tangente es $\mathbf{t} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$

Como $\mathbf{x}'''(t) \times \mathbf{x}'(t) = -16\mathbf{v}$, si P es un punto próximo

a X tal que en su vector de posición $\mathbf{x} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + dt\right)$, sea

$dt < 0$, el ángulo $(\overrightarrow{XP}, \mathbf{t})$ será positivo, y si $dt > 0$ el ángulo será negativo, luego el aspecto de la curva es el de la figura 68'. Análogamente se razona en el otro punto de inflexión.

1.005. $f' = -1 + 6x_1 - 3x_1^2 - 4x_1^3$, $f'' = 6 - 6x_1 - 12x_1^2$, $f''' = -6 - 24x_1$. Los puntos $x_1 = 1$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$ son puntos de inflexión. Para determinar la posición de la curva respecto de la tangente en sus respectivos vectores, se procede como en el ejercicio anterior.

1.006. De $\mathbf{x}(\omega) = (f(\omega) \cos \omega, f(\omega) \sin \omega)$, se deduce que $\mathbf{x}'(\omega) \times \mathbf{x}''(\omega) = (f''f - 2f'^2 + f'^2)\mathbf{v}$ y $\mathbf{x}'(\omega) \times \mathbf{x}'''(\omega) = (f'''f - 3f'f'' - 2ff''')\mathbf{v}$.

1.007. $\mathbf{x}' = (-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$, $\mathbf{x}'' = (-a \cos \varphi, -b \sin \varphi)$, $\mathbf{v} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi)$ $(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v}) \mathbf{x}'^2 - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') (\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{v}) = ab(b \cos^2 \varphi + a \sin^2 \varphi) > 0$.

1.008. Sea el punto $P = (1, 2)$. $f'' = 12x - 2$, $f''(1) = 10 > 0$, luego es cóncava.

$$1.009. |\mathbf{x}| = \frac{t \sqrt{(t+2)^2 + t^2(t+1)^2}}{(t+1)(t-1)(t+2)}; \quad \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} = \frac{t+2}{\sqrt{(t+2)^2 + t^2(t+1)^2}},$$

$\frac{x_1}{|\mathbf{x}|} = \frac{t(t+1)}{\sqrt{(t+2)^2 + t^2(t+1)^2}}$. Para $t \rightarrow -1$ se obtiene el vector asintótico $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$

y para $t \rightarrow 1$ el vector $\mathbf{a}_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Finalmente, para $t \rightarrow -2$ se obtiene

$\mathbf{a}_3 = (0, 1)$.

1.010. $\mathbf{a} = (0, 1)$.

1.011. Para que $\rho \rightarrow \infty$ debe tender $2\omega - 1$ a $k\pi$, luego los vectores asintóticos son $a_k = \left(\cos \frac{k\pi + 1}{2}, \sin \frac{k\pi + 1}{2} \right)$.

1.012. $n_1 = (0, 1)$, $n_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right)$, $n_3 = (1, 0)$. $\rho_1 = \lim_{t \rightarrow -1} (x \cdot n_1) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2}{t^2 + t - 2} = -\frac{1}{2}$; $\rho_2 = \lim_{t \rightarrow 1} (x \cdot n_2) = \frac{1}{\sqrt{13}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-3t^2 - 4t}{(t+1)(t+2)} = -\frac{7}{6\sqrt{13}}$; $t_3 = \lim_{t \rightarrow -2} (x \cdot n_3) = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t}{t^2 - 1} = -\frac{2}{3}$. Por consiguiente, las asíntotas son: $2y_2 + 1 = 0$, $2y_1 - 3y_2 = \frac{35}{78}$, $3y_1 + 2 = 0$.

1.013. La fórmula (25) da las dos asíntotas: $r \sin \varphi = \pm a$.

1.014. $\rho \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{6} - \varphi \right) = \pm \frac{r}{\sqrt{3}}$.

1.015. a) $(-1, 1)$ y $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$. b) $(0, 0)$.

1.016. Los puntos de inflexión se hallan entre los siguientes: a) $(0, 0)$, $\left(-\frac{4b}{3a}, \pm \frac{4b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}a}\right)$

b) La ecuación $-3x_1^4 - 6cx_1^2 - 12dx + c^2 = 0$ proporciona los posibles puntos de inflexión. c) No posee puntos de inflexión a distancia finita. d) Los posibles puntos de inflexión vienen dados por $x_2 = \pm i\sqrt{3}b$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pm b$. Etc.

1.017. a) $x_1 = tx_2$, $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} x_2^{-3}(x_2^2 + at^3x_2^3 + bt^2x_2^2) = 0$ proporciona $t = 0$, luego $x_1 = 0$ es la única dirección asintótica.

b) $x_1 = 0$. c) $x_2 = tx_1$, $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_1^{-3}(t^2x_1^3 - a^3) = 0 \Rightarrow t = 0$, luego $x_2 = 0$ es dirección asintótica. Análogamente, $x_1 = 0$ es también dirección asintótica.

c) $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son direcciones asintóticas. d) Idem. e) Idem. f) y g) Las direcciones asintóticas son $x_1 = 0$, $x_1 \pm ix_2 = 0$. h) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. i) $x_1 = 0$, $ax_2 \pm x_1 = 0$.

1.018. a) $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{x_2}{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{e^{x_1}}{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{e^{x_1}}{1} = \infty$, luego la recta $x_1 = 0$ es dirección asintótica, $x_2 = 0$ también lo es.

b) $x_2 = 2x_1$.

1.019. Dirección asintótica. $x_2 = \pm \frac{1}{a} x_1$ y $x_1 = 0$. La fórmula 16 proporciona: $2a^2tn + b + c + d = 0$, de donde $n = \mp \frac{b+c+d}{2a}$ y las asíntotas serán: $x_2 = \pm \frac{1}{a} x_1 \mp \frac{b+c+d}{2a}$. A la dirección asintótica $x_1 = 0$ le corresponde la asíntota $x_1 = 0$.

1.020. Direcciones asintóticas: $x_2 = x_1$, $x_2 = -x_1$, $x_2 = ix_1$, $x_2 = -ix_1$. La fórmula (16) da $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_1^{-3}[x_1^4 - (ex_1 + n)^4 + x_1^2 - 2x_2^2] = 0 \Leftrightarrow -4e^3n = 0 \Rightarrow n = 0$, luego las asíntotas son las mismas rectas anteriores.

1.021. Asíntota $x_2 = x_1$.

1.022. Las derivadas sucesivas de $f(x, \varphi(x))$ son:

$$\begin{aligned} D f &= f_1 + f_2 \varphi' \\ D^2 f &= f_{11} + 2 f_{12} \varphi' + f_{22} \varphi'^2 + f_3 \varphi'' \\ D^3 f &= f_{111} + 3 f_{112} \varphi' + 3 f_{122} \varphi'^2 + f_{222} \varphi'^3 + 3(f_{12} + f_{22} \varphi') \varphi'' + f_3 \varphi''' \\ D^4 f &= f_{1111} + 4 f_{1112} \varphi' + 6 f_{1122} \varphi'^2 + 4 f_{1222} \varphi'^3 + f_{2222} \varphi'^4 + 3(2 f_{112} \\ &\quad + 4 f_{122} \varphi' + 2 f_{222} \varphi'^2 + f_{22} \varphi'') \varphi'' - 4(f_{12} + f_{22} \varphi') \varphi''' + f_3 \varphi^{(4)} \\ D^5 f &= f_{11111} + 5 f_{11112} \varphi' + 10 f_{11122} \varphi'^2 + 10 f_{11222} \varphi'^3 + 5 f_{12222} \varphi'^4 + f_{22222} \varphi'^5 \\ &\quad + (10 f_{1112} + 30 f_{1122} \varphi' + 30 f_{1222} \varphi'^2 + 10 f_{2222} \varphi'^3 + 15 f_{122} \varphi'' + 15 f_{222} \varphi' \varphi'') \varphi'' \\ &\quad + (10 f_{112} + 20 f_{122} \varphi' + 10 f_{222} \varphi'^2 + 10 f_{22} \varphi'') \varphi''' + (5 f_{12} + 5 f_{22} \varphi') \varphi^{(4)} \\ &\quad + f_3 \varphi^{(5)} \end{aligned}$$

En el origen de coordenadas se verifica, para las curvas dadas, que $f_1 = f_2 = f_{11} = f_{12} = f_{22} = 0$, $f_{111} = f_{222} = 0$, $f_{112} = 2$, $f_{122} = -2$, $f_{1111} = f_{2222} = 24$, $f_{1112} = f_{1122} = f_{1222} = 0$ y todas las derivadas siguientes son nulas. Por consiguiente, la tercera derivada da: $\varphi' - \varphi'^2 = 0$, de donde $\varphi' = 0$, $\varphi' = 1$. Para $\varphi' = 0$, la derivada cuarta da $\varphi'' = -2$ y la derivada quinta $\varphi''' = 6$. Por consiguiente, una rama con centro en el origen es:

$$\varphi_1(x) = -x^2 + x^3 + \dots$$

La raíz $\varphi' = 1$ proporciona: $\varphi'' = 4$, $\varphi''' = 24$, luego otra rama es:

$$\varphi_2(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + \dots$$

Considerando la rama $x = \psi(y)$ se obtiene, análogamente:

$$\psi(y) = \frac{1}{2} y^2 + \dots$$

1.023. Los valores de φ' son 1, 2, 3. Se procede como en el caso anterior.

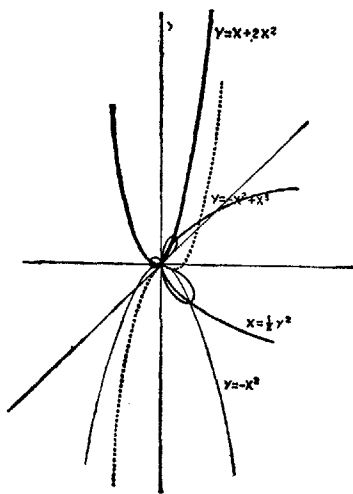


Fig. 69'.

1.024. $\frac{\partial f}{\partial x} = 24 + 24x + 12x^2 - 24e^x = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = 96y^3 = 0$, proporciona como único punto múltiple $P = (0, 0)$. Las tangentes son $x = \epsilon \sqrt[4]{24} y$, siendo ϵ las raíces cuartas de la unidad: 1, -1 , i , $-i$.

1.025. El origen anula todas las diferenciales hasta la de orden $r-1$ inclusive, luego es singular. La diferencial de orden r en el origen es $f_r(dx, dy)$.

1.026. Las tangentes en el origen son: $x = 0$, $(x+y)^2 = 0$.

1.027. Las tangentes en el origen son $x^3 = 0$, $y = x$.

1.028. Las tangentes en el origen son $(x-y)^2 = 0$, $(x+y)^2 = 0$.

1.029. Teniendo en cuenta las ramas halladas en el ejercicio 1.022, resulta la siguiente gráfica (fig. 69').

§ 2. SUPERFICIES

$$1.030. \begin{vmatrix} x_1 - 2 & 1 & 0 \\ x_2 - 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, \quad -4x_1 + 8x_2 + x_3 = 0.$$

$$1.031. 2(x_1 + 1) - 2(x_2 - 2) + x_3 - 4 = 0.$$

$$1.032. (2x_1 + 4x_2)(X_1 - x_1) + (-6x_2 - x_3 + 4x_1 - 1)(X_2 - x_2) + (2x_3 - x_2)(X_3 - x_3) = 0.$$

$$1.033. P = (1, 2, -1).$$

$$1.034. \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 x_3 + x_2 + x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 x_3 + x_1 + x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2 + x_1 + x_2.$$

El único punto singular es, por tanto, $(0, 0, 0)$.

$$1.035. \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 + x_3 - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + x_3 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 + x_2 - 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 3x_1^2 - x_2, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 3x_2^2 - x_1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = 3x_3^2 - 1. \text{ Luego la tangente en } (0, 0, 0)$$

tiene por ecuaciones: $-x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_3 = 0$.

1.036. En el punto $(0, 0, 0)$ la tangente está indeterminada, pues los tres planos tangentes se reducen a $0 = 0, x_2 = 0, 0 = 0$. Por consiguiente, es necesario separar las diversas componentes de la curva. La curva es $x_1 = 0, x_2^2 = 0$, luego la tangente es $x_1 = 0, x_2 = 0$.

1.037. Comenzaremos por escribir la ecuación del hiperboloide en la forma explícita (2):

$$\mathbf{x}(u_1) = \left(2a \frac{u_1}{1+u_1^2}, b \frac{1-u_1^2}{1+u_1^2}, 0 \right), \quad \mathbf{v}(u_1) = \left(\frac{u_1^2-1}{b c u_1}, \frac{2}{a c}, \frac{1+u_1^2}{a b u_1} \right),$$

de donde

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{v} = \frac{4}{1+u_1^2} \left(-\frac{1}{a}, \frac{1-u_1^2}{2b u_1}, 0 \right)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}' = \frac{2}{a b c u_1^2} \left(\frac{1}{a} (u_1^2 - 1), \frac{2}{b} u_1, -\frac{1}{c} (u_1^2 + 1) \right),$$

y

$$(\mathbf{x}'(u_1) \times \mathbf{v}(u_1)) \cdot (\mathbf{v}(u_1) \times \mathbf{v}'(u_1)) = \frac{8}{a b c u_1^2 (1+u_1^2)} (1-u_1^2) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

Si el hiperboloide es de revolución ($a = b$), la línea de estricción es la circunferencia del plano $x_3 = 0$. Obsérvese que en lo que antecede no se ha tomado $\mathbf{v}$ unitario, por lo que no se puede aplicar la última expresión de (12) para la línea de estricción.

1.038. Supondremos que u_1 es el arco de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1)$, con lo que $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' = 0$. Por consiguiente, la ecuación (12) se reduce a $\mathbf{y} = \mathbf{x}(u_1)$.

1.039. $\mathbf{x}(u_1) = (\cos u_1, \sin u_1, a u_1)$, $\mathbf{v}(u_1) = (\cos \alpha \cos u_1, \cos \alpha \sin u_1, \sin \alpha)$. $\mathbf{x}' = (-\sin u_1, \cos u_1, a)$, $\mathbf{v}' = (-\cos \alpha \sin u_1, \cos \alpha \cos u_1, 0)$, luego la línea de estricción es (se puede aplicar el último miembro de (12) por ser $\mathbf{v}$ unitario):

$$\mathbf{y} = (0, 0, a u_1 - \operatorname{tg} \alpha), \quad \text{esto es, la recta} \quad y_1 = 0, y_2 = 0.$$

1.040. Sea la superficie desarrollable $\mathbf{y} = \mathbf{x}(u_1) + u_2 \mathbf{x}(u_1)$, siendo u_1 el arco de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1)$. Sea $\mathbf{t} = \mathbf{x}(t)$ un punto de la arista de retroceso. Un plano incidente con $\mathbf{t}$ es

$(\mathbf{y} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{a} = 0$, siendo $\mathbf{a}$ un vector normal al plano. Los puntos de la intersección de la superficie con el plano verifican la relación:

$$\dot{\mathbf{x}}(u_1) + u_2 \ddot{\mathbf{x}}(u_1) - \mathbf{t} \mathbf{a} = 0, \quad u_2 = - \frac{(\mathbf{x}(u_1) - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{a}}{\dot{\mathbf{x}}(u_1) \cdot \mathbf{a}}$$

y, por tanto, la ecuación de la curva de intersección es:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(u_1) - \frac{[\mathbf{x}(u_1) - \mathbf{t}] \cdot \mathbf{a}}{\dot{\mathbf{x}}(u_1) \cdot \mathbf{a}} \dot{\mathbf{x}}(u_1),$$

y el vector derivado:

$$\mathbf{y}' = \dot{\mathbf{x}}(u_1) - \frac{[\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}(u_1)]^2 - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}(u_1) - \mathbf{t})] (\mathbf{a} \cdot \ddot{\mathbf{x}}(u_1))}{[\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}(u_1)]^2} \dot{\mathbf{x}}(u_1) - \frac{[\mathbf{x}(u_1) - \mathbf{t}] \cdot \mathbf{a}}{\dot{\mathbf{x}}(u_1) \cdot \mathbf{a}} \ddot{\mathbf{x}}(u_1)$$

y, para $u_1 = t$, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}$, resulta $\mathbf{y}'(t) = 0$, que prueba que, en general, el punto $\mathbf{t}$ es un punto de retroceso.

1.041. $\{\mathbf{v}, \mathbf{x}', \mathbf{v}'\} = 0$, luego es desarrollable. La arista de retroceso es $\mathbf{y} = (-4u_1^3 - 12u_1^5, \frac{1}{2} + 3u_1^2 + \frac{15}{2}u_1^4, 0) + \frac{360u_1^5 + 162u_1^3 + 18u_1}{36u_1^2 + 9} (3u_1^2, -3u_1, 1)$.

1.042. $(x_1 - 2x_2)^2 + 4x_3^2 = 16$ y $(x_1 - 2x_2)^2 = 4(x_1 - 1)^2(4 - x_3^2)$.

1.043. $x_1 = (1 + u_2) \cos u_1$, $x_2 = (1 + u_2) \sin u_1$, $x_3 = u_1 + a u_2$.

1.044. $x_1^2(1 - x_3^2) - x_2^2 = 0$.

1.045. La ecuación de la segunda superficie del ejercicio 1.042 (la primera es un cilindro)

en forma paramétrica es $x_1 = \frac{\pm 2\sqrt{4-t^2}}{1 \pm 2\sqrt{4-t^2}} + 2s \frac{1}{1 \pm 2\sqrt{4-t^2}}$, $x_2 = s$, $x_3 = t$.

y basta aplicar la fórmula del texto. La superficie del ejercicio 1.043 está ya en forma paramétrica y, como se ha visto en el ejercicio 1.039, la línea de estricción es el eje x_2 . Las ecuaciones paramétricas del conoide recto del ejercicio 1.044 son $x_1 = s$, $x_2 = \pm s \sqrt{1-t^2}$, $x_3 = t$.

1.046. Las ecuaciones paramétricas son: $x_1 = 1 + s(t-1)$, $x_2 = 1 + s(t^2-1)$, $x_3 = 1 + s(t^3-1)$. Para obtener la ecuación implícita elimínese el parámetro t del sistema $(t^2-1)(x_1-1) = (t-1)(x_2-1)$, $(x_1-1)(t^3-1) = (t-1)(x_3-1)$, $(x_2-1)(t^3-1) = (t^2-1)(x_3-1)$ y tómese el factor común a las tres resultantes.

1.047. Obsérvese que una superficie cilíndrica cuyas generatrices sean paralelas al eje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ tiene una ecuación en la que no figura la variable x_3 , ya que si $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ es la ecuación de dicha superficie cilíndrica y $(x_1, x_2, 0)$ un punto de ella perteneciente al plano $x_3 = 0$, todos los puntos (x_1, x_2, t) , cualquiera que sea t pertenecería también a la superficie cilíndrica, luego $f(x_1, x_2, t) = 0$ para todo t , lo que indica que $f(x_1, x_2, t)$ es independiente de t . Por consiguiente, si entre las dos primeras ecuaciones de la curva se elimina t , se obtiene la ecuación $x_1^2 - x_2 = 0$ que representa una superficie cilíndrica que contiene a la curva dada. La superficie $x_1^2 - x_2 = 0$ es, por tanto, la proyectante de la cúbica paralelamente al eje x_3 . Análogamente, las proyectantes paralelamente a los ejes x_2 y x_1 son, respectivamente, $x_1^3 - x_3 = 0$, $x_2^3 - x_3^2 = 0$.

1.048. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, resultan las siguientes ecuaciones de las superficies cilíndricas que proyectan la hélice paralelamente a las rectas x_3, x_2, x_1 , respectivamente: $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 = \cos x_3$, $x_2 = \sin x_3$.

$$1.049. (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - a^2 - r^2)^2 = 4a^2(r^2 - X_3^2).$$

$$1.050. b_3^2(X_1^2 + X_2^2) = (b_1 X_3 + a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (b_2 X_3 + a_2 b_3 - a_3 b_2)^2.$$

$$1.051. \frac{(\nu x_1 - \lambda x_3)^2}{a^2 \nu^2} + \frac{(\nu x_2 - \mu x_3)^2}{b^2 \nu^2} = 1.$$

$$1.052. X_3 = a X_1^2 + b X_2^2.$$

Capítulo noveno

§ 1. INTEGRALES INDEFINIDAS

- 1.053. a) $\frac{1}{2} x^6 + c$. b) $\frac{1}{3} \sqrt{8x^3 + c}$. c) $\frac{1}{6} \sqrt{3x+1} + c$. d) $\frac{1}{6} \log \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$.
 e) $\frac{16}{9} \sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{15} \sqrt[4]{x^5} + 4 \sqrt[4]{x} + c$. f) $\operatorname{tg} x - x + c$. g) $2 \log |x-3| dx$. h) $\frac{4}{7} x + \frac{27}{49} \log |7x+2| + c$. i) $\frac{4}{25} \left[\log(5x+1) + \frac{1}{5x+1} \right] + c$. j) $\frac{1}{6} \log |3x^2-1| + c$.
 k) $\frac{1}{3} \log |x^3 + \sqrt{x^6-1}| + c$. l) $\log \frac{c}{\cos x}$. m) $-\frac{3\sqrt{x}}{2 \log 3} + c$. n) $\log(3x^2 + 5 \cos^2 x) + c$. p) $\log \frac{c}{2 \sin x + 3 \cos x}$.
- 1.054. a) $\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + c$. b) $-\frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} - \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} + c$. c) $\frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + c$. d) $-\frac{1}{4} \cos 2x + c$. e) $\frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right] + c$. f) $\frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + c$.
- 1.055. a) $y = \frac{1}{2x+1} \Rightarrow -\sqrt{4x^2+4x-1} + c$. b) $x = -\log y \Rightarrow -\frac{1}{2} \log(1+2e^{-x}) + c$. c) $y = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{2}{9} \frac{3x+2}{\sqrt{3x+1}} + c$. d) $y = a + \sqrt{x} \Rightarrow 2a[(a + \sqrt{x}) - a \log(a + \sqrt{x})] + 2 \left[\frac{1}{3} (a + \sqrt{x})^3 - \frac{3}{2} a(a + \sqrt{x})^2 + 3a^2(a + \sqrt{x}) - a^3 \log(a + \sqrt{x}) \right] + c$. e) $y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 2 \arg \coth \sqrt{2x+1} + c$. f) $\sqrt{x} = y \Rightarrow 2(\sqrt{x} - \frac{1}{3} \sqrt{x^3}) + c$. g) $-\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c$.
- 1.056. a) $\frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + c$. b) $\log a \cdot a^{x^2} + c$. c) $-\log |\cos x| + c$. d) $-\cos \log x + c$. e) $\operatorname{tg} \sqrt{x} + c$. f) $-2 \arcsin \sqrt{1-x} + c$. g) $\frac{1}{2a} \log |1+ax^2| + c$. h) $\arg \operatorname{sh} \sin x + c$. i) $\arg \operatorname{tgh} \sin x + c$.

1.057. a) $x(\log x - 1) + c$. b) $e^x(x - 1) + c$. c) $-x \cos x + \sin x + c$. d) $x \arcsin x + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + c$. e) $x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c$. f) $\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + c$. g) $x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c$. h) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$. i) $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$. j) $-\frac{1}{2} \cotg^2 x - \log |\sin x| + c$. k) $-\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$.

$$1.058. I_n = \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_m = \int \sin^m x dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$1.059. I_n = \int x^n \operatorname{sh} x dx = x^n \operatorname{ch} x - n x^{n-1} \operatorname{sh} x + n(n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \int x^n \operatorname{ch} x dx = x^n \operatorname{sh} x - n x^{n-1} \operatorname{ch} x + n(n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \int e^x \operatorname{sh}^n x dx = \frac{1}{1-n^2} e^x \operatorname{sh}^n x - \frac{n}{1-n^2} e^x \operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n}{n+1} I_{n-2}$$

$$I_n = \int e^x \operatorname{ch}^n x dx = \frac{1}{1-n^2} e^x (\operatorname{ch}^n x - n \operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x) + \frac{n}{n+1} I_{n-2}$$

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x dx = \frac{1}{m+n} \operatorname{sh}^{m-1} x \operatorname{ch}^{n+1} x - \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \\ = \frac{1}{m+n} \operatorname{sh}^{m+1} x \operatorname{ch}^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

1.060. a) $\frac{1}{2} x^2 - 3x + 7 \log \left| x + \frac{3}{2} \right| + c$. b) $-14 \log |x-3| + 19 \log |x-4| + c$.

c) $\frac{1}{3} x^3 + x^2 + 5x + \frac{1}{3} \log |x+1| + \frac{29}{3} \log |x-2| + c$.

1.061. a) $\frac{1}{2} x^2 + 2x - 3 \frac{1}{x-1} + \log |x-1| + c$. b) $\log \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + \frac{16}{3} \arctg \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) + c$. c) $\frac{1}{2} x^2 + \frac{3x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctg x + c$.

1.062. a) $-\frac{1}{8\sqrt{3}} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 7 + 4\sqrt{3} \right| + \frac{1}{8\sqrt{3}} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 7 - 4\sqrt{3} \right| + c$. b)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} x + \frac{\pi}{8} \right) \right| + c. c) \frac{1}{9} \arctg \frac{\operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{\sqrt{3}} + c.$$

1.063. $y^2 = a + bx + cx^2$. a) $c > 0$, la curva anterior es una hipérbola de asíntotas: $y = \pm \sqrt{c} x$. Cortando por paralelas a una de ellas: $y = \sqrt{c} x + t$, se obtiene: $x = \frac{a-t^2}{2\sqrt{c}t-b}$, $y = \frac{a\sqrt{c}-bt+\sqrt{c}t^2}{2\sqrt{c}t-b}$, $dx = \frac{-2\sqrt{c}t^2+2bt-2\sqrt{c}a}{(2\sqrt{c}t-b)^2} dt$.

b) $c < 0$. La cónica es una elipse que corta al eje $x = 0$ en los puntos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$.

que son reales siempre que la elipse sea real, único caso en el que es posible la integración en el cuerpo real, luego bastará cortar por el haz de rectas: $y = t \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right)$.

1.064. Poniendo $y^2 = x^3 + 2x^2$, la curva es una cúbica con un punto doble en el origen. Poniendo $y = tx$, resulta: $x = t^2 - 2$, $y = t^3 - 2t$, $dx = 2t dt$.

1.065. Poniendo $y^3 = x^4 + 8x^3$, la curva posee un punto triple en el origen, luego es unicursal. El cambio de variable $y = tx$ resuelve el problema.

$$1.066. \text{ a) } \frac{24}{19} \sqrt[6]{x^{19}} + \frac{120}{17} \sqrt[6]{x^{17}} + 10 \sqrt[6]{x^{15}} + c. \text{ b) } \frac{1}{9} \sqrt[5]{(5\sqrt{x^3} + 1)^6} + c.$$

§ 2. INTEGRAL DE RIEMANN

1.067. Sea $\mathcal{P}(a, b)$ el conjunto de las particiones de $[a, b]$, $\mathcal{P}(b, c)$ el conjunto de las particiones de $[b, c]$ y $\mathcal{P}(a, c)$ el conjunto de las particiones de $[a, c]$. Sea $\mathcal{P}(a, b) + \mathcal{P}(b, c)$ el conjunto de las particiones de $[a, c]$ que se obtiene tomando una partición de $[a, b]$ y otra de $[b, c]$. Se verifica que $\mathcal{P}(a, b) + \mathcal{P}(b, c) \subset \mathcal{P}(a, c)$, y como dada una partición de $[a, c]$, se obtiene una partición de $\mathcal{P}(a, b) + \mathcal{P}(b, c)$ añadiéndole el punto b y al añadir un punto la suma S que se obtiene es inferior o igual a la correspondiente a la partición dada, resulta que el extremo inferior de la S correspondiente a las particiones $\mathcal{P}(a, b) + \mathcal{P}(b, c)$ es igual al extremo inferior correspondiente a la partición $\mathcal{P}(a, c)$. Análogamente para las integrales inferiores.

1.068. Sea $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Si M_i , M'_i y M''_i son los extremos superiores de $f + g$, f y g , respectivamente, en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, se verifica que $f(x) + g(x) \leq M'_i + M''_i \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, luego $M'_i + M''_i$ es una cota superior de $\{f(x) + g(x)\}_{x \in [x_{i-1}, x_i]}$ y como M_i es el extremo superior de este conjunto, es $M_i \leq M'_i + M''_i$, de donde resulta inmediatamente el primer teorema y análogamente el segundo.

$$1.069. \int_a^b f(x) dx = 0, \int_a^b (f(x) dx) = b - a.$$

1.070. (Fig. 70'). A cada partición $P = \{x_0 = 2 < \dots < x_n = 7\}$ del segmento $[2, 7]$, corresponde como suma s el área de un polígono (el punteado de la figura) y a S el área de otro polígono (el de trazo grueso de la figura) que contiene al anterior. El único número comprendido entre todos los s y todos los S es el área del trapecio $ABCD$, luego la integral valdrá: 14, 375.

1.071. Tomando la partición $P = \{0,5 < 0,6 < 0,7\}$, se verifica que $s(P) = 0,1 \cdot \text{sen } 0,5 + 0,1 \cdot \text{sen } 0,6 = 0,1044$ y $S(P) = 0,1 \cdot \text{sen } 0,6 + 0,1 \cdot \text{sen } 0,7 = 0,1209$, luego tomando como valor de la integral cualquiera de estas sumas se comete un error inferior a 0,0165.

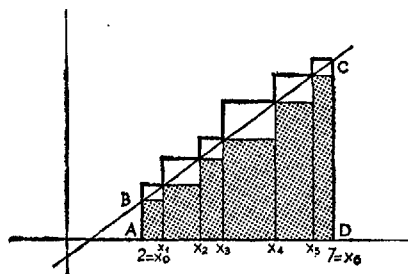


Fig. 70'.

$$1.072. \text{ a) } \int_a^b dx = x + c, \int_a^b = b - a. \text{ b) } \int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}). \text{ c) } \int_a^b \frac{dx}{x} = \log |x| + c, \int_a^b = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

d) y e) son inmediatos también.

1.073. Aplíquese dos veces la fórmula de integración por partes.

$$1.074. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

$$1.075. \text{ a) El cambio de variable } y = \log x \text{ da: } \int_1^e \log x dx = \int_0^1 y e^y dy = [e^y (y-1)]_0^1 = -1. \\ = 1. \text{ b) } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \int_1^2 \frac{dx}{\sin x} = \int_{\operatorname{tg} 0,5}^{\operatorname{tg} 1} \frac{dt}{t} = |\log t|_{\operatorname{tg} 0,5}^{\operatorname{tg} 1} = \log \frac{1,575}{0,546} = \log 10 [L 1,557 - L 0,546] \\ = 2,30258 (L 1,557 - L 0,546). \text{ c) } \int_1^2 \frac{dx}{\cos^2 x} = 2 \int_{\operatorname{tg} 0,5}^{\operatorname{tg} 1} \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} dt = \left[\frac{2t}{1-t^2} \right]_{0,546}^{1,557} \\ \text{ d) } \int_{0,5}^{0,9} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx = \int_{0,46}^{0,73} \frac{y dy}{\cos^2 y} = \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \frac{2t}{1-t^2} \right]_{0,24}^{0,88} - \int_{0,24}^{0,88} \frac{4t dt}{(1-t^2)(1+t^2)} \\ = \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \frac{2t}{1-t^2} \right]_{0,24}^{0,88} + [\log |1-t^2| - \log |1+t^2|]_{0,24}^{0,88} = \left[0,736 \frac{0,76}{1-0,1444} \right. \\ \left. - 0,470 \frac{0,48}{1-0,0576} \right] + [-0,156 - 0,134 + 0,059 + 0,055] = 0,214.$$

1.076. La representación gráfica queda a cuidado del lector. El área del trapecio es 0,236, mayor a la integral d) del ejercicio anterior, y como debería ser menor, esto indica que el error que se ha cometido al calcular dicha integral es mayor que el error cometido al tomar como valor de la integral el área del trapecio ACDB.

1.077. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \alpha < x_{i+1} < \dots < x_j < \beta < x_{j+1} < \dots < x_n = b\}$, una partición del segmento $[a, b]$. Poniendo $e(x_{i-1}, x_i) = \xi_i$, será: $S_{RS}(P, e)$

$$= \sum_{l=1}^i \xi_l [\Phi(x_l) - \Phi(x_{l-1})] + \xi_{i+1} [\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)] + \sum_{l=i+2}^j \xi_l [\Phi(x_l) - \Phi(x_{l-1})] \\ + \xi_{j+1} [\Phi(x_{j+1}) - \Phi(x_j)] + \sum_{l=j+2}^n \xi_l [\Phi(x_l) - \Phi(x_{l-1})] = \sum_{l=1}^i \xi_l \cdot m(x_l - x_{l-1}) + \xi_{i+1} (p_1 \\ + m x_{i+1} - m x_{i-1}) + \sum_{l=i+2}^j \xi_l [p_1 + m x_l - (p_1 + m x_{l-1})] + \xi_{j+1} [p_1 + p_2 + m x_{j+1} - (p_1 \\ + m x_j)] + \sum_{l=j+2}^n \xi_l [p_1 + p_2 + m x_l - (p_1 + p_2 + m x_{l-1})] \text{ y el límite filtrante de esta aplicación es:}$$

$$\lim_{\rightarrow} S_{RS}(P, e) = \int_a^b x m dx + \alpha p_1 + \beta p_2.$$

1.078. En cada uno de los intervalos (a, α_1) , (α_1, α_2) , ..., (α_n, b) , la función de distribución $F(x)$ es continua y derivable, luego, por el teorema del valor medio, si $(x_{i-1}, x_i) \subset (x_{j-1}, \alpha_j)$, serán $F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \Phi'(x_{i-1} + \theta(x_i - x_{i-1}))$, luego la suma de Riemann-Stieltjes de $f(x)$ extendida al conjunto $[a, b] - \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ coincide con la suma de Riemann de $f(x) \Phi'(x)$ extendida al mismo conjunto, luego la diferencia entre la integral de Riemann-Stieltjes de $f(x)$ extendida al segmento $[a, b]$ difiere de la integral de Riemann de $f(x) \Phi'(x)$ extendida al mismo segmento, únicamente en el valor de la integral de Riemann-Stieltjes de $f(x)$ en el conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y esto es igual a la integral de la función de saltos.

$$\mathbf{1.079.} \quad \int_{0,5}^{10,5} dF(x) = 1 + 2 + \dots + 10 = 55.$$

1.080. Tomando el eje y paralelo a las fuerzas, se puede suponer que la fuerza F_i actúa en el punto de abscisa $\frac{(i+1)i}{2}$. El momento de todas las fuerzas respecto del ori-

gen es $\int_0^{15} x dF$, siendo $F(x) = F_1 + \dots + F_i$, siendo $F_1, \dots, F_i$ todas las fuerzas cuyos puntos de aplicación pertenecen al segmento $[0, x]$. La resultante $F = F_1 + \dots + F_5 = 15$ actúa en el punto de abscisa g , y su momento respecto del origen es $g \cdot F$, luego

$$g = \frac{\int_0^{15} x dF}{\int_0^{15} dF} = \frac{1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 15}{1 + 2 + 3 + 4 + 5} = \frac{140}{15} = \frac{28}{3}$$

1.081. La función de distribución es $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$, $0 \leq x < 5$, $F(x) = -\frac{5}{6}x^3 + \frac{80}{6}x - \frac{178}{6}$ para $5 \leq x < 8$ y $F(8) = 37$.

$$g = \frac{\int_0^8 x dF}{\int_0^8 dF} = \frac{\int_0^5 x^2 dx + 2 \cdot 5 + \int_5^8 x \left(-\frac{5}{3}x + \frac{80}{6} \right) dx + 5 \cdot 8}{37} = 3,7$$

1.082. Valor medio $= \bar{X} = \int_0^6 x dF(x) = \frac{1}{6} (1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2} = 3,5$. Variancia

$$\begin{aligned} \overline{(X - \bar{X})^2} &= V = \int_0^6 (x - 3,5)^2 dF(x) = \int_0^6 x^2 dF(x) + (3,5)^2 \int_0^6 dF(x) - 7 \int_0^6 x dF(x) \\ &= \int_0^6 x^2 dF(x) - (3,5)^2 = \frac{1}{6} (1 + 4 + \dots + 36) - (3,5)^2 = 2,91. \end{aligned}$$

1.083. $I = \int_{\pi}^0 x^2 dF$, $F = 10 + \pi - [\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi]$ para $1 < x < 3$, $dF(1) = dF(3) = 10$, luego $I = 10 + 2 \int_0^{\pi} 2,4 \cdot (2 + \cos \varphi)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi + 3 \cdot 10 = 40 + 9,6\pi$.

§ 3. CONVERGENCIA DE INTEGRALES. INTEGRACIÓN DE SERIES FUNCIONALES

1.084. Aplicando el criterio de Cauchy si $a > 0$, poniendo $M = -\frac{\log a \varepsilon}{a}$ se verifica que $\forall y, z$ tales que $M < y < z$ es $\left| \int_y^z e^{-ax} dx \right| = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{e^{ay}} - \frac{1}{e^{az}} \right) < \frac{1}{a} \frac{1}{e^{ay}} < \varepsilon$, cualquiera que sea ε . Análogamente se prueba la divergencia en el caso $a < 0$.

1.085. a) Para que la función $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ sea uniforme se supone que $\operatorname{im} [\operatorname{arc} \operatorname{tg}] = [0, \pi)$. Si ε es un número positivo arbitrario, para todo y, z tales que $M < y < z$, siendo $M = \frac{1}{a} \cot(a\varepsilon)$, se verifica que $\left| \int_y^z \frac{dx}{1+(ax)^2} \right| = \frac{1}{a} [\operatorname{arc} \operatorname{tg}(az) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(ay)] < \frac{1}{a} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(ay) \right] < \varepsilon$.

b) Para todo ε se verifica que si $M < y < z$, siendo $M = \frac{1}{n-1\sqrt{(n-1)\varepsilon}}$ es

$$\left| \int_y^z \frac{dx}{x^n} \right| = \left| \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{y^{n-1}} - \frac{1}{z^{n-1}} \right] \right| < \frac{1}{n-1} \frac{1}{y^{n-1}} < \varepsilon.$$

1.086. $\int_1^n f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \int_m^n f(x) dx = \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}} \right) < \frac{1}{2^m}$, luego $\forall n, m$ tales que $M < m < n$, se verifica que $\left| \int_m^n f(x) dx \right| < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$, siempre que $M = -\frac{\log \varepsilon}{\log 2}$, luego la integral es convergente y se verifica la igualdad del enunciado.

1.087. Aplicando el criterio de Dirichlet, tomando $f(x) = \frac{1}{a+x}$, $dF(x) = |\operatorname{sen} x| dx$, se cumplen las condiciones a) y b). Siendo continua la función integrando, existe la integral en cualquier segmento $[0, t]$, luego la integral es convergente.

1.088. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^v}$ es convergente para $v > 1$. En efecto, $\left| \int_y^z \frac{dx}{x^v} \right| = \left| \left[\frac{1}{1-v} \frac{1}{x^{v-1}} \right]_y^z \right|$

$$= \frac{1}{v-1} \left| \left[\frac{1}{x^{v-1}} - \frac{1}{y^{v-1}} \right] \right| < \frac{1}{v-1} \frac{1}{y^{v-1}} < \epsilon \Rightarrow (v-1) y^{v-1} > \frac{1}{\epsilon}, y^{v-1} > \frac{1}{(v-1)\epsilon},$$

$$M = \frac{1}{v-1} \sqrt[v]{(v-1)\epsilon}. \text{ Como } \frac{1}{x^v} \text{ } v > 1 \text{ es decreciente, se verifica, por la definici3n de}$$

integral, que $\int_{n-1}^n \frac{dx}{x^v} > \frac{1}{n^v}$ de donde $\int_1^n \frac{dx}{x^v} > \frac{1}{1^v} + \dots + \frac{1}{n^v}$, por ser convergente la integral, lo es la serie.

1.089. a) No es convergente. b) Divergente.

1.090. Convergente.

$$1.091. \left| \int_y^x \frac{dx}{x^a e^x} \right| < \int_y^x \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} [x^{1-a} - y^{1-a}], \text{ luego si } 1-a > 0 \text{ y } 0 < y < x$$

$< \delta$, siendo $\delta = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}} \epsilon$, se verificará que $\left| \int_y^x \frac{dz}{x^a e^x} \right| < \epsilon$, luego la integral es conver-

gente a la derecha de 0. Si $1-a \leq 0$ se verifica que $\left| \int_y^x \frac{dx}{x^a e^x} \right| > \frac{1}{e} \left| \int_y^x \frac{dx}{x^a} \right|$, $0 < x < 1$ y esta última integral es, en este caso, divergente a la derecha de 0. Como, cualquiera que sea a , $\frac{1}{x^a e^x}$ se puede hacer menor que cualquier número, la integral es convergente en el límite infinito.

1.092. Es la misma integral anterior sin más que poner $x = t$ y $a = 1 - x$.

1.093. Se puede aplicar la fórmula de integración por partes en el campo de convergencia $(0, +\infty)$ y se obtiene: $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = [-t^{x-1} e^{-t}]_0^\infty + (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt$.

1.094. Multiplicando miembro a miembro: $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1), \dots, \Gamma(2) = \Gamma(1)$ y observando que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$, resulta la proposición.

1.095. $\left| \int_y^x \operatorname{sh} x dx \right| = |\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y| = |2 \operatorname{ch} y - 1| |\operatorname{sh} t|$, siendo $x = y + t$, y el último miembro, dado y , puede hacerse mayor que cualquier número, dando a t un valor conveniente. Sin embargo, $\left| \int_{-y}^y \operatorname{sh} x dx \right| = |\operatorname{ch} y - \operatorname{ch}(-y)| = 0 < \epsilon$.

$$1.096. \text{ a) } \frac{\pi}{2}, \text{ b) } \frac{\pi}{4}, \text{ c) } \frac{\pi}{2}, \text{ d) } \frac{\pi}{3}.$$

1.097. Sí.

$$1.098. F'(y) = \frac{-1}{1+y^2}.$$

1.099. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y}$

1.100. $\frac{\pi}{2}$

1.101. La convergencia no es uniforme. El cálculo directo de la integral proporciona inmediatamente: $F(y) = -\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{y}{|y|}$, que es evidentemente discontinua en el punto $y = 0$.

1.102. $\frac{\partial f}{\partial t} = (x-1)t^{x-2}e^{-t}$ es continua para $(0 < t < \infty)$, $(0 < x < +\infty)$ y $(x-1) \int_a^y t^{x-2} e^{-t} dt$ es uniformemente convergente en $(0, +\infty)$.

1.103. $(\epsilon, +\infty)$, $\epsilon > 0$.

1.104. $\log \frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \dots + \frac{x^n}{n} \right)$, ($|x| < 1$), luego, dado el número positivo arbitrario ϵ , existe n' tal que $\forall n > n'$ sea $\log \left| \frac{1}{1-x} - \left(x + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \right| < \epsilon$, de donde $\int_0^1 \log \left| \frac{1}{1-x} - \left(x + \dots + \frac{x^n}{n} \right) \right| dx < \epsilon$.

1.105. $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n}) dx$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right]$. Como el error cometido al tomar n términos de una serie alternada y convergente es inferior al valor absoluto del término siguiente, bastará tomar $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$.

1.106. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$.

1.107. Si, por ser uniformemente convergentes.

1.108. [El enunciado del texto debe ser $\int_0^{0.8} \frac{dx}{\cos x}$]. Desarrollese $(\cos x)^{-1}$ en serie de potencias mediante la fórmula de Taylor.

1.109. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0.7 \sin^2 2\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 0.35 \sin^2 2\varphi - 0.06 \sin^4 2\varphi - 0.021 \sin^6 2\varphi \dots)$.

1.110. Dentro del intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1.111. Si $(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots \forall x \in \mathbb{R}$.

1.112. Ci $(x) - \log x = \gamma - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n \cdot (2n)!} + \dots, x > 0$.

La constante γ se llama constante γ de Euler.

§ 4. APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.113. Si se pusiese $A = \int_0^1 \pm \sqrt{x} dx$, resultaría $A = 0$. Debe ponerse, según se ha advertido en el texto.

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \left| \int_0^1 -\sqrt{x} dx \right| = 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{4}{3}.$$

1.114. $A = 2 - \int_{-1}^1 y^2 dy$.

1.115. Para $0 \leq x \leq 1$, la función $y = f(x)$ es biforme, ya que resolviendo la ecuación anterior respecto de y , se obtiene $y = 1 \pm \sqrt{x}$. Por consiguiente, es necesario hallar el llamado punto de ramificación, en el que se unan las dos ramas: $y = 1 + \sqrt{x}$ e $y = 1 - \sqrt{x}$, para lo que basta con resolver el sistema formado por estas ecuaciones, y se obtiene el punto $R(0, 1)$. Llamando A al área que se desea calcular, se verifica que

$$A = \int_0^1 (1 + \sqrt{x}) dx - \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx.$$

1.116. $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$. La solución del sistema formado por $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ y $f = 0$, es: $(0, 1)$.

1.117. A la derecha del eje y se encuentra un único punto de ramificación, el $R(1, 1)$. En él se unen las ramas $y = 1 + x \sqrt{1-x}$ e $y = 1 - x \sqrt{1-x}$. Por consiguiente, llamando A al área buscada, será:

$$A = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx.$$

1.118. Todas las rectas incidentes con el punto $(3, -5)$ son ejes de simetría. Tomando como ejes de coordenadas dos de ellos, se obtiene la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, que da lugar a las dos ramas (respecto de la variable de uniformización x) $y = \pm \sqrt{4-x^2}$, luego, por ser

estas ramas simétricas, es: $A = 4 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$, el cambio de variable $\sin t = \frac{x}{2}$,

proporciona: $A = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\pi$.

1.119. La curva es simétrica respecto del eje y , luego bastará tomar la rama correspon-

diente a $x \geq 0$, lo que equivale a $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, luego $A = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t [-2 \cos t \sin t + \cos t] dt$.

1.120. Área de la elipse $\pi a b$. Análogamente se calcula el área del sector de hipérbola.

1.121. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$ no es convergente.

1.122. La parte finita está limitada por el segmento $[1, 3]$. En el segmento $[1, 2]$ la función es positiva y en el segmento $[2, 3]$ es negativa. Por consiguiente:

$$A = \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3) dx + \left| \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx \right|$$

1.123. $\frac{9}{2}$.

$$1.124. A = \frac{3}{2} \pi + \left| \int_0^2 \left(y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{20y+9} \right) dy \right| + \left| \int_0^8 \left(x + 1 - \sqrt{5x+1} \right) dx \right|$$

$$= \frac{3}{2} \pi + 0,26 + 0,9 = \frac{3}{2} \pi + 1,16.$$

1.125. $\frac{15}{2} \pi$.

1.126. 6π .

1.127. La curva es el folium de Descartes (fig. 71'). La región la punteada en la figura. Cortando por el haz de rectas $y = tx$, se obtienen las ecuaciones paramétricas $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$. Para calcular el área del foliolo conviene calcular el elemento de área respecto del parámetro t . Sea (fig. 71'). X el punto de la curva correspondiente al valor t del parámetro e Y el correspondiente al valor $t + dt$. El área del triángulo OXY es:

$$\delta a = \frac{1}{2} |\mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}(t+dt)| = \frac{1}{2} |\mathbf{x}(t) \times (\mathbf{x}(t) + dt \mathbf{x}'(t + \theta dt))| = \frac{1}{2} |\mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}'(t + \theta dt)| dt.$$

El elemento de área será, por tanto:

$$da = \left(\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\delta a}{|dt|} \right) dt = \frac{1}{2} |\mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}'(t)| dt$$

y en nuestro caso:

$$da = \frac{1}{2} \frac{9t^3}{(1+t^3)^2} dt,$$

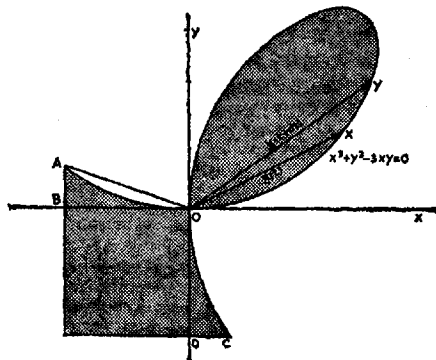


Fig. 71'.

luego, el área del foliolo será:

$$da = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3}{2}.$$

El área del triángulo mixtilíneo O B A será $a_1 = \text{ár A O B} - \left| \int_0^{t_1} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2} dt \right|$, siendo t_1 la raíz real de $t^3 + 3t + 1 = 0$. Tomando aproximadamente $t_1 = -0,31$, resulta $a_1 = \frac{1}{2} \frac{3(-0,31)^3}{1+(-0,31)^3} - \frac{1}{2} \left| \int_0^{-0,31} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2} dt \right|$. Como la figura es simétrica respecto de la bisectriz $x = y$, el área a_2 del triángulo mixtilíneo O D C es igual a a_1 . Luego el área pedida es $\frac{3}{2} + 2a_1 + 1$.

1.128. En este caso conviene utilizar el elemento de área en coordenadas polares.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 + \cos \omega)^2 d\omega = \frac{9}{2} \pi.$$

1.129. $\sqrt{2}\pi$.

1.130. Por la simetría de la figura bastará calcular la longitud de un cuadrante. Llamando L a la longitud de la circunferencia, será:

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r.$$

1.131. $L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$. Esta es una integral que define una nueva función elemental, que se halla tabulada.

1.132. Sea la parábola $y = x^2$. La longitud del arco de extremos $(0, 0)$, $(5, 25)$, será:

$$\begin{aligned} \int_0^5 \sqrt{1+4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\text{arg sh } 10} \text{ch}^2 t dt = \frac{1}{4} \left[t + \frac{1}{2} \text{sh } 2t \right]_0^{\text{arg sh } 10} = \frac{1}{4} \left[3 + \frac{1}{2} \text{sh } (6) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3 + \frac{201,713}{2} \right] = 25,964. \end{aligned}$$

1.133.

$$\int_0^t \sqrt{a^2 \text{sh}^2 t + b^2 \text{ch}^2 t} dt = \int_0^t \sqrt{(a^2 + b^2) \text{sh}^2 t + b^2} dt = b \int_0^t \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \text{sh}^2 t + 1} dt.$$

$$1.134. \int_1^{1,5} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^{1,5} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \int_{\text{arg sh } 1}^{\text{arg sh } 1,5} \frac{\text{ch}^2 t}{\text{sh } t} dt = \int_{\text{arg sh } 1}^{\text{arg sh } 1,5} \frac{dt}{\text{sh } t} + \int_{\text{arg sh } 1}^{\text{arg sh } 1,5} \text{sh } t dt$$

$$= \left[\log \frac{e^t - 1}{e^t + 1} + \operatorname{ch} t \right]_{0,88187}^{1,19476} = 0,83290 - 1,45861 + 1,795 - 0,34571 + 1,22671 - 1,413 = 0,63731.$$

$$1.135. \quad \frac{1}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \arg \operatorname{sh} 2\pi].$$

$$1.136. \quad \sqrt{2} (e^{\varphi_1} - e^{\varphi_0}).$$

$$1.137. \quad \frac{61}{5}.$$

$$1.138. \quad 8.$$

1.139. Las ecuaciones de la circunferencia generatriz son: $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, luego:

$$A = 2\pi \left| \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = 2\pi r^2 \left| \int_0^\pi \operatorname{sen} t dt \right| = \pi r^2 [\cos t]_0^\pi = 4\pi r^2 \right|$$

$$1.140. \quad 4\pi(\pi + 1)r^2.$$

$$1.141. \quad 2b\pi \int_{-1}^1 \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)x^2} dx.$$

$$1.142. \quad \text{Para el hiperboloide: } 2\pi \int_{t_0}^{t_1} b \operatorname{sh} t \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t} dt$$

$$= 2\pi b \int_{\operatorname{argch} t_0}^{\operatorname{argch} t_1} \sqrt{(a^2 + b^2)x^2 - a^2} dx. \quad \text{Para el paraboloide: } 2\pi \int_0^a y \sqrt{4y^2 + 1} dy.$$

$$1.143. \quad x = e^\varphi \cos \varphi, \quad y = e^\varphi \operatorname{sen} \varphi. \quad A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\varphi \operatorname{sen} \varphi \sqrt{2e^{2\varphi}(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)} d\varphi$$

$$= 2\pi \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\varphi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi = \frac{2}{5} \pi \sqrt{2} (2e^\pi + 1).$$

$$1.144. \quad 2\pi \int_{-1}^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = 5,62686\pi.$$

$$1.145. \quad x = \cos t, \quad y = 2 + \operatorname{sen} t. \quad A = 8\pi^2.$$

$$1.146. \quad \frac{64}{3} \pi.$$

$$1.147. \quad x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t. \quad V = \left| -\pi \int_0^\pi r^3 \operatorname{sen}^3 t dt \right| = \left| -\pi r^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t dt \right|$$

$$= \left| -\pi r^3 \left[-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^\pi \right| = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$1.148. \quad x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad V = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

1.149. a) Hiperboloide elíptico: $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $V = \pi \int_0^t a b^2 \operatorname{sh}^2 t \, dt$

$$= \pi a b^2 \int_0^t (\operatorname{ch}^2 t - 1) \operatorname{sh} t \, dt = \pi a b^2 \left(\frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 t - \operatorname{ch} t + \frac{2}{3} \right).$$

b) Hiperboloide hiperbólico: $x = a \operatorname{sh} t$, $y = b \operatorname{ch} t$. $V = \pi \int_0^t a b^2 \operatorname{ch}^2 t \, dt$. c) Paraboloide elíptico: $V = \pi \int_0^a x \, dx$.

d) Paraboloide hiperbólico: $V = 2\pi \int_0^a x^2 \, dx$.

1.150. $\left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \operatorname{sen} t \, dt (r \cos t) \right| = \left| -2 a r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \, dt \right| = \frac{a r \pi}{2}.$

1.151. Solución en el texto.

